УДК 51.681.3

АЛГЕБРА СВЯЗНЫХ ГРАФОВ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТОПОЛОГИИ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ

С.Л.Кривой

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина

М. Хайдер, П. Дымора, М. Мазурек

просп. Академіка Глушкова, 40, тел. 526 0458

Жешовский политехнический институт, Жешов, Польша, e-mail: krivoi@i.com.ua

Описывается один из возможных вариантов алгебры регулярных графов и ее приложения к проектированию и исследованию свойств топологии компьютерных сетей, ориентированных на устойчивость компьютерной сети к повреждениям.

A variant of graf's algebra for undirected finite grafs is described. Investigated some of properties of the algebra and computer network topology by using of this algebra.

Введение

Данная статья является продолжением исследований, начатых в [1, 2]. Предлагаемая алгебра регулярных графов возникла в связи с задачами проектирования топологии компьютерной сети (КС) и исследованием свойств этой топологии с точки зрения устойчивости к повреждениям линий связи и компьютеров. При этом КС моделируется в виде неориентированного графа, вершины которого соответствуют компьютерам, а ребра – линиям связи между ними. Выбор той или иной топологии КС связан с определением степени ее устойчивости в случае повреждения линий связи или компьютеров в КС. Поскольку правильно спроектированная топология должна представляться связным неориентированным графом, то степень связности этого графа может служить мерой устойчивости КС к повреждениям. С этой целью в статье предлагается вариант алгебры регулярных графов, с помощью которой определяется степень устойчивости КС к повреждениям, структура топологии КС с точки зрения операций этой алгебры.

1. Необходимые сведения

Неориентированным графом называется пара $G = (V, E)$, где V – множество вершин графа; E – множество ребер, состоящее из неупорядоченных пар элементов из V (т. е. пары (u, v) и (v, u) считаются одинаковыми).

Граф G называется конечным, если конечно множество его вершин V. Если $(u,v) \in E$, то вершины u, v называются концами этого ребра. Ребро $e \in E$ называется инцидентным вершине $u \in V$, если эта вершина является концом ребра e. Степенью вершины $u \in V$ называется число ребер, инцидентных этой вершине. Степень вершины u обозначим $n(u)$. Если степень вершины равна нулю, то такая вершина называется изолированной, а если степень вершины равна единице, то такая вершина называется концевой или висячей. Далее в статье под графом будет пониматься конечный неориентированный граф.

Пусть $G = (V, E)$ – граф и u, $v \in V$ – две его вершины этого графа. Говорят, что вершины u и v связаны между собой маршрутом в графе, если существует последовательность вершин $u_1, u_2, \ldots, u_k$ графа G такая, что $u = u_1$, $v = v_{uk}$ и для всех $i = 1, 2, \ldots, k-1$ верно $(u_i, u_{i+1}\}) \in E$. Число $k-1$ называется длиной этого маршрута. Маршрут, первая и последняя вершины которого совпадают, называется циклом. Граф, у которого нет ни одного цикла, называется ациклическим.

Определение 1. Граф $G = (V, E)$ называется связным, если любые две вершины этого графа связаны между собой маршрутом. Связный ациклический граф называется деревом.

Вершина дерева является внутренней, если степень этой вершины больше единицы (в противном случае вершина будет концевой). Если между вершинами u и v существует маршрут длины $k-1$, то, в частности, при $k = 1$ длина маршрута равна 0. Это значит, что $u = u_1 = u_k = v$, т. е. из вершины u в вершину u существует маршрут длиной 0. Из этого замечания следует, что отношение R, означающее ``связаны маршрутом между собой'', является рефлексивным, а поскольку граф неориентированный, то это отношение симметрично и, очевидно, транзитивно. Следовательно, это отношение эквивалентности и существует фактор-множество $V/R = \{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$, где V_i – классы эквивалентности этого отношения такие, что $V_i \cap V_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 1,2,\ldots, m$. Из этого простого замечания вытекает такое утверждение.

Теорема 1. Граф $G = (V, E)$ связный тогда и только тогда, когда $V/R = \{V\}$, где R – описанное выше отношение эквивалентности.

Доказательство следует непосредственно из определений и свойств отношения R.

Из этой теоремы получаем простой и эффективный алгоритм проверки связности графа $G=(V,E)$. Действительно, для этого нужно с произвольно выбранной вершины $u \in V$ осуществить обход вершин графа G, в процессе которого метятся пройденные вершины. Если по окончании обхода вершин графа хотя бы одна вершина осталась непомеченной, то граф несвязный, в противном случае – связный. Очевидно, что для этой цели подходит алгоритм поиска в глубину (depth first search – DFS). Алгоритм поиска в глубину описан в [3] и здесь не приводится.

Алгоритм поиска в глубину является важным при проверке связности графа, и его роль особенно возрастает, если над связным графом или над связными графами выполняются операции. Некоторые из этих операций в процессе применения могут приводить к несвязным графам и тогда необходимо проверять результат их выполнения на связность.

2. Степень связности связного графа

2.1. Операция удаления ребра в связном графе. Напомним, что операция удаления ребра $e = (u,v)$ в графе $G = (V, E)$ приводит к графу $G - e = (V, E \setminus \{(u,v)\})$. Рассмотрим вопрос о том, сколько ребер можно удалить из связного графа $G = (V, E)$ так, чтобы после выполнения этих операций полученный граф оставался связным. Введем такое определение.

Определение 2. Степенью связности связного графа называется максимальное число d его ребер, удаление которых из графа не выводит из класса связных графов, а удаление $d+1$-го ребра приводит к несвязному графу.

Известно, что граф, полученный в результате применения операции удаления ребра в связном графе, будет связным, если это ребро принадлежит некоторому циклу этого графа. В качестве следствия из этого факта получаем такое утверждение.

Теорема 2. Степень d связности связного графа $G = (V, E)$ равна его цикломатическому числу $|E| - |V| + 1$.

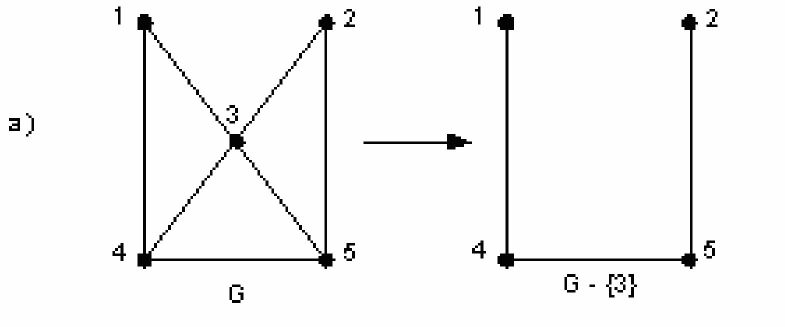
Доказательство следует из того, что связный граф остается связным, если из него удалить не более $|E| - |V| + 1$ ребер. Удаление такого числа ребер приводит к остовному дереву графа G, а удаление хотя бы одного ребра в дереве приводит к несвязному графу.

Следствие 1. Число возможных операций удаления ребра в связном графе $G = (V, E)$, не выводящих результат из класса связных графов, равно цикломатическому числу этого графа $d = |E| - |V| + 1$.

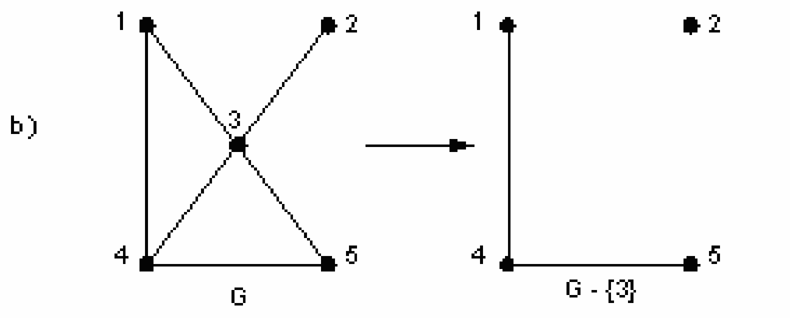
2.2. Операция удаления вершины в связном графе. Операция удаления вершины u в графе $G = (V, E)$ сводится к удалению вершины u из множества вершин V, а из множества его ребер E удаляются все ребра, инцидентные вершине u. Непосредственно из предыдущей теоремы получаем справедливость такого утверждения.

Теорема 3. Граф, полученный в результате применения операции удаления вершины в связном графе, будет связным, если все ребра, инцидентные этой вершине, принадлежат некоторым циклам этого графа или эта вершина является концевой.

Пример 1. Рассмотрим граф G, из которого удаляется вершина 3:



– граф связный



– граф несвязный

В случае а) все ребра вершины 3, т. е. ребра (1,3), (2,3), (4,3), (5,3), принадлежат циклам (1,3,4), (2,3,5), (4,3,5), (5,3,2), (5,3,4). В случае б) ребро (3,2) не принадлежит ни одному циклу в этом графе.

В качестве следствий из предыдущей теоремы вытекает такие простые соотношения:

a) если $n(u) = 1$, то степени связности графов G и $G - u$ равны, где u – вершина графа G;

b) степень связности графа, полученного после применения m операций удаления вершины в связном графе $G = (V, E)$, равна

$$d' = d - (k_1 - 1) - ... - (k_m - 1),$$

где d – степень связности графа G, k_i – степень вершины u_i, которая удаляется из графа, $i = 1,2,\ldots, m$.

3. Операции алгебры конечных связных неориентированных графов

Для того чтобы построить алгебру связных графов необходимо определить операции, относительно которых замкнуто множество всех конечных неориентированных связных графов. Это означает, что если аргументами этих операций являются связные графы, то в результате выполнения операций также получаются связные графы. Если такая алгебра на первом этапе построена, то на втором этапе необходимо исследовать свойства операций этой алгебры, установить ее тождества и тип алгебры.

Следует заметить, что в зависимости от приложений множество операций алгебры может измениться, поэтому в данной статье и идет речь только об одном из возможных вариантов такой алгебры, ориентированной на исследование устойчивости КС к повреждениям.

3.1. Полностью определенные операции. Пусть $G = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ – связные графы. Рассмотрим операции, относительно которых замкнуто множество связных графов. Соответствующие операции и правила их применения вытекают из таких утверждений.

Теорема 4. Операции a) взаимно-однозначного соединения, b) соединения, c) декартового произведения, d) введения ребра, e) введения вершины в ребро, примененные к связным графам дают в результате связный граф.

Доказательство: a) при взаимно-однозначном соединении ребром соединяются только две вершины u и $f(u)$, где f это взаимно-однозначное соответствие. Очевидно, что этого достаточно для того, чтобы полученный граф был связным, поскольку очевидно, что в результирующем графе все вершины будут связаны некоторым маршрутом; b) поскольку каждая вершина первого графа соединяется ребром с каждой вершиной второго графа, то очевидно, что свойство связности сохраняется для результирующего графа.

Доказательство остальных утверждений очевидно.

Заметим, что взаимно-однозначное соответствие, фигурирующее в операции взаимно-однозначного соединения, может быть, в частности, изоморфизмом графов. Если это отображение является изоморфизмом, то взаимно-однозначное соединение называется изоморфным соединением [2].

3.2. Частичные операции. Операции, принадлежащие к этой группе, могут выводить из класса связных графов и поэтому они являются частичными. К этой группе операций принадлежат операции удаления ребра, удаления вершины, объединения и пересечения связных графов [4]. Если для первых двух операций выше было выяснено допустимое их количество, то для последних двух операций это предстоит сделать.

Теорема 5: a) объединение графов $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ будет связным графом, если они имеют хотя бы одну общую вершину, т. е.; b) граф, полученный в результате применения операции пересечения к связным графам, будет связным, если в результате применения к графу $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ операции удаления вершин, не входящих в множество $V_1 \cap V_2$, все ребра, инцидентные этим вершинам, принадлежат некоторому циклу этого графа или эти вершины инцидентны концевым ребрам.

Доказательство: a) поскольку $v \in V_1 \cap V_2$, то в силу связности графов G_1 и G_2 имеем, что из любой вершины u графа G_1 существует маршрут в вершину v графа G_2, а из вершины v существует маршрут в любую вершину w в графе G_2. Но тогда из вершины u существует маршрут, проходящий через вершину v, в вершину w. Теперь справедливость теоремы вытекает из произвольности вершин u, v и w; b) доказательство следует из определения операции удаления вершины. Результат операции не определен, если в результате ее применения на очередном шаге приводит к несвязному графу. Кроме того, становится очевидным, что операция пересечения графов выражается через операции объединения и удаления вершины.

Простым достаточным условием неприменимости операции удаления вершины является отрицательное значение степени связности графа, полученного на очередном шаге. В общем случае после завершения всех операций удаления вершин необходимо применить алгоритм DFS для проверки связности полученного графа. Его сложность, как известно, пропорциональна величине $O(\max(|E|, |V|)$.

4. Определение алгебры

Из всего сказанного выше следует определение алгебры конечных связных неориентированных графов. Эта алгебра будет частичной.

Определение 3. Пара $AG = (A, \Omega)$ называется алгеброй конечных связных неориентированных графов, если *A* – носитель алгебры состоит из всех конечных связных неориентированных графов, а *Ω* – сигнатура алгебры включает операции объединения, пересечения, взаимно-однозначного соединения относительно f, соединения, декартового произведения, введения ребра, введения вершины в ребро, удаления ребра и удаления вершины.

Введем обозначения для этих операций: $\cup^2, \cap^2, \times, *_f^2, *^2, w_{ik}^3, w_{iw}^3, w_{ok}^3, w_{ow}^2$ соответственно, где верхний индекс означает арность соответствующей операции.

4.1. Свойства операций. Сначала докажем (хотя и достаточно очевидный) следующий факт.

Теорема 6. Алгебра $AG = (A, \Omega)$ является решеткой относительно операций объединения и пересечения.

Для доказательства нужно показать идемпотентность операций пересечения и объединения, их коммутативность и ассоциативность, а также справедливость законов поглощения. Пусть $G = (V, E)$ и $G_1 = (V_1, E_1)$ – некоторые графы.

Идемпотентность. На основе аналогичных законов алгебры множеств имеем:

a) $G \cup G = (V \cup V, E \cup E) = (V, E) = G.$ b) $G \cap G = (V \cap V, E \cap E) = (V, E) = G.$

Коммутативность и ассоциативность операций следуют непосредственно из определения операций пересечения и объединения графов и справедливости аналогичных законов в алгебре множеств.

Поглощение. На основе аналогичных законов алгебры множеств имеем:

$$G \cup (G \cap G_1) = (V \cup (V \cap V_1), E \cup (E \cap E_1)) = (V, E) = G;$$
$$G \cap (G \cup G_1) = (V \cap (V \cup V_1), E \cap (E \cup E_1)) = (V, E) = G.$$

В качестве следствия из этой теоремы получаем, что все элементы определенной выше алгебры графов составляют частично упорядоченное множество. Выясним, что это за порядок.

Порядок на решетке определяется как $G_1 \le G_2 \Leftrightarrow G_1 \cap G_2 = G_1$ или двойственным образом: $G_1 \le G_2 \Leftrightarrow G_1 \cup G_2 = G_2$. Но это значит, что $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2) = (V_1, V_2) = G_1$, и в силу эквивалентности условий $A \subseteq B$ и $A \cap B = A$ получаем $G_1 \le G_2 \Leftrightarrow G_1 \subseteq G_2$.

Теперь выясним, какие элементы в этой алгебре являются минимальными (очевидно, что такие элементы должны существовать). Существование таких элементов и их вид дает

Следствие 2. Минимальными элементами алгебры $AG = (A, \Omega)$ являются деревья вида T_u^0, где $T_u^0 = (V = \{u\}, E = \phi)$ – пустое дерево, состоящее из единственной вершины *u*.

Доказательство. Очевидно, что деревья в этой алгебре играют особую роль, поскольку из деревьев строится любой связный граф. В этом смысле деревья являются образующими в алгебре *AG*. Однако если к дереву применять операцию удаления конечной вершины, то оно редуцируется к дереву T_u^0. Поэтому пустые деревья играют роль минимальных элементов в этой алгебре. Очевидно также, что пустые деревья, состоящие из единственной вершины, уже не редуцируются.

Используя это следствие, введем в рассмотрение деревья вида

$T_{u,v} = (V = \{u, v\}, E = \{(u, v)\})$ и b) $T_{u,v}^w = (V = \{u, w, v\}, E = \{(u, w), (w, v)\})$.

Эти деревья представляются через минимальные элементы с помощью операций алгебры AG следующим образом:

a) $T_{u,v} = (V = \{u, v\}, E = \{(u, v)\}) = w_{ik}(T_u^0 \cup T_v^0, u, v) = T_{v,u} = T_u^0 * T_v^0 = T_u^0 *_f T_v^0 (f(u) = v)$

b) $T_{u,v}^w = (V = \{u, w, v\}, E = \{(u, w), (w, v)\}) = T_{u,w} \cup T_{w,v} = w_{ik}(T_u^0 \cup T_w^0, u, w) \cup w_{ik}(T_w^0 \cup T_v^0, w, v) =$
$= (T_u^o * T_w^0) \cup (T_v^0 * T_w^0)$

Заметим также, что операция соединения двух графов дает в результате связный граф, даже если один из графов несвязный или оба графа несвязные. В частности, графы, соответствующие выражениям $(T_u^0 \cup T_v^0) * G$ и $(T_u^0 \cup T_v^0) * (T_w^0 \cup T_s^0)$, где G – связный граф, а *u, v, w, s* – попарно различные вершины, будут связными.

4.2. Зависимость операций. Исследуем теперь вопрос о том, какие операции являются основными, а какие не основные (т. е. операции, которые выражаются через основные).

1. Операция введения вершины в ребро. Пусть $G = (V,E) \in AG$ и $e = (u,v) \in E$. Операция введения вершины w в ребро *e = (u,v)* преобразует это ребро в два ребра $e_1 = (u, w)$ и $e_2 = (w, v)$ в графе *G* с удалением ребра *e = (u,v)* из графа *G*. Эту операцию можно выполнить следующим образом:

$$w_{iw}(G,e,w) = \left(G \cup T_{u,v}^{w}\right) - e = w_{ok}\left(G \cup T_{u,v}^{w}, u, v\right).$$

Правильность такого представления следует из того, что объединение двух связных графов, имеющих общие вершины, тоже будет связным графом, а ребро e в графе $G \cup T_{u,v}^{w}$ принадлежит циклу *u,w,v,u*. Поэтому его удаление из графа не нарушит его связности.

2. Операция введения ребра в связный граф *G = (V, E)* состоит в том, что в граф *G* вводится ребро между двумя несмежными вершинами *u* и *v*. Эта операция, подобно предыдущей, тоже выражается через операцию объединения графа *G* и дерева T_{uv}. Формально это записывается так:

$$w_{ik}(G,u,v) = \left(G \cup T_{u,v}\right) = \left(G \cup T_{v,u}\right) = w_{ik}(G,v,u).$$

Корректность такого представления следует из того, что объединение двух связных графов, имеющих общие вершины, будет связным графом. Ясно также, что справедливо тождество вида

$$w_{ok}\left(w_{ik}(G,u,v),u,v\right) = w_{ik}\left(w_{ok}(G,u,v),u,v\right) = G.$$

3. Операция соединения двух связных графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$, где $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, очевидным образом представляется через операции объединения графов и последовательности *из* $|V1||V_2|$ операций введения ребра. Это выражение имеет вид

$$G_1 * G_2 = \bigcup_{u\in V_1} \bigcup_{v\in V_2} w_{ik}(G_1 \cup G_2, u, v) = \bigcup_{u\in V_1} \bigcup_{v\in V_2} \left((G_1 \cup G_2) \cup T_{u,v}\right)$$

Корректность такого представления следует из того, что, соединив хотя бы одним ребром две вершины связных графов, получаем связный граф. Очевидно, что данная операция является коммутативной и ассоциативной.

4. Операция взаимно-однозначного соединения двух связных графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ состоит в соединении ребром соответствующих друг другу вершин при этом взаимно однозначном соответствии. Эта операция также просто выражается через операции объединения графов и последовательности операций введения ребра. Выражение для этой операции является таким:

$$G_1 *_f G_2 = \bigcup_{u\in V_1} \bigcup_{f(u)\in V_2} w_{ik}(G_1 \cup G_2, u, f(u)) = \bigcup_{u\in V_1} \bigcup_{f(u)\in V_2} \left((G_1 \cup G_2) \cup T_{u,f(u)}\right)$$

Корректность такого представления, как и в предыдущем случае, следует из того, что, соединив хотя бы одним ребром две вершины связных графов, получаем связный граф. Очевидно, что данная операция, как и предыдущая, является коммутативной и ассоциативной.

5. Операция пересечения двух связных графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ состоит в удалении вершин в графе $G_1 \cup G_2$, которые не являются общими для них. Выражение для этой операции является таким:

$$G_1 \cap G_2 = \bigcup_{u\notin V_1\cap V_2} w_{ow}(G_1 \cup G_2, u)$$

Подводя итог, заметим, что можно показать зависимость операции декартового произведения от остальных операций этой алгебры, однако мы на этом остановимся и тогда алгебра связных конечных неориентированных графов принимает вид

$$AG = (A,\Omega) = (A, \{\cup, \cap, \times, w_{ow}, w_{ok}\})$$

Применим эту алгебру к исследованию различных топологий КС и охарактеризуем их.

5. Характеристики различных топологий КС

Рассмотрим некоторые часто используемые графы при выборе топологии КС (см. [5]) и охарактеризуем эти топологии с точки зрения определенной выше алгебры AG. Для этого введем еще одно понятие, которое будет использоваться при анализе топологий КС.

Определение 4. Вершина связного графа называется точкой сочленения, если удаление этой вершины из графа приводит к несвязному графу.

Очевидно, что в дереве любая внутренняя вершина является точкой сочленения. Из этого определения очевидным образом следует, что некоторая вершина будет точкой сочленения, если она смежная с концевой вершиной. Из этого простого замечания вытекает, что результат применения операции удаления вершины в связном графе будет неопределенным, если эта вершина является точкой сочленения.

1. Одноканальная магистраль (дерево). Для представления КС с этой топологией саму магистраль будем рассматривать как компьютер, т. е. изображать вершиной графа. Тогда граф, лежащий в основе этой топологии имеет вид дерева, показанного ниже на рис. 1, где s_1, s_2, …, s_r – серверы; $k_1, k_2,\ldots,k_n$ – компьютеры; *M* – магистраль.

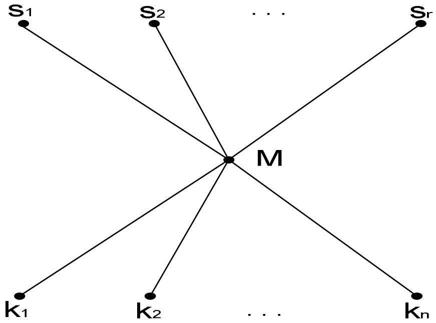


Рис. 1

Данный граф является деревом и имеет одну внутреннюю вершину (магистраль) степени $n(M) = r + n$ и $r + n$ концевых вершин. Алгебраическое выражение в алгебре AG имеет вид

$$(T^0_{S1} \cup \ldots \cup T^0_{Sr} \cup T^0_{k1} \cup \ldots \cup T^0_{kn}) * T^0_M .$$

Как видно из данного выражения важным свойством этой топологии является то, что она устойчива относительно удаления любого числа конечных вершин и неустойчива относительно удаления внутренней вершины (магистрали) и удаления хотя бы одного ребра. Следовательно, при использовании этой топологии необходимо иметь надежные линии связи и надежную магистраль.

2. Многоканальная магистраль (трехдольный граф). Усовершенствованием одноканальной магистрали в смысле повышения надежности КС является многоканальная магистраль. Граф, лежащий в основе этой топологии, является трехдольным (см. рис. 2), где $s_1, s_2, \ldots, s_r$ – серверы, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – компьютеры, $M_1, \ldots, M_m$ – магистрали.

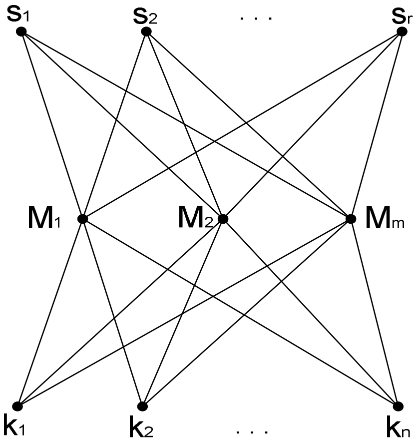


Рис. 2

Степень связности данного графа равна $d = |E| - |V| + 1 = rm + nm - r - n - m + 1 = (r + n -1)(m-1)$. Если данную топологию сравнивать с предыдущей (в предыдущей топологии $m = 1$ и $d = 0$), то степень надежности данной КС увеличивается в $m-1$ раз. Алгебраическое выражение для данной топологии имеет вид

$$(T^0_{S1} \cup \ldots \cup T^0_{Sr}) * (T^0_{M1} \cup \ldots \cup T^0_{Mm}) \cup (T^0_{M1} \cup \ldots \cup T^0_{Mm}) * (T^0_{k1} \cup \ldots \cup T^0_{kn}) =$$

$$= (T^0_{S1} \cup \ldots \cup T^0_{Sr} \cup T^0_{k1} \cup \ldots \cup T^0_{kn}) * (T^0_{M1} \cup \ldots \cup T^0_{Mn})$$

Как видно из приведенного выражения, выход из строя любых $m-1$ магистралей оставляет КС живой (в этом случае КС редуцируется к одноканальной магистрали, для этого нужно сравнить полученное выражение с выражением для одноканальной магистрали). Аналогичное утверждение справедливо и для ребер.

3. Куб. Граф, лежащий в основе этой топологии, является шестигранником (см. рис. 3).

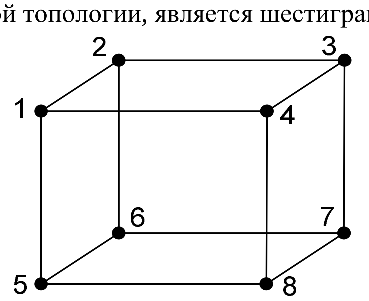


Рис. 3

Степень связности для этого графа равна $d = 12 - 8 + 1 = 5$. Алгебраическое выражение для этого графа можно построить двумя способами:

a) a) $(T_{1,2} \cup T_{2,3} \cup T_{3,4} \cup T_{4,1}) *_f (T_{5,6} \cup T_{6,7} \cup T_{7,8} \cup T_{8,5})$;

b) $(T_{1,2} \cup T_{2,3} \cup T_{3,4} \cup T_{4,1}) \times T_{5,6}$,

где взаимно-однозначное отображение f в выражении а) задается соотношением $f(i) = i + 4,\ i = 1, 2, 3, 4$. Полученные из этих выражений графы являются изоморфными, в чем легко убедиться непосредственно.

Из представления а) следует, что данная топология является устойчивой к удалению любых двух вершин и любых двух ребер, кроме того, что из первого аргумента можно удалить четыре ребра, а из второго аргумента одно ребро и наоборот. Действительно, однозначное соединение порождает связный граф, если хотя бы один из аргументов является связным графом. Удаление всех ребер в первом (втором) аргументе означает замену графов T_{ij} графами T_i^0 и T_j^0 соответственно $(i, j = 1,2,3,4)$, и тогда граф

$$\left(T_1^0 \cup T_2^0 \cup T_3^0 \cup T_4^0\right) * f\left(T_{5,6} \cup T_{7,8} \cup T_{8,5}\right)$$

будет связным.

Заметим, что из выражения а) следует, что в данном графе можно удалить все вершины, принадлежащие одной грани, и результирующий граф будет связным. Действительно, в этом случае выражение а) принимает вид $T_{1,2} * fT_{5,6}$ и поскольку оба аргумента являются связными графами, то и результат будет связным графом.

Выражение b) для этого графа показывает, каким образом строится гипершестигранник.

4. Гипершестигранник. Граф, лежащий в основе этой топологии, является гипершестигранником (см. рис. 4).

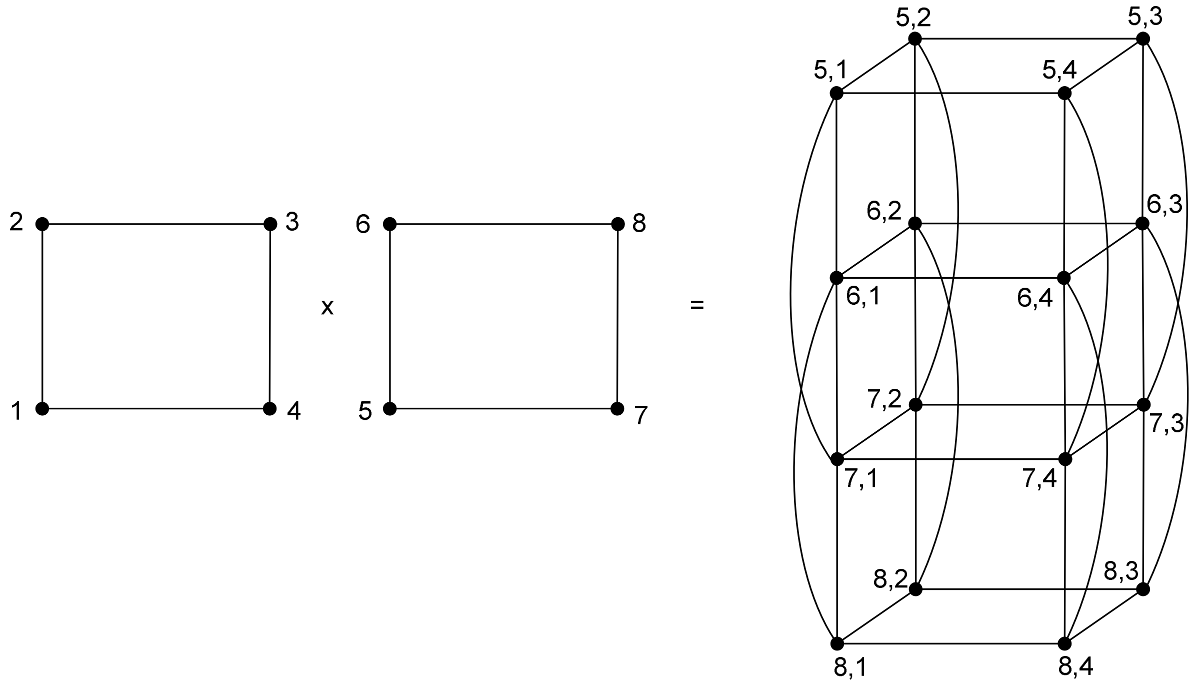


Рис. 4

Более точную характеристику можно получить, если проанализировать алгебраическое выражение для этого графа, которое выглядит таким образом:

$$(T_{1,2} \cup T_{2,3} \cup T_{3,4} \cup T_{4,1}) \times (T_{5,6} \cup T_{6,7} \cup T_{7,8} \cup T_{8,5}).$$

Из этого представления получаем, что удаление любых двух смежных вершин в любом из аргументов приводит к связному графу, который изоморфен шестиграннику. Отсюда получаем, что удаление любых двух граней (т. е. вершин этих граней) и любых двух ребер не нарушает связности гипершестигранника.

Кроме того, удаление любого ребра в любом из аргументов в вышеприведенном выражении оставляет граф связным. Это значит, что в результирующем графе можно удалить восемь ребер, которые соответствуют удаленному ребру. Максимальное число ребер, которые можно удалить из этого графа, равно $d = |E| - |V| + 1 = 32 - 16 + 1 = 21$. Из этой оценки следует, что этот граф гораздо более устойчив по отношению к операции удаления ребра, чем шестигранник.

5. Решетка. В основе этой топологии лежит n-мерная решетка (см. рис. 5, двумерность решетки взята для простоты).

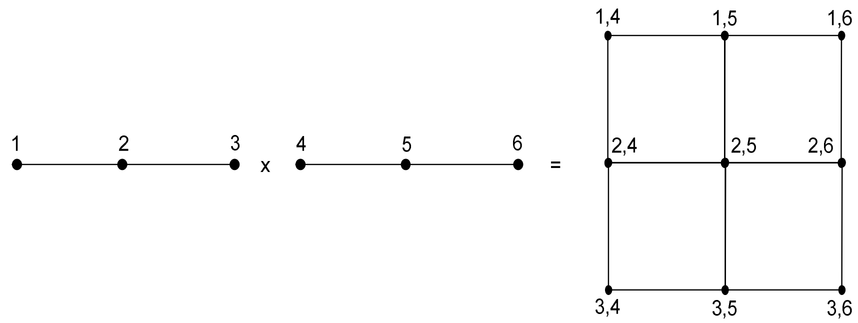


Рис. 5

Алгебраическое выражение для этого графа имеет вид

$$[(T_{1,2} \cup T_{2,3})*_{f1} (T_{4,5} \cup T_{5,6})] \cup [(T_{7,8} \cup T_{8,9})*_{f2} (T_{4,5} \cup T_{5,6})],$$

где $f_1(i) = i + 3,\ f_2(j) = j + 3,\ i = 1,2,3,\ j = 4,5,6.$

Из этого представления видно, что удаление любой вершины в одном из аргументов и соответствующей вершины во втором аргументе оставляет граф связным. Это значит, что в результирующем графе можно удалить любые две смежные вершины без нарушения связности графа.

Данный граф можно представить и другим выражением:

$$(T_{1,2} \cup T_{2,3})x(T_{4,5} \cup T_{5,6}).$$

Из этого представления следует, что в аргументах нельзя удалить ни одного ребра, так как результирующий граф будет несвязным. Это значит, что аргументы данного произведения не редуцируемы к более простым связным графам, которые порождают эту решетку.

Аналогичным образом можно проанализировать топологии, в основе которых лежат графы де Брюина и Каутца.

Заключение

Приведенная в данной статье алгебра применялась при исследовании свойств различных топологий в процессе проектирования компьютерной сети. Основное преимущество представления топологии сети в виде алгебраического выражения состоит в том, что из него видно, какие элементы должны участвовать в построении сети, структура этих элементов и устойчивость сети к неисправностям в случае выхода из строя составляющих ее элементов.

1. *Hajder* M., Dymora P. Algorithmical and topological methods of fault tolerace assurance. – Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Sklodowskiej. – Annales Informatica, Kazimierz Dolny.- 2004 – P. 143-153.
2. *The matrix* method of determining the fault tolerance degree of a computer network topology // S. Krivoi, M. Hajder, P. Dymora, M. Mazurek. KDS-2005. – Boolgaria. – Varna. – 2005. – P. 412 - 419.
3. *Ахо* А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М: Мир. – 1979. – 535 с.
4. *Свами* М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. – М: Мир. – 1984. – 454 с.
5. *Hajder* M., Loutskij G., Streciwilk W. Informatyka. Rzeszow: WSIZ. – 2002. – 714 s.