

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОРТОТРОПНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С КРУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ

В.С. КИРИЛЮК, О.И. ЛЕВЧУК, Е.В. ГАВРИЛЕНКО

Аннотация. Развита математическая модель для анализа напряженного состояния в ортотропном электроупругом материале с круговой (дискообразной) трещиной. Модель базируется на рассмотрении связанной системы уравнений электроупругости. Рассмотрена задача об электрическом и напряженном состоянии в ортотропном электроупругом пространстве с круговой трещиной при однородных силовых и электрических нагружениях. Решение задачи получено с помощью использования тройного преобразования Фурье и Фурье-образа функции Грина для бесконечной пьезоэлектрической среды. Тестирование подхода проводилось для случая расположения трещины в плоскости изотропии трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала, для которого существует точное решение задачи. Сравнение результатов вычислений подтверждает высокую эффективность использованного подхода. Проведены численные исследования, изучено распределение коэффициентов интенсивности напряжений вдоль фронта круговой трещины в электроупругом ортотропном материале и упругих ортотропных материалах при однородных нагружениях.

Ключевые слова: математическое моделирование, связанная система уравнений электроупругости, ортотропный пьезоэлектрический материал, плоская круговая трещина, однородные нагрузки, коэффициенты интенсивности напряжений.

ВВЕДЕНИЕ

Использование пьезоэлектрических материалов в различных отраслях промышленности при создании элементов датчиков для измерительной аппаратуры, преобразователей энергии вызывает интерес изучения и анализа силовых и электрических полей в электроупругих телах, содержащих концентраторы напряжений типа полостей, включений, трещин. В то же время решение пространственных трехмерных задач электроупругости является весьма сложной математической проблемой, поскольку исходная система уравнений для нахождения напряженного и электрического состояний представляет собой связанную систему дифференциальных уравнений в частных производных [1, 3, 4]. Поэтому до настоящего времени наиболее полно исследованы двумерные задачи электроупругости (с учетом связанности полей) для тел с концентраторами напряжений [8, 10, 11]. Для случая трансверсально-изотропных свойств электроупругого материала (представляют широкий класс пьезоэлектрических материалов) в работах [20, 25] предложены подходы к построению общих решений системы связанных уравнений

электроупругости, на основе которых получены решения ряда задач для пьезоэлектрического материала с полостями, включениями, трещинами, что специальным образом ориентированы относительно оси симметрии электроупругого материала. Предполагалось, что ось симметрии материала ориентирована вдоль оси вращения концентратора напряжений (для полости или включения), а для круговой или эллиптической трещины она расположена в плоскости, перпендикулярной оси симметрии материала [5, 7, 9, 12, 14, 15, 17–24, 27–29]. В случае же другой ориентации концентраторов напряжений (полостей, включений, трещин) в трансверсально-изотропном пьезоэлектрическом материале упомянутые подходы не позволяют решать пространственные задачи электроупругости. Отметим, что в настоящее время рассмотрено лишь несколько пространственных задач электроупругости для ортотропных пьезоэлектрических материалов [6, 30].

В работе на основе математического моделирования впервые изучено распределение коэффициентов интенсивности напряжений вдоль фронта круговой трещины, расположенной в ортотропном электроупругом материале, при постоянном внутреннем давлении на поверхности круговой трещины. При исследованиях применен аналитико-численный подход, основанный на преобразовании Фурье по трем пространственным переменным, Фурье-образе функции Грина для электроупругого материала, теореме Коши о вычетах и квадратурных формулах Гаусса. Для частных случаев рассматриваемой проблемы получено совпадение результатов с данными других исследований.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СООТНОШЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть электроупругое ортотропное пространство содержит дискообразную (круговую) трещину, расположенную в плоскости xu , что является одной из ортогональных плоскостей симметрии материала. При рассмотрении задачи полагаем, что пьезоэлектрический материал находится под воздействием силовых и электрических полей полиномиального вида. Наличие трещины как концентратора напряжений приводит к появлению в электроупругой среде возмущенного силового и электрического состояний.

Полная система уравнений электроупругости для связанных полей принимает следующий вид:

уравнения равновесия при отсутствии объемных сил

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (1)$$

уравнения вынужденной электростатики

$$D_{i,i} = 0; \quad E_i = -\Psi_{,i}; \quad (2)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i});$$

уравнения состояния

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + e_{nij}\Psi_{,n}; \quad D_i = e_{imn}\varepsilon_{mn} - k_{in}\Psi_{,n}, \quad (3)$$

где σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , D_i , E_i , Ψ — компоненты напряжений, деформаций, перемещений, электрических перемещений (электрической индукции), напря-

женности электрического поля и электрический потенциал соответственно. При записи основных уравнений использованы обозначения следующих тензоров: C_{ijmn} , e_{imn} , k_{ij} — тензоры упругих модулей, пьезомодулей, диэлектрических проницаемостей пьезоэлектрического материала. Для ортотропных электроупругих материалов упругие свойства материала описываются девятью независимыми постоянными $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$; пьезомодули — пятью независимыми величинами $e_{15}, e_{24}, e_{31}, e_{32}, e_{33}$; диэлектрические проницаемости — тремя независимыми постоянными k_{11}, k_{22}, k_{33} . Компоненты тензоров, входящие в выражения (3), связаны с упомянутыми независимыми постоянными следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= c_{11}; C_{2222} = c_{22}; C_{3333} = c_{33}; C_{1122} = C_{2211} = c_{12}; \\ C_{1133} &= C_{3311} = c_{13}; C_{2233} = C_{3322} = c_{23}; C_{2323} = C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \\ C_{3131} &= C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}; C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}; \\ e_{113} &= e_{131} = e_{15}; e_{223} = e_{232} = e_{24}; e_{311} = e_{31}; \\ e_{322} &= e_{32}; e_{333} = e_{33}; k_{11}; k_{22}; k_{33}. \end{aligned}$$

Другие компоненты этих трех тензоров равны нулю.

Отметим, что из соотношений (1)–(3) и приведенных компонентов тензоров следуют уравнения статики электроупругого ортотропного тела относительно перемещений и электрического потенциала.

Для описания состояния для связанных силовых и электрических полей воспользуемся обозначениями [9], на основе которых представим в следующем виде:

упругие перемещения и электрический потенциал:

$$U_M = \begin{cases} u_m, & M = 1, 2, 3, \\ \Psi, & M = 4, \end{cases} \quad (4)$$

упругие деформации и напряженность электрического поля

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \varepsilon_{mn}, & M = 1, 2, 3, \\ \Psi_n, & M = 4; \end{cases} \quad (5)$$

напряжения и электрические перемещения

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & J = 1, 2, 3, \\ D_i, & J = 4; \end{cases} \quad (6)$$

электроупругие модули

$$E_{iJMn} = \begin{cases} C_{ijmn}, & J, M = 1, 2, 3; \\ e_{nij}, & J = 1, 2, 3; M = 4; \\ e_{imn}, & J = 4; M = 1, 2, 3; \\ -k_{in}, & J, M = 4. \end{cases} \quad (7)$$

С помощью приведенных обозначений (4)–(7) уравнения состояния (3) можно записать в таком виде:

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJMn} Z_{Mn} . \quad (8)$$

В граничные условия для нахождения электроупругого состояния входят нормальные и касательные усилия, а также нормальная составляющая вектора электрической индукции на поверхности трещины

$$\tau_{13}^{\pm} = f(x_1, x_2); \quad \tau_{23}^{\pm} = g(x_1, x_2); \quad \sigma_{33}^{\pm} = -P(x_1, x_2);$$

$$D_3^{\pm} = -D(x_1, x_2) , \quad (x_1, x_2) \in S^{\pm}; \quad U_M(\vec{x}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty , \quad (9)$$

где S^{\pm} — двусторонняя поверхность трещины. При заданном основном напряженном и электрическом состояниях в пьезоэлектрическом материале и на свободной от силовых и электрических воздействий поверхности трещины с помощью суперпозиции основного и возмущенного состояний приходим к граничным условиям для нахождения возмущенного электроупругого состояния.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для бесконечного ортотропного электроупругого пространства функция Грина $G_{JM}(\vec{x} - \vec{x}')$ (фундаментальное решение) удовлетворяет следующим уравнениям:

$$E_{kJMn} G_{JM, kn} + \delta_{JM} \delta(\vec{x} - \vec{x}') = 0 , \quad (10)$$

где $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ — дельта функция Дирака; δ_{JM} — символ Кронекера, а запятая после индекса означает дифференцирование по соответствующей переменной. В дальнейшем воспользуемся интегральным выражением функции Грина в виде

$$G_{JM}(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{JM}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 , \quad (11)$$

где $A_{JM}(\vec{\xi})$ — соответствующие алгебраические дополнения элементов матрицы

$$\{K_{JM}(\vec{\xi})\} = \{E_{iJMn} \xi_i \xi_n\}; \quad (12)$$

$D(\vec{\xi})$ — определитель упомянутой матрицы.

Обобщая случай для чисто упругого материала [26] на основе тождества Сомильяны для пьезоэлектрического материала, учитывая выражения (8)–(12), представим возмущенное электрическое и напряженное состояния с помощью неизвестных скачков перемещений и электрического потенциала на двусторонней поверхности трещины:

$$U_I(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{N=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{IJM3} \xi_I^N A_{IJ}(\vec{\xi}^N)}{\partial D(\vec{\xi}^N) / \partial \xi_3} \iint_S b_M(\vec{x}') e^{-i\vec{\xi}^N \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx'_1 dx'_2 ,$$

где для круговой трещины неизвестный вектор $\vec{b}(\vec{x})$ принимает вид

$$\vec{b}(\vec{x}) = \vec{b}^{(p,q)}(x_1/a + ix_2/a)^p (x_1/a - ix_2/a)^q (1 - x_1^2/a^2 - x_2^2/a^2)^{1/2}; \quad (13)$$

a — значения радиуса круговой трещины; $\vec{b}^{(p,q)}$ — постоянные четырехкомпонентного вектора, которые в общем случае являются комплексными числами. Суммирование проводится для ξ_3^M — корней уравнения $D(\vec{\xi}) = 0$ с отрицательной мнимой частью при $x_3 > 0$, а вектор $\vec{\xi}^M$ имеет вид $\vec{\xi}^M = (\xi_1, \xi_2, \xi_3^M(\xi_1, \xi_2))$. Компоненты напряжений и электрической индукции, учитывая формулы (13), будем находить с помощью выражений

$$\Sigma_{iJ}(\vec{x}) = E_{iJKl} U_{K,l} = \left(\frac{-i}{4\pi^2}\right) \sum_{N=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S \frac{E_{iJKl} E_{pQM} \xi_p^N \xi_l^N A_{KQ}(\vec{\xi}^N)}{\partial D(\vec{\xi}^N) / \partial \xi_3} b_M(\vec{x}') e^{-i\vec{\xi}^M \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx_1 dx_2.$$

На основе преобразований, подобных [26] для случая чисто упругого материала, в плоскости трещины компоненты напряжений и электрической индукции можно представить в виде

$$\Sigma_{iJ}(x_1, x_2, 0) = \frac{i}{4} \sum_{p,q} b_M^{(p,q)} \int_0^{2\pi} \sum_{N=1}^4 F_{iJM}(\eta_1/a, \eta_2/a, \xi_3^N(\eta_1/a, \eta_2/a)) \times e^{i(p-q)\varphi} \frac{\partial^2}{\partial(\vec{\eta} \cdot \vec{y})^2} [K^{(p,q)}(\vec{\eta} \cdot \vec{y}) - K^{(p+1,q+1)}(\vec{\eta} \cdot \vec{y})] d\varphi; \quad (14)$$

$$K^{(p,q)}(\vec{\eta} \cdot \vec{y}) = \sum_{m=0}^p \sum_{n=0}^q (-1)^{(m-n)/2} C_p^m C_q^n C_{m+n}^{(m+n)/2} \left(\frac{1 - (\vec{\eta} \cdot \vec{y})^2}{4}\right)^{(m+n)/2} (\vec{\eta} \cdot \vec{y})^{p+q-m-n};$$

$$F_{iJM}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = E_{iJKl} E_{pQM} \xi_p^N \xi_l^N \frac{A_{KQ}(\vec{\xi}^N)}{\partial D(\vec{\xi}^N) / \partial \xi_3}, \quad (15)$$

где $m+n$ — целое четное число; $\eta_1 = \cos \varphi$; $\eta_2 = \sin \varphi$; $y_1 = x_1/a$, $y_2 = x_2/a$; $y = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}$; C_n^m — биномиальные коэффициенты. Правая часть уравнений (14) является полиномом степени $p+q$, когда $|y| < 1$ (внутри круговой трещины). Приравнивая коэффициенты при подобных членах (аналогично случаю чисто упругого материала [26]), учитывая выражения (15) с помощью выбора неизвестных компонентов $b_M^{(p,q)}$ ($M=1, 2, 3, 4$), можно удовлетворить граничные условия задачи при заданном силовой нагрузке и нормальной компоненте электрической индукции полиномиального вида.

Рассмотрим случай однородной силовой и электрической нагрузок в ортотропном электроупругом материале. Тогда

$$\Sigma_{iJ}(\vec{x}) = \left(\frac{-i}{4}\right) \int_0^{2\pi} \sum_{N=1}^4 F_{iJM}(\eta_1/a, \eta_2/a, \xi_3^N(\eta_1/a, \eta_2/a)) b_M^{(0,0)} d\varphi,$$

где функция $F_{iJM}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ определяется согласно формулам (15).

Из анализа асимптотических выражений компонент напряжений и электрической индукции в плоскости трещины приходим к выражениям коэффициентов интенсивности напряжений и электрической индукции K_{iJ} :

$$k_{iJ} = i\sqrt{\pi a} (x_1^2/a^4 + x_2^2/a^4)^{-1/4} \times \\ \times \sum_{N=1}^4 F_{iJM}(x_1/a^2, x_2/a^2, \xi_3^N(x_1/a^2, x_2/a^2)) b_M^{(0,0)};$$

$$K_I = k_{33}; K_{II} = k_{31}n_1 + k_{32}n_2; K_{III} = k_{31}(-n_2) + k_{32}n_1; K_{IV} = K_D = k_{34}. \quad (16)$$

Компоненты вектора нормали для круговой трещины имеют вид

$$n_1 = (x_1/a^2)/(x_1^2/a^4 + x_2^2/a^4)^{1/2}, \quad n_2 = (x_2/a^2)/(x_1^2/a^4 + x_2^2/a^4)^{1/2}.$$

Воспользовавшись при вычислениях одномерных интегралов методом квадратур Гаусса и удовлетворив граничные условия, находим неизвестные значения скачков перемещений и электрического потенциала на двусторонней поверхности круговой трещины.

Для апробации используемого подхода рассмотрим задачу о круговой трещине в трансверсально-изотропной электроупругой среде, расположенной в плоскости, перпендикулярной оси симметрии материала, при известных значениях основного поля $\sigma_{33}^0 \neq 0$, $\sigma_{13}^0 \neq 0$, $D_z^0 = 0$ в электроупругом пространстве. Согласно результатам [14, 15] в этом случае коэффициент интенсивности напряжения (КИН) определяются с помощью аналитических выражений:

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (P_0 \sqrt{a}); \quad K_{II} = \frac{4}{(2-\nu_{PIEZO})\sqrt{\pi}} (\sigma_{10}^0 \sqrt{a}) \cos \varphi; \\ K_{III} = \frac{-4(1-\nu_{PIEZO})}{(2-\nu_{PIEZO})\sqrt{\pi}} (\sigma_{10}^0 \sqrt{a}) \sin \varphi, \quad (17)$$

где значение ν_{PIEZO} для пьезоэлектрических трансверсально-изотропных материалов зависит специальным образом от электроупругих постоянных материалов [14]. Согласно проведенным исследованиям для пьезоэлектрических материалов PZT-4, PХЕ-5, PZT-7A, ВаTiO3, PZT-5H, свойства которых взяты из работ [1, 9, 12, 17], получаем следующие значения ν_{PIEZO} : 0,48513; 0,48815; 0,47324; 0,34369; 0,7867. Для апробации развиваемого подхода коэффициенты интенсивности напряжений вычислялись как по формулам (16), так и по явным выражениям (17). При расчетах на основе (16) применялись квадратурные формулы Гаусса по 24 узлам. Расчеты пока-

зали совпадение результатов до семи значащих чисел во всем диапазоне изменения угла φ и для всех пяти различных пьезоэлектрических материалов.

Другим частным случаем рассматриваемой задачи, выбранным для апробации вычислительного алгоритма, был случай расположения плоской круговой трещины в чисто упругом ортотропном материале (в плоскости упругой симметрии), для которого проводились сравнения с данными [16]. Для этого при вычислениях на основе развиваемого подхода значения пяти пьезомодулей и величины трех диэлектрических проницаемостей полагались близкими к нулевым значениям (при расчетах они получались умножением исходных значений этих величин на 10^{-10}). В результате проведенных исследований получено совпадение результатов вычислений для КИН K_I , K_{II} , K_{III} до шести значащих чисел, полученных с помощью применения функции Грина для задачи теории упругости (для чисто упругой ортотропной среды) и функции Грина для задачи электроупругости (с обнуленными электрическими свойствами).

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Рассмотрим ортотропный пьезоэлектрический материал $Ba_2NaNb_5O_{15}$, упругие и электрические свойства которого содержат 17 независимых постоянных, значения которых приведены в работе [3]. Полагаем, что круговая трещина расположена в плоскости xu пьезоэлектрического материала $Ba_2NaNb_5O_{15}$. Также при расчетах воспользуемся упругими свойствами двух стеклопластиков (ортогонально-армированный 2:1 и СТЭТ), которые являются ортотропными материалами; их данные приведены в монографии [2 с. 64]. Распределение КИН K_I при постоянном давлении P_0 на поверхности круговой трещины показано на рис. 1, распределение КИН K_{II} , K_{III} вдоль фронта (границы) круговой трещины при сдвиге σ_{yz}^0 в электроупругом материале — на рис. 2, 3. Кривые 1, 2, 3 соответствуют материалам $Ba_2NaNb_5O_{15}$: ортогонально-армированному стеклопластику 2:1 и стеклопластику СТЭТ соответственно. Видно, что наибольшие значения коэффициентов интенсивности напряжений K_I достигаются на фронте круговой трещины для ортогонально-армированного стеклопластика 2:1. При этом наиболее опасным является направление развития статической трещины при постоянном давлении на поверхности трещины вдоль оси $0y$, в то время, как для стеклопластика СТЭТ более опасным направлением является направление вдоль оси $0x$. Максимальные значения КИН K_{II} достигаются на фронте трещины вдоль оси $0y$ для всех расчетных случаев. При этом для наибольшие значения КИН K_{II} имеем для ортогонально-армированного стеклопластика 2:1. Максимальные значения КИН K_{III} для трех расчетных случаев при сдвиге σ_{yz}^0 получаем для электроупругого ортотропного материала $Ba_2NaNb_5O_{15}$, которые достигаются на фронте круговой трещины в направлении оси $0x$. В то же время для ортогонально-армированного 2:1 и СТЭТ стеклопластиков максимальные значения КИН K_{III} , которые уступают значениям для материала $Ba_2NaNb_5O_{15}$, достигаются в точках фронта круговой трещины, не лежащих на координатных осях $0x$ или $0y$.

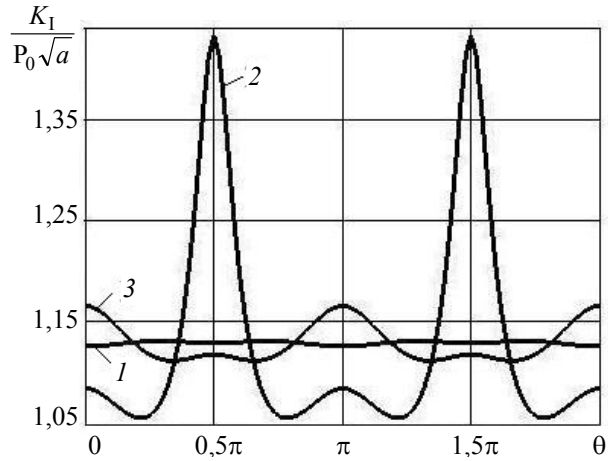


Рис. 1. Распределение КИН K_I вдоль фронта круговой трещины

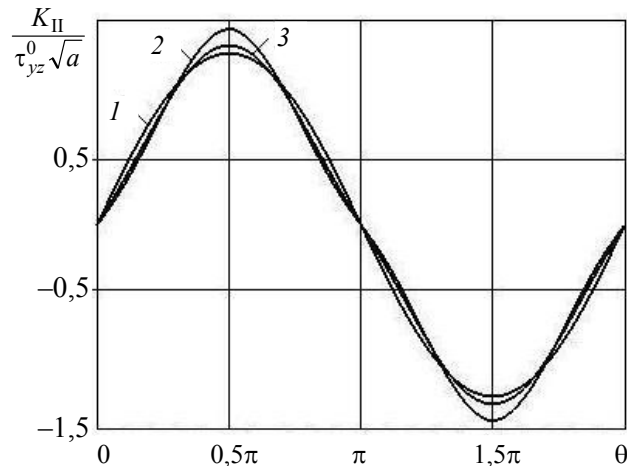


Рис. 2. Распределение КИН K_{II} вдоль фронта круговой трещины

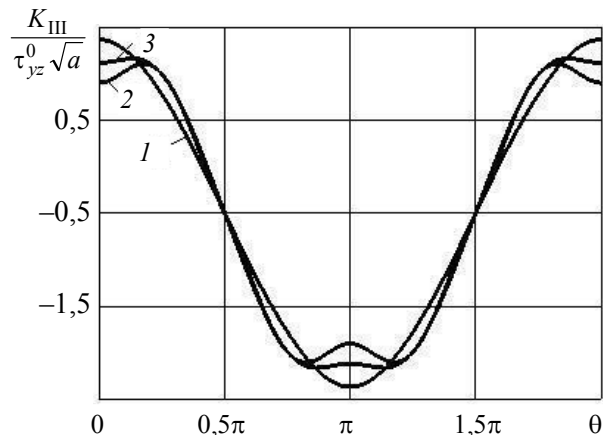


Рис. 3. Распределение КИН K_{III} вдоль фронта круговой трещины

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на основе математической модели, учитывающей связанность силовых и электрических полей в пьезоэлектрическом материале, исследовано

напряженное состояние в ортотропной электроупругой среде с круговой трещиной. Изучено распределение коэффициентов интенсивности напряжений вдоль фронта трещины, расположенной в плоскости симметрии материала при постоянном давлении на поверхности трещины, а также в случае сдвига в материале.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринченко В.Т.* Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. — К.: Наук. думка, 1989. — 279 с.
2. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. — М.: Наука, 1977. — 415 с.
3. *Партон В.З.* Электроупругость пьезокерамических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. — М.: Наука, 1988. — 472 с.
4. *Шульга М.О.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин / М.О. Шульга, В.Л. Карлаш. — К.: Наук. думка. — 2008. — 270 с.
5. *Chen W.Q.* 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium / W.Q. Chen, C.W. Lim // *Int. J. Fract.* — 2005. — **131**, N 3. — P. 231–246.
6. *Chen W.Q.* Exact three-dimensional solutions of laminated orthotropic piezoelectric rectangular plates featuring interlaminar bonding imperfections modeled by a general spring layer / W.Q. Chen, J.B. Cai, G.R. Ye, Y.F. Wang // *International Journal of Solids and Structures.* — 2004. — **41**, N 18–19. — P. 5247–5263.
7. *Chiang C.R.* The nature of stress and electric-displacement concentrations around a strongly oblate cavity in a transversely isotropic piezoelectric material / C.R. Chiang, G.J. Weng // *Int. J. Fract.* 2005. — **134**, N 3–4. — P. 319–337.
8. *Dai L.* Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids / L. Dai, W. Guo, X. Wang // *Int. J. Solids and Struct.* — 2006. — **43**, N 6. — P. 1818–1831.
9. *Dunn M.L.* Electroelastic Field Concentrations In and Around Inhomogeneities In Piezoelectric Solids / M.L. Dunn, M. Taya // *J. Appl. Mech.* — 1994. — **61**, N 4. — P. 474–475.
10. *Kaloerov S.A.* Problem of Electromagnetoviscoelasticity for Multiply Connected Plates / S.A. Kaloerov, A.A. Samodurov // *International Applied Mechanics.* — 2015. — **51**, N 6. — P. 623–639.
11. *Kaloerov S.A.* Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media / S.A. Kaloerov // *Int. Appl. Mech.* — 2007. — **43**, N 6. — P. 631–637.
12. *Karnaukhov V.G.* Forced Resonant Vibrations and Self-Heating of Solids of Revolution Made of a Viscoelastic Piezoelectric Material / V.G. Karnaukhov, V.I. Kozlov, A.V. Zavgorodnii, I.N. Umrykhin // *International Applied Mechanics.* — 2015. — **51**, N 6. — P. 614–622.
13. *Kirilyuk V.S.* Elastic state of a transversely isotropic piezoelectric body with an arbitrarily oriented elliptic crack / V.S. Kirilyuk // *Int. Appl. Mech.* — 2008. — **44**, N 2. — P. 150–157.
14. *Kirilyuk V.S.* On the stress state of a piezoceramic body with a flat crack under symmetric loads / V.S. Kirilyuk // *Int. Appl. Mech.* — 2005. — **41**, N 11. — P. 1263–1271.
15. *Kirilyuk V.S.* Stress state of a piezoelectric ceramic body with a plane crack under antisymmetric loads / V.S. Kirilyuk // *Int. Appl. Mech.* — 2006. — **42**, N 2. — P. 152–161.

16. *Kirilyuk V.S.* Stress state of an elastic orthotropic medium with elliptical crack under tension and shear / V.S. Kirilyuk // *International Applied Mechanics*. — 2005. — **41**, N 4. — P. 358–366.
17. *Kirilyuk V.S.* Thermostressed state of a piezoelectric body with a plane crack under symmetric thermal load / V.S. Kirilyuk // *International Applied Mechanics*. — 2008. — **44**, N 3. — P. 320–330.
18. *Levchenko V.V.* Effect of Boundary Conditions on the Natural Frequencies and Vibration Modes of Piezoelectric Plates with Radially Cut Electrodes / V.V. Levchenko // *International Applied Mechanics*. — 2015. — **51**, N 2. — P. 187–195.
19. *Lin S.* Electroelastic analysis of a penny-shaped crack in a piezoelectric ceramic under mode I loading / S. Lin, F. Narita, Y. Shindo // *Mech. Res. Com.* — 2003. — **30**, N 4. — P. 371–386.
20. *Podil'chuk Yu.N.* Representation of the general solution of statics equations of the electroelasticity of a transversally isotropic piezoceramic body in terms of harmonic functions / Yu.N. Podil'chuk // *International Applied Mechanics*. — 1998. — **34**, N 7. — P. 623–628.
21. *Podil'chuk Yu.N.* Electroelastic equilibrium of transversally isotropic, piezoceramic media containing cavities, inclusions, and cracks / Yu.N. Podil'chuk // *International Applied Mechanics*. — 1998. — **34**, N 10. — P. 1023–1034
22. *Shang F.* Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part 1: Analytical development / F. Shang, M. Kuna, T. Kitamura // *Theor. Appl. Fract. Mech.* — 2003. — **40**, N 3. — P. 237–246.
23. *Sladek J.* Crack analyses in porous piezoelectric brittle materials by the SBFEM / J. Sladek, V. Sladek, S. Krahulec, C. Song // *Engineering Fracture Mechanics*. — 2016. — **160**. — P. 78–94.
24. *Wang Y.J.* The anti-plane solution for the edge cracks originating from an arbitrary hole in a piezoelectric material / Y.J. Wang, C.F. Gao, H.P. Song // *Mechanics Research Communications*. — 2015. — **65**. — P. 17–23.
25. *Wang Z.K.* The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media / Z.K. Wang, B.L. Zheng // *Int. J. Solids Structures*. — 1995. — **32**, N 1. — P. 105–115.
26. *Willis J.R.* The stress field around an elliptical crack in an anisotropic elastic medium / J.R. Willis // *Int. J. Eng. Sci.* — 1968. — **6**, N 5. — P. 253–263.
27. *Zhang T.Y.* Fracture behaviors of piezoelectric materials / T.Y. Zhang, C.F. Gao // *Theor. Appl. Fract. Mech.* — 2004. — **41**, N 1–3. — P. 339–379.
28. *Zhao M.H.* Singularity analysis of planar cracks in three-dimensional piezoelectric semiconductors via extended displacement discontinuity boundary integral equation method / M.H. Zhao, Y. Li, Y. Yan, C.Y. Fan // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2016. — **67**. — P. 115–125.
29. *Zhao M.H.* Extended displacement discontinuity method for analysis of cracks in 2D piezoelectric semiconductors / M.H. Zhao, Y.B. Pan, C.Y. Fan, G.T. Xu // *International Journal of Solids and Structures*. — 2016. — **94–95**. — P. 50–59.
30. *Zhou Y.* Semi-analytical solution for orthotropic piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections / Y. Zhou, W.Q. Chen, C.F. Lu // *Composite Structures*. — 2010. — **92**, N 4. — P. 1009–1018.

Надійшла 27.07.2017