

## АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ БИФУРКАЦИОННОЙ КАРТИНЫ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

В.А. ГРОМОВ

**Аннотация.** В рамках нелинейного обобщенного метода Канторовича предложен новый подход к локализации и анализу особых точек решения нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана: решение нелинейной краевой задачи сводится к решению последовательности нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Одномерные краевые задачи решаются с помощью метода сведения нелинейной краевой задачи к эквивалентной задаче Коши, в процессе реализации которого строится матрица Фреше, вырожденность которой является необходимым и достаточным условием существования ветвления. Численное построение уравнений разветвления позволяет построить ветви, исходящие из точки бифуркации. Вычислительный эксперимент позволил установить бифуркационную картину для случая уравнения Кармана с обобщенной правой частью: решение характеризуются существованием ветвей первичного и вторичного ветвлений.

**Ключевые слова:** уравнения Кармана, ветвление решений нелинейных краевых задач для уравнений в частных производных, нелинейный обобщенный метод Канторовича, первичное ветвление, вторичное ветвление.

### ВВЕДЕНИЕ

Существенная нелинейность уравнений Кармана вместе с наблюдаемой в большом количестве приложений множественностью возможных решений обуславливает интерес к созданию алгоритма, позволяющего построить бифуркационную картину для нелинейной краевой задачи для указанных уравнений.

Отметим, прежде всего, ряд работ, устанавливающих возможность ветвления в уравнениях Кармана. В работе Рао [1] рассматриваются уравнения Маргерра–Кармана и даются условия существования нетривиальных решений этих уравнений. Работа [2] посвящена исследованию бифуркаций, сохраняющих и нарушающих симметрию, для уравнений Кармана. Здесь подавляющее количество исследований связано с нахождением бифуркаций решения, близкого к тривиальному.

В работах М. Губинелли [3] в рамках алгебраического формализма с использованием восходящего еще к Т. Лионсу понятию грубых путей (rough paths) [4, 5] вводится понятие разветвляющихся грубых путей (ramifying rough paths), которое позволяет построить общую схему установления существования ветвления. Отметим, также, работу [6], в которой устанавливаются необходимые и достаточные условия неединственности решения для нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Переходя к рассмотрению численных методов построения ветвей решения, исходящих из точки бифуркации, отметим, что здесь магистральным направлением является применение той или иной аппроксимации с последующим решением конечномерной нелинейной задачи на собственные значения в точках неединственности решения: полученные в ходе решения этой задачи собственные функции используются для получения ветвей решения, связанных с рассматриваемой точкой неединственности. Так, в работе [7] данный подход реализован с помощью конечноэлементной аппроксимации, в работе [8] — с использованием конечноразностной аппроксимации; в работах [9–12] используется разложение неизвестных функций задачи в ряд Фурье.

Существенным недостатком этого подхода является зависимость результатов от порядка аппроксимации вместе со сложностью решения возникающих в рамках этого подхода систем нелинейных алгебраических уравнений высокой размерности.

В настоящей работе предлагается подход к получению бифуркационной картины, основанный на численном построении уравнений разветвления [13], причем размерность уравнений разветвления определяется исключительно порядком вырожденности матрицы Фреше в соответствующей точке бифуркации.

### НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Задача формулируется на прямоугольной области  $\Omega = \{x_1^{\min} \leq x_1 \leq x_1^{\max}; x_2^{\min} \leq x_2 \leq x_2^{\max}\} \subset R^2$ , ограниченной кусочно-постоянным контуром  $\Gamma \equiv \partial\Omega = \bigcup_{i=1,2} \{x_i = x_i^{\min}, x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}\} \cup \{x_i = x_i^{\max}, x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}\}$ ,  $j = (i+1) \bmod 2$ .

Система уравнений в частных производных записывается в виде:

$$\begin{aligned} a_1 \nabla^4 u_1 + L(u_1, u_2) - \nabla_k^2 u_2 &= \lambda; \\ a_2 \nabla^4 u_2 - \frac{1}{2} L(u_1, u_1) - \nabla_k^2 u_1 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_k^2 \alpha &\equiv k_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + k_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2}; \\ L(\alpha, \beta) &\equiv \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2}. \end{aligned}$$

Здесь и далее  $X = (x_1, x_2)$ ;  $U \equiv U(X) \equiv (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))$  — вектор неизвестных функций задачи;  $\lambda$  — параметр задачи;  $k_1, k_2, a_1, a_2$  — некоторые константы. Для построения краевой задачи уравнения (1) должны быть дополнены условиями на границе  $\Gamma$ :

$$S(U, \lambda)|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Среди особых точек решения данной нелинейной краевой задачи можно выделить точки бифуркации (ветвления), в которых исходная ветвь решения пересекается с другой ветвью, и предельные точки, для которых в окрестности соответствующего в особой точке значения параметра нагрузки  $\lambda = \lambda^*$  либо не существует ни одного решения, либо существуют два решения, которые имеют общую касательную при  $\lambda = \lambda^*$ . Также выделяется комбинированный случай — симметричная точка бифуркации — для которой одна из ответвляющихся ветвей имеет горизонтальную касательную.

Обобщенное решение рассматриваемой нелинейной краевой задачи дается парой функций  $U = (u_1, u_2)$ ,  $u_1 \in W_2^2(\Omega)$ ,  $u_2 \in H_0(\Omega)$ , удовлетворяющих интегральным тождествам:

$$a_1 \iint_{\Omega} K(u_1, v_1) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} [\nabla_k^2 u_2 v_1 - Q_1(u_1, u_2, v_1) - \lambda v_1] dx_1 dx_2;$$

$$a_2 \iint_{\Omega} K(u_2, v_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} [\nabla_k^2 v_2 u_1 - Q_2(u_1, v_2)] dx_1 dx_2$$

для пары произвольных функций  $v_1 \in W_2^2(\Omega)$ ,  $v_2 \in H_0(\Omega)$ , где

$$K(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} - \mu \left[ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \right] +$$

$$+ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} + 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2};$$

$$Q_1(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \left[ \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} + \left[ \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x_1},$$

$$Q_2(\alpha, \beta) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2};$$

$H_0(\Omega)$  — замыкание пространства функций  $\left\{ \alpha \in W_2^2(\Omega), \alpha|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \alpha}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \right\}$

в норме  $\iint_{\Omega} K(\alpha, \alpha) dx_1 dx_2$ ;  $\frac{\partial \cdot}{\partial n}$  — производная по направлению, нормальному

к контуру  $\Gamma$ ;  $\mu$  — параметр задачи.

## НЕЛИНЕЙНЫЙ ОБОБЩЁННЫЙ МЕТОД КАНТОРОВИЧА (НОМК)

Для отыскания решения нелинейной краевой задачи (1), (2) строится последовательность приближений к ее обобщенному решению с помощью представления вектора неизвестных функций задачи на итерациях алгоритма в виде [14]:

$$U(x_1, x_2) = \{u_j(x_1, x_2)\} = \left\{ h_j^{(i-1)}(x_1) g_j^{(i)}(x_2) \right\}_{j=1,2}, \quad i \rightarrow \infty;$$

$$h_1^{(i-1)}(x_1)g_1^{(i)}(x_2) \in W_2^2(\Omega), \quad h_2^{(i-1)}(x_1)g_2^{(i)}(x_2) \in H_0(\Omega), \quad (3)$$

Для нечетных итераций функции  $h_j^{(i-1)}(x_1)$  вычислены на предыдущей  $i-1$ -й итерации, и уравнения разрешаются относительно функций  $g_j^{(i)}(x_2)$ ; произвольные функции  $v_j$  представляются в виде  $v_j = h_j^{(i-1)}(x_1)\varphi_j(x_2)$ , где  $\varphi_j(x_2)$  — произвольные функции переменной  $x_2$ . Аналогично для четных итераций известны функции  $g_j^{(i-1)}(x_2)$  и уравнения разрешаются относительно  $h_j^{(i)}(x_1)$  с представлением функций  $v_j$  в виде  $v_j = \psi_j(x_1)g_j^{(i-1)}(x_2)$ , где  $\psi_j(x_1)$  — произвольные функции переменной  $x_1$ .

Представление (3) позволяет заменить разрешающие соотношения нелинейной краевой задачи (1), (2) последовательностью систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dh_j}{dx_1} = f_j^{x_1}(h(x_1), a^{x_2}(x_1), \lambda), \quad j = \overline{1,8}; \quad (4)$$

$$\frac{dg_j}{dx_2} = f_j^{x_2}(g(x_2), a^{x_1}(x_2), \lambda), \quad j = \overline{1,8}. \quad (5)$$

Здесь и далее для краткости опущен верхний индекс, соответствующий номеру итерации. Векторы  $h(x_1)$  и  $g(x_2)$  определяются как

$$h(x_1) = \{h_1(x_1), h_1'(x_1), h_1''(x_1), h_1'''(x_1), h_2(x_1), h_2'(x_1), h_2''(x_1), h_2'''(x_1)\};$$

$$g(x_2) = \{g_1(x_2), g_1'(x_2), g_1''(x_2), g_1'''(x_2), g_2(x_2), g_2'(x_2), g_2''(x_2), g_2'''(x_2)\}.$$

Компоненты векторов  $a^{x_1}(x_2)$ ,  $a^{x_2}(x_1)$  представляют собой определенные интегралы от компонент вектор-функций  $h(x_1)$  и  $g(x_2)$  соответственно. Каждая из задач (4), (5) должна быть дополнена граничными условиями на концах промежутков интегрирования, которые следуют из граничных условий (2), сформулированных на контуре  $\Gamma$ .

Рассматриваемый алгоритм предполагает организацию итерационного процесса, в рамках которого подсистемы (4), (5) вычисляются отдельно, на последовательных итерациях, при этом в качестве подынтегральных функций выбираются приближения, полученные на предыдущей итерации. Тем самым решение двумерной нелинейной краевой задачи сводится к отысканию решений последовательности нелинейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений: таким образом, определённый итерационный процесс аналогичен обобщённому методу Канторовича [15].

## МЕТОД СВЕДЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ К ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ

Для отыскания решения указанных нелинейных одномерных краевых задач использовался метод сведения нелинейной краевой задачи к эквивалентной задаче Коши (метод Ньютона).

Для описания указанного метода представим задачи (6),(7) в векторной форме:

$$\frac{dY}{dx} = F(Y, \lambda), \quad x \in [a; b], \quad (6)$$

$$P = 0, \quad (7)$$

где  $Y(x) = \{y_1(x), \dots, y_N(x)\}$  — неизвестная вектор-функция краевой задачи;  $F(Y, \lambda) = \{f_1(Y, \lambda), \dots, f_N(Y, \lambda)\}$  — вектор-функция правых частей системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений;  $P = \{P_1, P_2\}$  — вектор граничных условий, где  $P_1$  соответствует граничным условиям, удовлетворяемым в начале промежутка интегрирования,  $P_2$  — в конце;  $\lambda$  — параметр.

Для интегрирования задачи Коши, соответствующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений (6), использовался метод Рунге–Кутты 4-го порядка, который предполагает задание начального вектора  $Y^0 = Y(x_0) = \{y_1(x_0), \dots, y_N(x_0)\}$  в некоторой точке промежутка интегрирования  $x_0 \in [a; b]$ .

Будем полагать, что задача Коши эквивалентна краевой задаче (6), (7), если решение  $Y(x)$  задачи Коши, полученное интегрированием, начиная с начального вектора  $Y^0$ , удовлетворяет граничным условиям (7) рассматриваемой краевой задачи.

Поскольку решение  $Y(x)$  полностью определяется заданным начальным вектором  $Y^0$ , невязки граничных условий  $P$  могут рассматриваться как функции указанного начального вектора:

$$P \equiv P(Y(Y^0), \lambda) \equiv P(Y^0, \lambda) = 0. \quad (8)$$

Вследствие нелинейности оператора  $Y(Y^0)$  решение  $Y(x)$  и вектор граничных условий  $P$  являются нелинейными функциями  $Y^0$ . Вид оператора  $P = P(Y^0, \lambda)$  неизвестен, но существует алгоритм вычисления значений вектора  $P$  по вектору  $Y^0$  и параметру  $\lambda$ . Данный алгоритм представляет собой численное интегрирование задачи Коши из точки  $x_0$  в точки  $x = a$  и  $x = b$ , в которых удовлетворяются краевые условия. Отметим, что построенное таким образом неявно заданное отображение  $P$  является конечномерным, причем его размерность не зависит от способа аппроксимации и определяется лишь порядком уравнений Кармана.

Задача отыскания начального вектора  $Y^0$  для эквивалентной задачи Коши состоит в разрешении векторного уравнения (8), т. е. системы  $N$  неявно заданных нелинейных алгебраических уравнений. Для решения данной задачи использовался метод Ньютона:

$$Y^{0(l+1)} = Y^{0(l)} - J^{-1}P(Y^{0(l)}, \lambda).$$

Здесь  $Y^{0(l)}$  обозначает  $l$ -е приближение к решению;  $J$  — матрица Фреше системы уравнений (8), вычисленная для  $Y^0 = Y^{0(l)}$ :

$$J = \left[ \frac{\partial p_k}{\partial y_j^0} \right]_{Y^0 = Y^0(t)} .$$

Поскольку аналитические выражения для функций  $P(Y^0)$  — невязок граничных условий — не существуют, то используется приближенное представление матрицы Фреше, полученное путем замены частных производных их конечноразностными аналогами:

$$\frac{\partial p_k}{\partial y_j^0} \approx \frac{p_k(y_1^0, \dots, y_j^0 + \Delta y_j^0, \dots, y_N^0) - p_k(y_1^0, \dots, y_j^0, \dots, y_N^0)}{\Delta y_j^0} .$$

Получение начального приближения, близкого к решению, обеспечивается применением метода продолжения по параметру. Вычислительный процесс по этому методу начинается со значений параметра  $\lambda$ , близких к нулю, для которых решение  $Y(X)$  почти линейное и, следовательно, решение соответствующей линейной краевой задачи может рассматриваться как хорошее начальное приближение.

Увеличивая значение параметра  $\lambda_0 + \Delta\lambda$ ,  $\lambda_0 + 2\Delta\lambda$ , ... и применяя рассмотренный выше итерационный процесс при каждом фиксированном значении параметра, можно шаг за шагом построить ветвь решения, при этом в качестве начального приближения выбирается результат экстраполяции по решениям, полученным при предыдущих значениях параметра. Если для полученного таким образом начального приближения сходимость не достигнута, то шаг по параметру уменьшается в два раза («дробится»), после чего итерационный процесс повторяется для нового начального приближения, также получаемого с использованием формулы экстраполяции. Если, напротив, сходимость метода достигнута за малое количество итераций, то шаг движения по параметру может быть удвоен.

Следует отметить, что не только параметр нагружения, но и всякий монотонно меняющийся компонент решения может использоваться в качестве параметра продолжения. Критерием смены параметра является достижение в результате «дробления» величины шага, меньшей некоторого предзаданного значения. В частности, в окрестности предельной точки параметр продолжения обычно меняется на самый быстроменяющийся компонент покомпонентного произведения двух начальных векторов  $Y^0$  для двух одномерных нелинейных краевых задач — (4) и (5). При этом бывший параметр продолжения включается в переменные задачи и подлежит определению с помощью итерационного процесса.

## ЛОКАЛИЗАЦИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК

При реализации метода Ньютона, используемого для решения одномерных нелинейных задач (4) и (5), вычисляются матрицы Фреше  $J_{x_1}$  и  $J_{x_2}$  соответственно, вырожденность которых эквивалентна неединственности решения соответствующих краевых задач [6]:

$$\det J_{x_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Характерный вид зависимости параметр  $\lambda$  — определитель матрицы Фреше вдоль ветви решения показан на рис. 1. Точки  $O$  и  $A$  характеризуются двукратным вырождением, точка  $B$  — однократным.

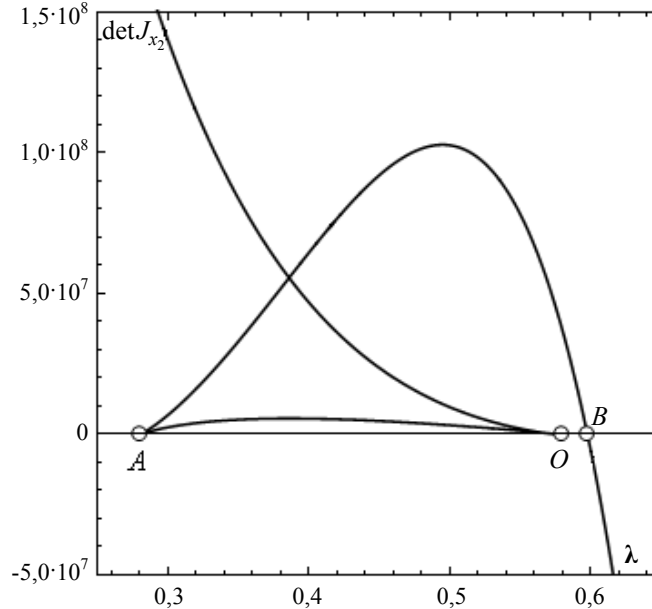


Рис. 1. Характерный вид зависимости: параметр  $\lambda$  — определитель матрицы Фреше вдоль ветви решения; точки  $O$  и  $A$  — двукратное вырождение; точка  $B$  — однократное

Для определения типа особой точки, локализованной с помощью условия (9), рассматривается расширенная матрица Фреше, дополненная столбцом производных «точечных» граничных условий по параметру продолжения,  $J_\lambda$  и множество квадратных матриц  $J_k$ , полученных из  $J_\lambda$  путём удаления  $k$ -го столбца. Тогда в точке бифуркации (в точке ответвления нового решения) выполняется условие  $\text{rank } J = \text{rank } J_k < N, \forall k = \overline{1, N}$ , в предельной точке —  $\text{rank } J < N, \text{rank } J_k = N, \forall k = \overline{1, N}$ .

Указанные условия могут быть записаны в виде, удобном для алгоритмической реализации:

- симметричная точка бифуркации —  $\det J = \det J_k = 0, \forall k = \overline{1, N}$ ;
- предельная точка —  $\det J = 0, \det J_k \neq 0$ .

Проверка этих условий не предполагает существенных дополнительных вычислительных затрат (по сравнению с уже выполненным  $2(N+1)$ -кратным решением задачи Коши, необходимым для построения матриц Фреше).

Порядок вырожденности матрицы  $J$  в особой точке является важной характеристикой при построении уравнений разветвления и анализе бифуркационной картины в целом: указанная величина определяется как разность между размерами матрицы и ее рангом  $\text{corank } J = N - \text{rank } J$ . Для определения порядка вырожденности матрицы вычисляются сингулярные значения

рассматриваемой матрицы, т.е. собственные значения произведения матрицы  $J$  на транспонированную  $J^T$ . В рассматриваемой задаче фиксировались только особые точки с порядком вырожденности  $l=1$  или  $l=2$ . Характерное поведение двух наименьших сингулярных значений (случай однократной вырожденности) показано на рис. 2.

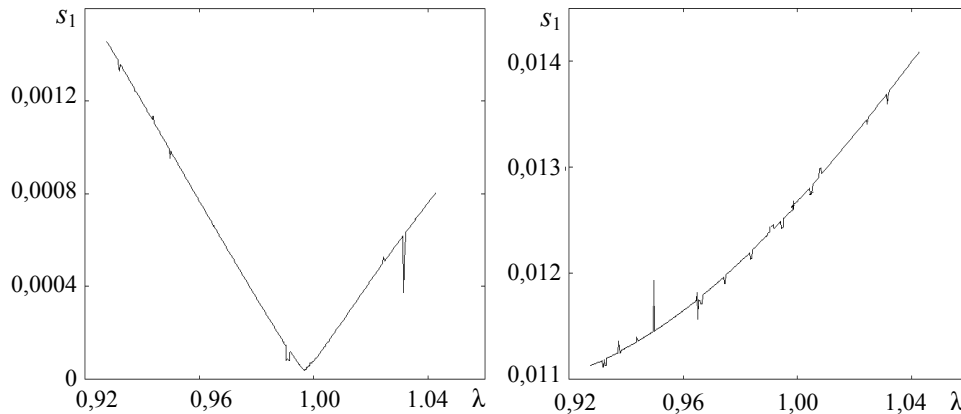


Рис. 2. Характерное поведение двух наименьших сингулярных значений (случай однократной вырожденности)

Формы функций решения, соответствующие ветвям решения, ответвляющиеся в точках бифуркации, могут перестраиваться, либо вдоль одного из координатных направлений, либо вдоль обоих направлений одновременно. Это отражается в вырождении либо одной из матриц Фреше, либо в вырождении обеих матриц одновременно:

- 1)  $\det J_{x_1} = 0, \det J_{x_2} \neq 0$ ;
- 2)  $\det J_{x_1} \neq 0, \det J_{x_2} = 0$ ;
- 3)  $\det J_{x_1} = 0, \det J_{x_2} = 0$ .

## ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАЗВЕТВЛЕНИЯ

Используемый алгоритм позволяет построить малые решения системы (решения, принадлежащие малой окрестности точки бифуркации), ответвляющиеся в рассматриваемой особой точке, и тем самым задать для каждой ветви решения, исходящей из соответствующей точки бифуркации решения нелинейной краевой задачи (6), (7), лежащую на ней точку, которая может быть использована как стартовая позиция для движения (в рамках метода продолжения по параметру) вдоль данной ветви. Здесь осуществляется построение уравнений разветвления для одномерных нелинейных краевых задач, формируемых на последней итерации НОМК; при этом множитель, определяющий вид решения в одном направлении, остается неизменным — таким, каким он был получен на предпоследней итерации алгоритма.

Для отыскания малых решений осуществляется численное построение уравнений разветвления [13], невязки уравнений разветвления представляются как неявно заданные функции их аргументов; соответствующие уравнения являются конечномерными, и их размерность равна порядку вырожденности в соответствующей точке бифуркации — один или два.



Для численного построения уравнений разветвления представим неизвестные величины задачи в виде  $Y = Y^0 + \tilde{Y}^0$ ,  $\lambda = \lambda^* + \tilde{\lambda}$ , где  $(Y^0, \lambda^*)$  — соответственно значение вектора неизвестных величин и значение параметра в точке бифуркации, а  $\tilde{Y}^0$ ,  $\tilde{\lambda}$  — малы, и запишем невязки уравнений в вариациях в виде:

$$\tilde{P}(\tilde{Y}^0, Y^0, \tilde{\lambda}, \lambda^*) = P(\tilde{Y}^0 + Y^0, \tilde{\lambda} + \lambda^*) - P(Y^0, \lambda^*).$$

Ранг матрицы Фреше  $r$  системы (6), (7) в точке бифуркации  $(Y^0, \lambda^*)$  строго меньше ее порядка  $r < N$ ; будем предполагать, что точка бифуркации изолирована, т.е. существует такая ее окрестность, в которой отсутствуют другие особые точки системы. Тогда для малых решений системы используем разложение вида:

$$\begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix} \tilde{\lambda} + \begin{vmatrix} N_1 \\ N_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \det J_{11} \neq 0,$$

$$\tilde{Y}_1 = \{\tilde{y}_j\}, j = \overline{1, r}, \quad \tilde{Y}_2 = \{\tilde{y}_j\}, j = \overline{r+1, N}; \quad C_1 = \{c_k\}, k = \overline{1, r},$$

$$C_2 = \{c_k\}, k = \overline{r+1, N};$$

$$J_{11} = |j_{kj}|, k, j = \overline{1, r}, \quad J_{12} = |j_{kj}|, k = \overline{1, r}, j = \overline{r+1, N},$$

$$J_{21} = |j_{kj}|, k = \overline{r+1, N}, j = \overline{1, r}, \quad J_{22} = |j_{kj}|, k, j = \overline{r+1, N};$$

матрица  $J = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix}$ ;  $N_1, N_2$  — высшие члены разложения, порядка  $o(\|\tilde{Y}^0\| + \|\tilde{\lambda}\|)$ .

Будем предполагать, что ненулевой минор порядка  $r$  матрицы  $J$  занимает ее верхний левый угол.

Произведя необходимые алгебраические преобразования [13], представим уравнения разветвления в виде

$$R(\tilde{Y}_2) = (J_{21}J_{11}^{-1}C_1 - C_2)\tilde{\lambda} + J_{21}J_{11}^{-1}N_1 - N_2 = 0. \quad (10)$$

Соотношения (10) представляют собой систему неявно заданных алгебраических уравнений относительно  $\tilde{Y}_2$ , в котором отсутствуют члены, линейные по  $\tilde{Y}$ . В монографии М.М. Вайнберга и В.А. Треногина доказана теорема, утверждающая, что количество малых решений данной системы равно количеству малых решений задачи (6), (7), ответвляющихся в исследуемой точке бифуркации.

В качестве иллюстрации на рис. 3 в координатах  $\tilde{\lambda}$  —  $\frac{\|u_1(x_1, x_2)\|_{L_2}}{\|u_1(x_1, x_2)\|_C}$  представлен характерный вид малых решений в окрестности точки бифуркации. Выбор системы координат обуславливается

тем, что, с одной стороны, выбранная система координат не зависит от фактической амплитуды, а с другой — в данных координатах различные малые решения наиболее четко отличимы друг от друга.

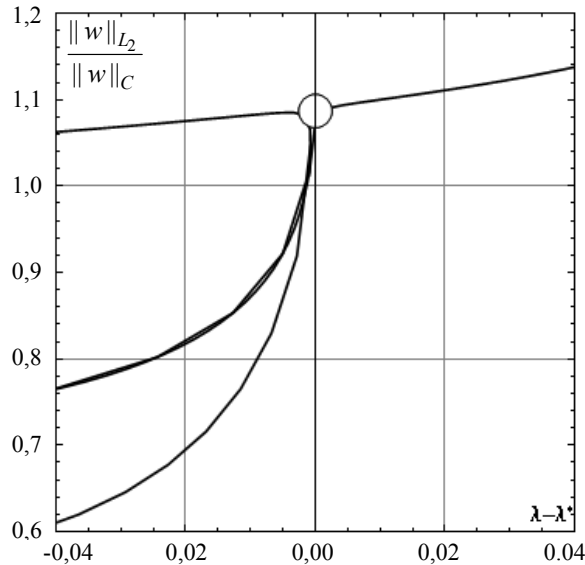


Рис. 3. Характерное поведение ветвей решения в окрестности точки бифуркации

### РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ОТЫСКИВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ РАЗВЕТВЛЕНИЯ

Для обеспечения устойчивости вычислительного процесса предлагается немного отступить от точки бифуркации и искать решения на гиперсфере малого радиуса с центром в этой точке (своеобразный способ регуляризации вычислительного процесса). При этом параметр, служивший параметром продолжения при движении вдоль ветви, на которой была зафиксирована точка бифуркации, вводится в переменные и определяется с использованием вычислительного процесса [16].

В предположении изолированности рассматриваемой точки бифуркации ответвляющиеся в ней решения уравнений разветвления представляют собой непрерывные кривые в пространстве  $R^{N-r+1}$ . Для формализации понятия малости решения введем в рассмотрение гиперсферу  $G_{N-r+1}((Y^0, \lambda^*), \eta)$  с центром в точке  $(Y^0, \lambda^*)$  и радиусом  $\eta$ , и в дальнейшем ограничимся рассмотрением уравнений разветвления внутри данной сферы. Представление ветвей решения в координатах  $\tilde{\lambda} = \frac{\|u_1(x_1, x_2)\|_{L_2}}{\|u_1(x_1, x_2)\|_C}$  позволяет определить радиус  $\eta$ : целесообразно выбирать  $\eta$  порядка  $10^{-1}$  от величины отношения  $\frac{\|u_1(x_1, x_2)\|_{L_2}}{\|u_1(x_1, x_2)\|_C}$  на ветви, на которой была зафиксирована исследуемая точка бифуркации.

Выбирая радиус указанной сферы достаточно малым, можно добиться того, что малые решения уравнения разветвления пересекают ее только один раз, а графики решений, ответвляющихся в других точках бифуркации, вообще не пересекают. Это приводит к необходимости решения системы уравнений (10) на гиперсфере  $G_{N-r+1}((Y^0, \lambda^*), \eta)$ , определяемой соотношением

$$R_{add}(\tilde{Y}) \equiv \left\| (\tilde{Y}^0, \tilde{Y}^0) + (\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}) \right\|^2 - \eta^2 = 0.$$

Таким образом, задача отыскания решений уравнения разветвления сводится к отысканию решения неявно заданной системы нелинейных уравнений

$$\bar{Y}_2 \equiv (\tilde{Y}_2, \tilde{\lambda}) \rightarrow \bar{R} \equiv (R, R_{add}), \quad (11)$$

размерность которой мала и определяется порядком вырожденности в соответствующей точке бифуркации  $\dim \bar{R} = \text{corank } J|_{(Y^0, \lambda^*)} + 1 = \{2, 3\}$ . Блок-схема алгоритма отыскания решения уравнений разветвления показана на рис. 4.

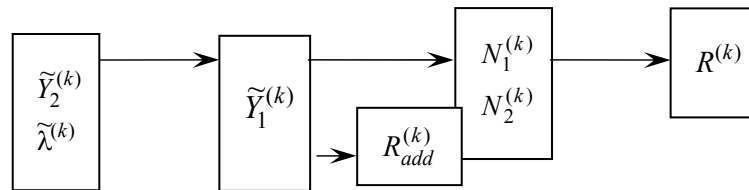


Рис. 4. Блок-схема алгоритма отыскания решений уравнений разветвления

Для локализации малых решений, ответвляющиеся в точке бифуркации, многообразие возможных значений векторов  $\bar{Y}_2 \equiv (\tilde{Y}_2, \tilde{\lambda})$  покрывается сеткой достаточно малого шага, и в каждом узле сетки вычисляется значение невязок (11). Для уточнения локализованных таким образом решений использовался тот же нелинейный обобщенный метод Канторовича.

Окончательно алгоритм анализа структуры ветвления нелинейной краевой задачи может быть описан следующим образом:

1. Исходная двумерная нелинейная краевая задача сводится к последовательности одномерных.
2. Каждая из одномерных краевых задач разрешается путем сведения к эквивалентной задаче Коши путем нахождения вектора  $Y^0$ , обеспечивающего удовлетворение условия  $S(Y^0) = 0$ .
3. Для построения ветви решения (и обеспечения хорошего начального приближения для НОМК) используется продолжение по параметру.
4. В случае фиксации предельной точки  $(Y^0, \lambda^*)$  ( $\det J_{x_i} = 0$ ,  $\det J_{x_i, k} \neq 0 \quad \forall k = \overline{1, N}, i = 1, 2$ ) происходит смена ведущего параметра.

5. В случае фиксации точки бифуркации  $(Y^0, \lambda^*)$  (определители  $\det J_{x_i} = \det J_{x_i, k} = 0, \forall k = \overline{1, N}, i = 1, 2$ ) осуществляется локализация областей пересечения закритических ветвей, исходящих из данной точки бифуркации с окружающей ее сферой малого радиуса с помощью покрытия многообразия возможных значений векторов решения сеткой достаточно малого радиуса. Полученные таким образом точки лежат на закритических ветвях и были использованы как начальные точки для построения этих ветвей с помощью метода продолжения по параметру.

### СТРУКТУРА ВЕТВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

Метод построения бифуркационной картины для анализа нелинейной краевой задачи уравнений Кармана (1), описывающей поведение замкнутой цилиндрической оболочки, подвергнутой действию равномерного внешнего давления ( $\lambda = \text{const}$ ). Соответственно область  $\Omega$  представляет собой замкнутый круговой цилиндр  $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq 4; 0 \leq x_2 \leq 2\pi\}$ ,  $a_1 = 0, 1$ ;  $a_2 = -1$ ;  $k_1 = 150$ ;  $k_2 = 0$ ;  $\mu = 0, 3$ . В рассматриваемом случае структура решения прямой задачи (рис. 5) включает в себя следующие элементы (здесь ветви описываются в терминах «норма решения — значение параметра  $\lambda$ »: исходящие из нуля значений параметра ветвь решения с близкими к нулю нормами решений, ветви первичного ветвления, которым соответствуют регулярные в направлении  $x_2$  решения, и ветви вторичного ветвления, которым соответствуют решения, локализованные в направлении  $x_2$ . Ветви вторичного ветвления соединяют между собой ветви первичного ветвления, которым соответствуют решения с различными номерами главных гармоник разложения функции в ряд Фурье (в направлении  $x_2$ ; в направлении  $x_1$  номер главной гармоники равен 1 для всех ветвей первичного ветвления).

Здесь каждый последующий тип ветви характеризуется решениями с меньшим количеством симметрий (в направлении  $x_2$ ) в сравнении с предыдущим. Так, решения, соответствующие исходящей из нуля ветви, характеризуются бесконечным количеством симметрий, группа симметрий для решений ветвей первичного ветвления конечна и состоит из поворотов на угол  $\frac{2\pi}{n}$  (здесь  $n$  — номер главной гармоники решения в направлении  $x_2$ ), локальные формы характеризуются либо полным отсутствием симметрий, либо (редкие исключения) одной симметрией; в последнем случае наблюдаются ветви третичного ветвления, для которых указанная симметрия утрачивается.

Все зафиксированные на ветвях особые точки имеют однократное вырождение и связаны с вырождением матрицы Фреше для системы, определяющей вид решения в направлении  $x_2$ .

Значения параметра  $\lambda$ , при которых на исходящей из нуля ветви фиксируются точки бифуркации, образуют спектр первичного ветвления нелинейной краевой задачи.

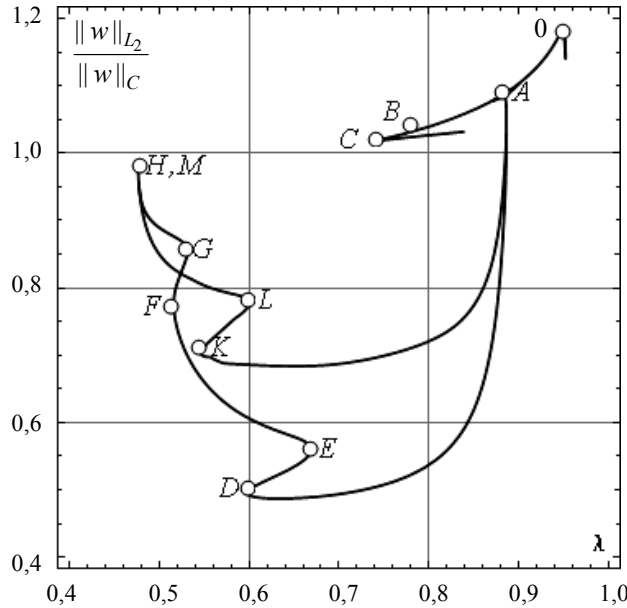


Рис. 5. Характерный вид ветвей первичного и вторичного ветвлений в координатах  $\frac{\|w\|_{L_2}}{\|w\|_C}$ : —  $\lambda$  ветвь  $5_{\max} \rightarrow 4_{\min}$  ( $A-D-E-F-G-H$ ) и ветвь  $5_{\max} \rightarrow 4_{\max}$  ( $A-K-L-M$ )

Ветвь первичного ветвления характеризуется наличием симметричной точки бифуркации, в которой она ответвляется от исходящей из нуля ветви и предельной особой точки (иногда это также симметричная точка бифуркации). На нисходящем участке ветви фиксируется по две точки бифуркации, на восходящем – в зависимости от ветви – либо фиксируется одна точка бифуркации, либо не фиксируется ни одной.

Структура ветвей вторичного ветвления, ответвляющихся от различных ветвей первичного ветвления, одинакова, что позволяет в дальнейшем ограничиться исследованием лишь нескольких ветвей первичного и вторичного ветвлений.

Структура ветви вторичного ветвления характеризуется некоторым количеством участков роста и падения значений параметра, соответствующих этапам перестройки от решения одной ветви первичного ветвления к решению другой ветви первичного ветвления; указанным участкам соответствуют локализованные решения с различным количеством и расположением минимумов и максимумов функции решения (рис. 6, 7).

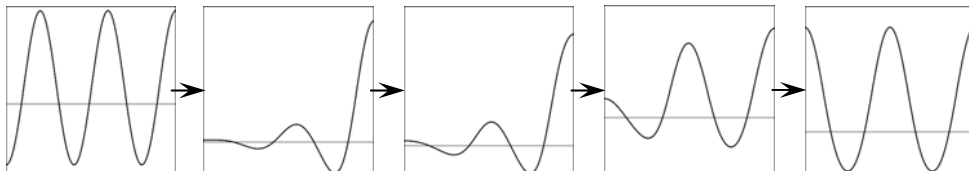


Рис. 6. Последовательность поперечных сечений функций решения, соответствующих движению вдоль ветви вторичного ветвления  $5_{\max} \rightarrow 4_{\min}$  (ветвь  $A-D-E-F-G-H$  на рис. 5)

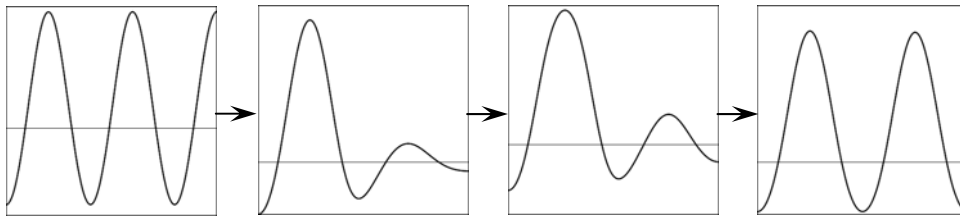


Рис. 7. Последовательность поперечных сечений функций решения, соответствующих движению вдоль ветви вторичного ветвления  $5_{\max} \rightarrow 4_{\max}$  (ветвь  $A - K - L - M$  на рис. 5)

Обычно ветвь первичного ветвления с решениями, характеризуемыми номером главной гармоники решения в направлении  $x_2$ , равным  $n$ , соединяется через ветви вторичного ветвления с ветвями первичного ветвления, которым соответствуют решения, номер главной гармоники которых меньше  $n$  и составляет  $n = n - 1, n = n - 2$ .

Алгоритм позволил построить ветви вторичного ветвления, область существования которых по параметру  $\lambda$  расположена левее, чем значение параметра в первой точке спектра первичного ветвления. Например, для  $n_{x_2}^p = 5$  (номер главной гармоники для ветви первичного ветвления) такими являются ветви  $6_{\max} \rightarrow 5_{\min}, 6_{\min} \rightarrow 5_{\min}, 6_{\min} \rightarrow 4_{\min}, 5_{\max} \rightarrow 3_{\max}, 5_{\max} \rightarrow 3_{\min}, 5_{\max} \rightarrow 4_{\max}, 5_{\max} \rightarrow 4_{\min}, 4_{\max} \rightarrow 3_{\max}$  (здесь числа означают номер главной гармоники, а индексы указывают на то, что максимум или минимум наблюдается в нуле координат для решения, соответствующего ветви первичного ветвления).

Таким образом, описанная выше структура решения прямой задачи теории бифуркаций проиллюстрирована на рис. 5–11.

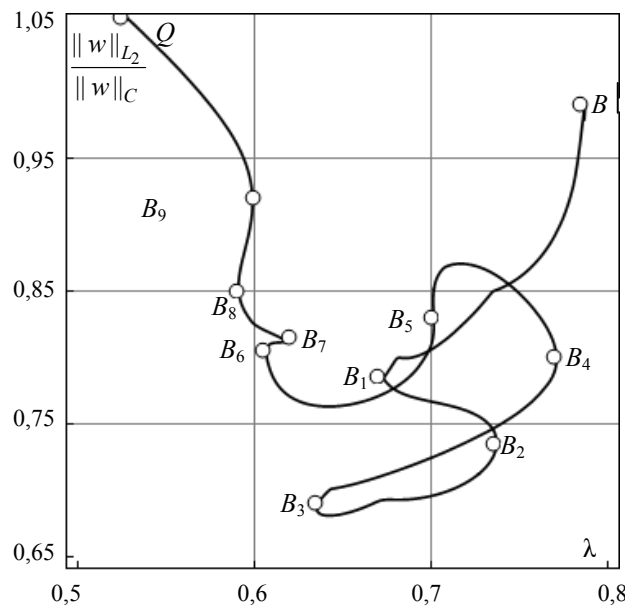


Рис. 8. Ветвь вторичного ветвления  $5_{\max} \rightarrow 3_{\max}$

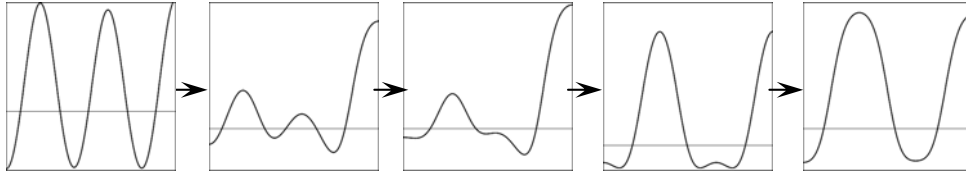


Рис. 9. Последовательность поперечных сечений функций решения, соответствующих движению вдоль ветви  $5_{\max} \rightarrow 3_{\max}$  ( $B - \dots - Q$ , рис. 8)

Ветвь первичного ветвления, связанная с первой точкой спектра, и ответвляющиеся от нее в первой точке бифуркации ветви вторичного ветвления ( $5_{\max} \rightarrow 4_{\max}$  и  $5_{\max} \rightarrow 4_{\min}$ ) в координатах  $\lambda - \frac{\|u_1\|_{L_2}}{\|u_1\|_C}$ , изображены на рис. 5. Последовательность сечений функций решения вида  $x_1 = \frac{(x_1^{\max} + x_1^{\min})}{2} = \text{const}$ , фиксируемых на ветвях вторичного ветвления, показана на рис. 6 и 7. Вследствие симметрии функций решения на рис. 5–11 приведены лишь значения сечения на промежутке  $[0; \pi]$ .

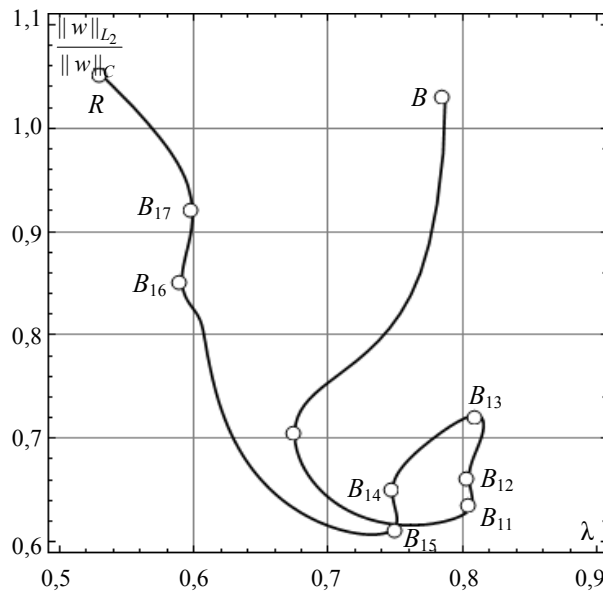


Рис. 10. Ветвь вторичного ветвления  $5_{\max} \rightarrow 3_{\max}$

Здесь ветви вторичного ветвления  $A - D - E - G - F - H$  и  $A - K - L - M$  соединяют между собой ветвь первичного ветвления, которой соответствует решение с номером гармоники  $n = 5$ , с ветвями первичного ветвления, которым соответствуют формы деформации оболочки с номером гармоники  $n = 4$ .

На первой из этих ветвей ( $A - D - E - G - F - H$ ) фиксируются точка бифуркации  $A$ , симметричная точка бифуркации  $H$  и четыре предельные точки ( $D, E, G, F$ ).

Участку  $A - D$  соответствует форма решения с одним минимумом, участкам  $D - E$  и  $E - G$  — переход к решению с тремя минимумами, уча-

стам  $G-F$  и  $F-H$  — перестройка к решению другой ветви первичного ветвления.

На второй ветви ( $A-K-L-M$ ) фиксируются точка бифуркации  $A$ , симметричная точка бифуркации  $M$  и две предельные точки (точки  $K, L$ ). На ветви перестройка к решению другой ветви первичного ветвления осуществляется в два этапа: на участках  $A-K$  и  $K-L$  происходит формирование и развитие формы с двумя минимумами, а на участке  $L-M$  — перестройка к форме другой ветви первичного ветвления.

Серия рис. 8, 9 и 10, 11 описывает характерную структуру ветвей вторичного ветвления, связанного со второй точкой бифуркации, фиксируемой на первой ветви первичного ветвления.

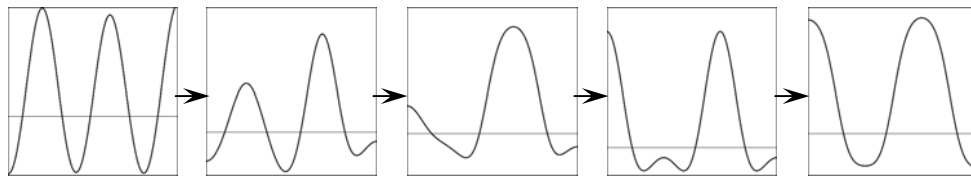


Рис. 11. Последовательность поперечных сечений функций решения, соответствующих движению вдоль ветви  $5_{\max} \rightarrow 3_{\min}$  ( $B-\dots-R$ , рис. 10)

## ВЫВОДЫ

1. Применение нелинейного обобщенного метода Канторовича в сочетании с методом продолжения по параметру позволяет строить ветви решения нелинейной краевой задачи для уравнений Кармана; метод сведения нелинейных одномерных нелинейных краевых задач к эквивалентным задачам Коши, составляющий неотъемлемую часть НОМК, позволяет локализовать и провести анализ особых точек решения.

2. Численное построение уравнений разветвления позволяет построить ветви, исходящие из точки бифуркации; прием смены параметра продолжения — преодолеть предельные особые точки.

3. При постоянной правой части  $\lambda = \text{const}$  уравнения Кармана характеризуются существованием ветвей первичного и вторичного ветвлений; особые точки имеют порядок вырожденности, равный 1.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Rao B. Marguerre-von Karman equations and membrane model / B. Rao // *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*. — 1995. — Vol. 24, N 8. — P. 1131–1140.
2. Vanderbauwhede A. Generic and Nongeneric Bifurcations for the von Karman Equations / A. Vanderbauwhede // *J. of Mathematical Analysis and Applications*. — 1977. — Vol. 66. — P. 550–573.
3. Gubinelli M. Ramification of rough paths / M. Gubinelli // *J. Differential Equations*. — 2010. — N 248. — P. 693–721.
4. Feyel D. Curvilinear integrals along enriched paths / D. Feyel, A. de La Pradelle // *Electron. J. Probab.* 11. — 2006. — P. 860–892.



5. Lyons T. System Control and Rough Paths / T. Lyons, Z. Qian. — Oxford: Oxford University Press, 2002. — 300 p.
6. Keller J.B. Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems / J.B. Keller, S. Antman (Eds). — N.-Y.: Benjamin WA inc, 1969. — 250 p.
7. Fujii F. Static path jumping to attain postbuckling equilibria of a compressed circular cylinder / F. Fujii, H. Noguchi, E. Ramm // *Comp. Mech.* — 2000. — № 26. — P. 259–266.
8. Гуляев В.И. Устойчивость нелинейных механических систем / В.И. Гуляев, В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк. — Львов: Львов. гос. ун-т, 1982. — 255 с.
9. Григолюк Э.И. Неосесимметричное закритическое поведение пологих сферических куполов / Э.И. Григолюк, Е.А. Лопаницын // *Прикладная математика и механика.* — 2003. — Т. 67, № 6. — С. 921–932.
10. Григолюк Э.И. О методе непрерывного продолжения по параметру / Э.И. Григолюк, Е.А. Лопаницын // *Докл. РАН.* — 1994. — Т. 335, № 5. — С. 582–585.
11. Григолюк Э.И. Продолжения решения нелинейных уравнений в окрестности точек бифуркации / Э.И. Григолюк, Е.А. Лопаницын // *Математичні методи та фізико-механічні поля.* — 1998. — Т. 41, № 1. — С. 35–46.
12. Лопаницын Е.А. Модификация метода непрерывного продолжения для отыскания бифуркационных решений стационарных самосопряженных краевых задач / Е.А. Лопаницын, А.Б. Фролов // *ПММ.* — 2012. — Т. 76, № 6. — С. 993–1002.
13. Вайнберг М.М. Теория ветвления нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
14. Obodan N.I. Nonlinear behavior and stability of thin-walled shells / N.I. Obodan, O.G. Lebedeyev, V.A. Gromov // Springer. — 2013. — 180 p.
15. Kantorovich L.V. Approximate Methods of Higher Analysis / L.V. Kantorovich, V.I. Krylov. — N.-Y.: Interscience, 1958. — 682 p.
16. Пешков И.М. Ветвление решений математических моделей гипотетических генных сетей / И. М. Пешков // *Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика.* — 2007. — Т. 7, № 3. — С. 59–72.

*Поступила 19.07.2016*