УДК 519.8

**Л.М. КОЛЄЧКІНА[*], А.М. НАГІРНА[**]**

# РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ КОМБІНАТОРНОЇ ЗАДАЧІ МІНІМІЗАЦІЇ

[*]Полтавський університет економіки і торгівлі, м. Полтава, Україна
[**]Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ, Україна

***Анотація.*** *У роботі представлено математичну модель оптимізаційної задачі мінімізації на комбінаторній множині перестановок, яка може бути моделлю багатьох прикладних задач. Математична модель на комбінаторній множині перестановок, згідно з методом їх генерування, розглядається на графі, вершини якого відповідають точкам множини перестановок. Описаний алгоритм складається з п'яти послідовних кроків і забезпечує знаходження єдиного оптимального розв'язку оптимізаційної задачі мінімізації з урахуванням комбінаторних властивостей множини перестановок. На першому кроці здійснюється нормалізація додаткових обмежень згідно з порядком зростання коефіцієнтів цільової функції: матриця нормалізації, що забезпечує перетворення отриманих розв'язків у необхідну форму для обмежень чи цільової функції. На другому кроці знаходиться опорний розв'язок, який задовольняє всі обмеження задачі. Причому пошук здійснюється серед граничних точок графа обмежень. Третій крок полягає у побудові приростів цільової функції у порядку зростання та вибору мінімального. Шляхом транспозицій відповідних елементів опорного розв'язку визначаються всі інші можливі оптимальні розв'язки, причому розраховуються лише прирости цільової функції. Мінімальний приріст дозволяє знайти найкращий оптимальний розв'язок серед них. На четвертому кроці алгоритму здійснюється перевірка виконання обмежень і визначається оптимальний розв'язок. На п'ятому кроці обчислюється мінімальне значення цільової функції. У статті представлено числовий приклад, який демонструє роботу алгоритму. За рахунок використання транспозиції елементів у перестановці відбувається скорочення кроків розв'язання задачі мінімізації, що й показано у наведеному числовому прикладі. Розв'язок знайдено за шість кроків, при покращенні опорного розв'язку було розглянуто п'ять транспозицій, у той же час при повному переборі необхідно було б проводити розрахунок по 24 перестановках з урахуванням обмежень. Тому запропонований алгоритм забезпечує найкоротший шлях знаходження оптимального розв'язку, при якому досягається мінімальне значення цільової функції на множині перестановок.*

***Ключові слова:*** *модель, комбінаторна оптимізація, комбінаторна задача, загальна множина перестановок,транспозиція, опорний розв'язок, оптимальний розв'язок, алгоритм розв'язування задачі.*

***Аннотация.*** *В работе представлена математическая модель оптимизационной задачи минимизации на комбинаторном множестве перестановок, которая может быть моделью многих прикладных задач. Математическая модель на комбинаторном множестве перестановок по методу их генерирования рассматривается на графе, вершины которого соответствуют точкам множества перестановок. Описанный алгоритм состоит из пяти последовательных шагов и обеспечивает нахождение единого оптимального решения оптимизационной задачи минимизации с учетом комбинаторных свойств множества перестановок. На первом этапе осуществляется нормализация дополнительных ограничений согласно порядку возрастания коэффициентов целевой функции: матрица нормализации, что обеспечивает преобразование полученных решений в необходимую форму для ограничений или целевой функции. На втором шаге находится опорное решение, которое удовлетворяет все ограничения задачи. Причем, поиск осуществляется среди граничных точек графа ограничений. Третий шаг заключается в построении приростов целевой функции в порядке возрастания и выбора минимального. Путем транспозиций соответствующих элементов опорного решения определяются все другие возможные оптимальные решения, но рассчитываются только приросты целевой функции. Минимальный прирост позволяет найти лучшее оптимальное решение среди них. На четвертом шаге алгоритма осуществляется проверка выполнения ограничений и определяется оптимальное решение. На пятом шаге вычисляется минимальное значение целевой функции. В статье представлен числовой пример, демонстрирующий работу алгоритма. За счет использования транспозиции элементов в перестановке происходит сок-*

*ращение шагов решения задачи минимизации, что показано в приведенном числовом примере. Решение найдено за шесть шагов, при улучшении опорного решения было рассмотрено пять транспозиций, в то же время при полном переборе необходимо было бы проводить расчет по 24 перестановкам с учетом ограничений. Поэтому предложенный алгоритм обеспечивает кратчайший путь нахождения оптимального решения, при котором достигается минимальное значение целевой функции на множестве перестановок.*
***Ключевые слова:*** *модель, комбинаторная оптимизация, комбинаторная задача, общее множество перестановок, транспозиция, опорное решение, оптимальное решение, алгоритм решения задачи.*

***Abstract.*** *The paper presents a mathematical model of optimization minimization problem on a combinatorial set of permutations, which can be a model of many applied problems. A mathematical model on a combinatorial set of permutations by the method of generating them is considered on a graph the vertices of which correspond to the points of the set of permutations. The described algorithm consists of five consecutive steps and provides finding a single optimal solution of the optimization minimization problem, taking into account the combinatorial properties of the set of permutations. In the first step, the normalization of additional constraints is carried out according to the order of growth of the coefficients of the objective function: the matrix of normalization, which ensures the transformation of the resulting solutions into the required form for restrictions or the objective function. The second step is the reference solution, which satisfies all the limitations of the task. In addition, the search is carried out among the boundary points of the graph of constraints. The third step is to build incremental target function in order of growth and a minimum choice. Through the transpositions of the corresponding elements of the reference solution, all other possible optimal solutions are determined, and at the same time, only the increments of the target function are calculated. The minimum gain allows you to find the best optimal solution among them. The fourth step of the algorithm is to verify the implementation of the restrictions and determine the optimal solution. In the fifth step, the minimum value of the target function is calculated. The article presents a numerical example that demonstrates the work of the algorithm. Due to the use of transposition of elements in the permutation, there is a reduction in the steps of solving the minimization problem, which is shown in the given numerical example. The solution was found in six steps, with the improvement of the reference solution, five transpositions were considered, at the same time, at full interrogation, it would be necessary to calculate the 24 permutations, taking into account the limitations. Therefore, the proposed algorithm provides the shortest path for finding an optimal solution, which achieves the minimum value of the objective function on the set of permutations.*
***Keywords:*** *model, combinatorial optimization, combinatorial problem, the general permutation set, transposition, support solution, optimal solution, algorithm for solving the problem.*

## 1. Вступ

Проблема дослідження задач комбінаторної оптимізації на сьогодні є досить актуальною, про що свідчить велика кількість праць, присвячених методам розв’язування екстремальних задач на комбінаторних множинах [1–17], в яких пропонуються нові підходи та удосконалюються існуючі методи, досліджується їх ефективність. Даний факт пов’язаний з тим, що екстремальні задачі дискретної оптимізації є моделями різних прикладних задач проектування, планування, розміщення, класифікації і управління [11–13, 18, 19]. Слід зазначити, що в науковій літературі широко вживається термін «задача комбінаторної оптимізації» (ЗКО), під якою розуміють проблему пошуку екстремумів заданої цільової функції на комбінаторному просторі.

Оптимізаційні комбінаторні задачі знайшли своє широке застосування в різних сферах діяльності, наприклад, у програмуванні, медицині, в банківській сфері, у промисловості, молекулярній біології і т.п.

На особливу увагу заслуговують комбінаторні моделі, якими моделюються певні класи практичних задач з урахуванням комбінаторних властивостей множини допустимих розв’язків, які зручно представляти графічно, у вигляді графа [1, 2, 5, 6].

Основна увага в комбінаторній оптимізації приділяється визначенню обчислювальної складності цих задач, розробці методів і алгоритмів їх розв'язання на основі властивостей комбінаторних множин. Існує безліч різноманітних методів розв'язування екстремальних задач як точних, так і наближених. Системне вивчення властивостей комбінаторних множин та їх дослідження описані в багатьох роботах [1, 9, 11, 13]. Підвищений інтерес до таких задач обумовлений дослідженнями останніх років в області комп'ютерних технологій при створенні сучасних алгоритмів і програм для розв'язування оптимізаційних задач. На даний момент неможливо програмувати більшість задач без знань комбінаторики та теорії графів, оскільки це значно полегшує і спрощує роботу на комп'ютері [1].

У даній статті формулюється постановка задачі комбінаторної оптимізації та запропоновано новий підхід до розв'язання сформульованої задачі. Новий алгоритм розв'язання забезпечує знаходження оптимального розв'язку оптимізаційної задачі на множині перестановок, а, отже, мінімізацію цільової функції, з урахуванням додаткових обмежень за лічені кроки. Даний алгоритм застосовує матрицю нормалізації та прирости функції цілі для знаходження оптимального розв'язку. Для демонстрації роботи алгоритму представлено числовий приклад.

## 2. Постановка математичної моделі задачі

Введемо необхідні позначення. Позначимо $N_0^k = N_k \cup 0$, вимірність підпростору $L \subset R^k : \dim L$, опукла оболонка множини M – conv M .

Мультимножиною є множина елементів, які можуть повторюватися. Мультимножина А задається основою $S(A)$, тобто набором усіх її різних елементів, і кратністю елементів $k_A(a)$ (або $k(a)$) – числом повторення кожного елемента основи цієї мультимножини.

Мультимножина В з основою $S(B)$ називається підмультимножиною мультимножини А з основою $S(A)$, якщо $S(B) \subset S(A)$, і для кожного елемента $a \in S(B)$ виконується нерівність $k_B(a) \le k_A(a)$.

Нехай задана мультимножина $A = \{a_1, a_2, ... a_q\}$ її основа $S(A) = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$, де $e_j \in R^1 \; \forall j \in N_k$ і кратність елементів $k(e_j) = r_j$, $j \in N_k$, $r_1 + r_2 + ... + r_k = q$.

Впорядкованою $n$-вибіркою з мультимножини А називається набір

$$a = (a_{i_1}, a_{i_2}, \; \ldots, a_{i_n}), \tag{1}$$

де $a_{i_j} \in A \;\; \forall i_j \in N_n$, $\forall j \in N_n$, $i_s \ne i_t$, якщо $s \ne t \;\; \forall s \in N_n$, $\forall t \in N_n$.

*Означення 1.* Множина $E(A)$, елементами якої є $n$-вибірки вигляду (1) з мультимножини А, називається евклідовою комбінаторною множиною, якщо для довільних її елементів $a' = (a'_1, a'_2, ..., a'_n)$, $a'' = (a''_1, a''_2, ..., a''_n)$ виконуються умови: $(a' \ne a'') \Leftrightarrow (\exists \, j : a'_j \ne a''_j)$, тобто два елементи множини $E(A)$ відмінні один від одного, якщо вони незалежно від інших відмінностей розрізняються порядком розміщення елементів, що їх утворюють.

Множина перестановок з повтореннями з $n$ дійсних чисел, серед яких k різних, називається загальною множиною перестановок і позначається $P_{nk}(A)$. Це множина упорядкованих $n$-вибірок вигляду (1) з мультимножини А за умови $n = q > k$.

При $n = k = q$ маємо множину перестановок без повторень. Позначимо її $P_n$. Очевидно, що $P_n(A) = P_{nn}(A)$. У тих випадках, коли конкретно не будемо вказувати вид множини перестановок, будемо записувати ці множини як $P(A)$.

Розглянемо задачу комбінаторної оптимізації на множині перестановок $P(A)$ вигляду

$$Z(\Phi, P(A)) : \min\{\Phi(\mathrm{a}) \mid \mathrm{a} \in \mathrm{P(A)}\}, \qquad (2)$$

де $\min\Phi(\mathrm{a}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ,

$$D = \{x \in R^n \mid Gx \le b \wedge Gx \ge b\},$$

де $G \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$ – опукла многогранна множина $D \subset R^n$, утворена додатковими лінійними обмеженнями.

Далі сформулюємо задачу $Z(\mathrm{F}, \mathrm{X})$, де кожній точці $a \in P_{nk}(A)$ відповідає точка $x \in X$, така, що $\mathrm{F(x)} = \Phi(a)$:

$$Z(\mathrm{F}, \mathrm{X}) : \min\{\mathrm{F(x)} \mid \mathrm{x} \in X\}, \qquad (3)$$

де $\mathrm{F(x)} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, $X$ – не порожня множина в $R^n$ і $X = vert\Pi(A)$, $\Pi = convP(A)$.

Відповідно, додаткові лінійні обмеження: $Gx = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_j \le b_i$ або $Gx = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_j \ge b_i$, $i \in N_m$, $j \in N_n$.

Послідовність перестановок, згідно з методом їх генерування, інтерпретується як граф $G_n$, вершини якого відповідають точкам множини перестановок $P_n(A)$ [2, 11].

| $n_f$ | $u_1$ | $u_2$ | $\cdots$ | $u_{n-1}$ | $u_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_{g_1}$ | $u'_{11}$ | $u'_{12}$ | $\cdots$ | $u'_{1n-1}$ | $u'_{1n}$ |
| $n_{g_2}$ | $u'_{21}$ | $u'_{22}$ | $\cdots$ | $u'_{2n-1}$ | $u'_{2n}$ |
| … | ... | ... | ... | ... | ... |
| $n_{g_m}$ | $u'_{m1}$ | $u'_{m2}$ | $\cdots$ | $u'_{mn-1}$ | $u'_{mn}$ |

Рисунок 1 – Матриця нормалізації

## 3. Алгоритм розв'язування комбінаторної задачі мінімізації на множині перестановок

*1 крок. Побудова матриці нормалізації.* На першому кроці здійснюємо нормалізацію додаткових обмежень згідно з порядком зростання коефіцієнтів цільової функції: $c_1 \le c_2 ... \le c_{n-1} \le c_n$, $a'_{11} \le a'_{12} \le ... \le a'_{1n}$, $a'_{21} \le a'_{22} \le ... \le a'_{2n}$, …, $a'_{m1} \le a'_{m2} \le ... \le a'_{mn}$ [2]. Складаємо матрицю нормалізації (рис. 1), що забезпечує перетворення отриманих розв'язків у необхідну форму для обмежень чи цільової функції.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $n_f$ | $u_1$ | $u_2$ | $\cdots$ | $u_{n-1}$ | $u_n$ |
| 2 | $f$ | $x_1^f$ | $x_2^f$ | | $x_{n-1}^f$ | $x_n^f$ |
| 3 | $n_{g_1}$ | $u'_{11}$ | $u'_{12}$ | $\cdots$ | $u'_{1n-1}$ | $u'_{1n}$ |
| 4 | $g'_1$ | $x_1^{g'_1}$ | $x_2^{g'_1}$ | | $x_{n-1}^{g'_1}$ | $x_n^{g'_1}$ |
| 5 | $n_{g_2}$ | $u'_{21}$ | $u'_{22}$ | $\cdots$ | $u'_{2n-1}$ | $u'_{2n}$ |
| 6 | $g'_2$ | $x_1^{g'_2}$ | $x_2^{g'_2}$ | | $x_{n-1}^{g'_2}$ | $x_n^{g'_2}$ |
| … | … | … | … | … | … | … |
| 7 | $n_{g_m}$ | $u'_{m1}$ | $u'_{m2}$ | $\cdots$ | $u'_{mn-1}$ | $u'_{mn}$ |
| 8 | $g'_m$ | $x_1^{g'_m}$ | $x_2^{g'_m}$ | $\cdots$ | $x_{n-1}^{g'_m}$ | $x_n^{g'_m}$ |

Рисунок 2 – Матриця відповідностей

Для зручності розрахунків приростів функції $\Delta f$ і обмежень $\Delta g_i$ складаємо матрицю відповідностей (рис. 2).

У даних матрицях

$n_f$, $n_{g_1}$, $n_{g_2}, \ldots, n_{g_m}$ – номери місця відповідної цифри в перестановці,

де $\Delta u_1 : N \to C : \Delta u_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_m^1 \\ u^{-1}(1) & u^{-1}(2) & \ldots & u^{-1}(m) \end{pmatrix}$ [3];

$f$, $g_1'$, $g_2', \ldots, g_m'$ – точка (розв’язок, перестановка) у відповідній формі;

$x_1^f$, $x_2^f \ldots, x_n^f$ – опорний розв’язок $(x_1^f > x_2^f > \ldots > x_n^f)$.

*2 крок. Знаходження опорного розв’язку*. Першочергово визначається перший допустимий розв’язок довільного обмеження згідно з алгоритмом [4]. У даному випадку – це гранична точка, що задовольняє дане обмеження. Далі відбувається перевірка виконання всіх інших обмежень. Знайдена точка буде опорним розв’язком, якщо нерівності справджуються, а числові значення обмежень та цільової функції будуть початковими даними ($g_{i_{поч}}$, $f_{поч}$). У випадку невиконання нерівностей задача не має розв’язку на множині перестановок.

Значення приростів функції $\Delta f$ і обмежень $\Delta g_i$ знаходяться за такими формулами [4]:

$$\triangle f = \triangle f_2 - \triangle f_1 = \left( x_i^f * c_j + x_j^f * c_i \right) - \left( x_j^f * c_j + x_i^f * c_i \right), \qquad (4)$$

$$\triangle g = \triangle g_2 - \triangle g_1 = \left( x_i^g * c_j + x_j^g * c_i \right) - \left( x_j^g * c_j + x_i^g * c_i \right). \qquad (5)$$

*3 крок. Покращення опорного розв’язку.* За рахунок транспозицій у перестановці першого опорного розв’язку знаходимо прирости цільової функції $\Delta f$ і впорядковуємо їх за спаданням:

$$\Delta f_1 \ge \Delta f_2 \ldots \ge \Delta f_{n-1} \ge \Delta f_n . \qquad (6)$$

Мінімальний приріст цільової функції $\min \Delta f = \Delta f_n$ визначає покращений опорний розв’язок.

*4 крок. Знаходження оптимального розв’язку*. Знаходимо $\Delta g_i$ для розв’язку, який отриманий при знаходження $\Delta f_n$, і перевіряємо виконання обмежень

$$g_i \le b_j ,$$

де

$$g_i = g_{i_{поч}} + \Delta g_{i_{опт}} \qquad (7)$$

Якщо всі обмеження виконуються, то знайдено оптимальний розв’язок задачі, в іншому випадку, розглядається розв’язок, що отриманий при знаходженні $\Delta f_{n-1}$, і повторюємо аналогічні обчислення.

У випадку невиконання обмежень неможливо знайти мінімум функції при заданих обмеженнях на множині перестановок.

*5 крок. Знаходження мінімального розв’язку задачі.* Після виконання кроку 4 знаходимо мінімальне значення цільової функції:

$$f_{\min} = f_{поч} + \Delta f_{опт} . \qquad (8)$$

## 4. Приклад застосування алгоритму

Знайти мінімальне значення функції $f(x) = -2x_1 - x_2 + 7x_3 + 12x_4$ на множині перестановок (1, 2, 3, 4) з наступними додатковими обмеженнями:

$$\begin{cases} g_1 = 5x_1 - 7x_2 - x_3 + x_4 \le 8, \\ g_2 = -4x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 \ge 12, \\ g_3 = 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 \le 23. \end{cases}$$

Нормалізуємо додаткові обмеження згідно з цільовою функцією:

$$\begin{cases} g_1' = -7x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 \le 8, \\ g_2' = -4x_1 - 3x_2 + x_3 + 9x_4 \ge 12, \\ g_3' = -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 \le 23. \end{cases}$$

| $n_f$ | *1* | *2* | *3* | *4* |
|---|---|---|---|---|
| $n_{g_1}$ | *2* | *3* | *4* | *1* |
| $n_{g_2}$ | *1* | *3* | *2* | *4* |
| $n_{g_3}$ | *4* | *3* | *1* | *2* |

Рисунок 3 – Матриця нормалізації

Тоді матриця нормалізації буде мати вигляд (рис. 3).

Точка (4321) – перша гранична точка, що задовольняє обмеження $g_1'$: $g_1'(4321) = -24 \le 8$. Користуючись матрицею нормалізації, знаходимо значення другого обмеження: $g_2'(1342) = 9 < 12$. Тому дану точку не можна вважати опорним розв'язком.

Беремо граничну точку (1234) для обмеження $g_2'(1234) = 29 \ge 12$. З урахуванням матриці нормалізації здійснюємо перевірку таких двох обмежень: $g_1'(3241) = -14 \le 8$, $g_3'(4213) = 15 \le 23$.

Отже, т. (1324) буде першим опорним розв'язком, при якому мінімальне значення цільової функції $f_1(1324) = 57$. Тоді початковими значеннями варто вважати:

$$g'_{1_{поч}}(3241) = -14,\; g'_{2_{поч}}(1234) = 29,\; g'_{3_{поч}}(4213) = 15,\; f_{1_{поч}}(1324) = 57.$$

Здійснюємо покращення опорного розв'язку за рахунок таких транспозицій у перестановках:

$$1 \leftrightarrow 4:\text{т. } (4321),\; \triangle f_{14} = ((-2)*4 + 12*1) - ((-2)*1 + 12*4) = -42,$$

$$1 \leftrightarrow 3:\text{т. } (3124),\; \triangle f_{13} = ((-2)*3 + (-1)*1) - ((-2)*1 + (-1)*3) = -2,$$

$$1 \leftrightarrow 2:\text{т. } (2314),\; \triangle f_{12} = ((-2)*2 + 7*1) - ((-2)*1 + 7*2) = -9,$$

$$3 \leftrightarrow 4:\text{т. } (1423),\; \triangle f_{34} = ((-1)*4 + 12*3) - ((-1)*3 + 12*4) = -13,$$

$$2 \leftrightarrow 4:\text{т. } (1342),\; \triangle f_{24} = (7*4 + 12*2) - (7*2 + 12*4) = -10.$$

Упорядкуємо прирости функцій $\triangle f$ за спаданням:

$$\triangle f_{13} = -2,\; \triangle f_{12} = -9,\; \triangle f_{24} = -10,\; \triangle f_{34} = -13,\; \triangle f_{14} = -42,$$

$$\triangle f_{13} > \triangle f_{12} > \triangle f_{34} > \triangle f_{14} \Rightarrow \min \Delta f_n = \Delta f_{14}(4321).$$

Знаходимо прирости обмежень та перевіряємо їх виконання**:**

$$\triangle g'_{11}(3214) = \triangle g^2_{11} - \triangle g^1_{11} = 21 - 9 = 12,\; g'_{11} = \Delta g'_{11} + g'_1 = 12 - 14 = -2,\; g'_{11} \le 8,$$

$$\triangle g'_{21}(4231) = \triangle g^2_{21} - \triangle g^1_{21} = -52 + 13 = -39,\; g'_{21} = \Delta g'_{21} + g'_2 = -39 + 29 = -10,\; g'_{11} \le 12.$$

Отже, обмеження не виконується.

Беремо такий $\min \Delta f_{n-1} = \Delta f_{34}(1423) = -13$.

Проводимо аналогічні обчислення:

$$\triangle g'_{12}(4231) = \triangle g^2_{12} - \triangle g^1_{12} = -25 + 17 = -8,\ g'_{12} = \Delta g'_{12} + g'_1 = -8 - 14 = -22,\ g'_{12} \le 8,$$

$$\triangle g'_{22}(1243) = \triangle g^2_{22} - \triangle g^1_{22} = 31 - 39 = -8,\ g'_{21} = \Delta g'_{21} + g'_2 = 29 - 8 = 21,\ g'_{22} \ge 12,$$

$$\triangle g'_{31}(3214) = \triangle g^2_{31} - \triangle g^1_{31} = 18 - 10 = 8,\ g'_{21} = \Delta g'_{21} + g'_2 = 8 + 15 = 23,\ g'_{22} \ge 12.$$

Отже, всі нерівності справджуються, тому т. $(1423)$ є оптимальним розв'язком. Тобто, $\Delta f_{опт} = \Delta f_{34}(1423)$, $\Delta f_{опт} = \Delta f_{34}(1423)$ відповідно до (8), $f_{\min}(1423) = f_1 + \Delta f_{34} = 57 - 13$, $f_{\min} = 44$.

## 5. Висновки

У роботі розглянуто постановку оптимізаційної задачі мінімізації на комбінаторній множині перестановок, запропоновано та описано алгоритм знаходження оптимального розв'язку.

Алгоритм розв'язання складається із п'яти кроків, які забезпечують знаходження оптимального розв'язку, при якому цільова функція набуває мінімального значення.

На першому кроці знаходиться опорний розв'язок, який задовольняє всі обмеження задачі. Шляхом транспозицій даного розв'язку визначаються всі інші можливі оптимальні розв'язки. Мінімальний приріст цільової функції дозволяє знайти найкращий серед них, після чого здійснюється перевірка обмежень.

Слід відмітити, що за рахунок використання транспозиції елементів у перестановці значно скорочуються кроки розв'язання задачі. У наведеному числовому прикладі розв'язок було знайдено за шість кроків при чому при покращенні опорного розв'язку було розглянуто п'ять транспозицій, у той же час, при повному переборі, необхідно було б проводити розрахунок по 24 перестановках, з урахуванням обмежень. Отже, даний алгоритм забезпечує найкоротший шлях знаходження оптимального розв'язку, при якому досягається мінімальне значення цільової функції на множині перестановок.

Надалі наукові дослідження будуть спрямовані на адаптацію даного алгоритму для розв'язування задач оптимізації з багатьма цільовими функціями на інших комбінаторних множинах.

## СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Роберт С., Кевин У. Алгоритмы на java. М.: Питер, 2013. 848 с.

2. Донец Г.А. Колечкина Л.Н. Построение гамильтонова пути в графах перестановочных многогранников. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. № 1. С. 10–16.

3. Донецъ Г.П., Нагірна А.М. Умовна оптимізація лінійної функції на перестановках. *Теорія оптимальних рішень.* 2014. С. 16–23.

4. Донецъ Г.П., Нагірна А.М. Метод оптимізації лінійної функції на перестановках. *Теорія оптимальних рішень.* 2018. С. 138–145.

5. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Алгоритм поиска значений линейной функции на лексикографически упорядоченных перестановках. *Теорія оптимальних рішень*. 2009. № 8. С. 3–8.

6. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах. *Управляющие системы и машины*. 2009. № 4. С. 36–42.

7. Korte B., Vygen J. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. New York, 2012. 660 p.

8. Pardalos P.M., Du D. Handbook of combinatorial optimization / Eds. R.L. Graham. New York, 2013. 3409 p.

9. Pichugina O., Yakovlev S. Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications. *J. Coupled Syst. Multiscale Dyn*. 2016. Vol. 2, N 4. P. 129–152.

10. Pichugina O., Yakovlev S. Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems. *Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering* / Ed.

J. Bélair et al. Switzerland: Springer, 2016. P. 689–700.
11. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. К.: ІСДО, 1993. 188 с.
12. Semenova N.V., Kolechkina L.N., Nagornaya A.N. On an approach to the solution of vector problems with linear-fractional criterion functions on a combinatorial set of arrangements. *Upravlen. Inform.* 2010. N 1. P. 131–144.
13. Semenova N.V., Kolechkina L.N. Vector problems of discrete optimization on combinatorial sets: methods of research and solution. Kyiv: Naukova Dumka, 2009. N 4. 266 p.
14. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 3. С. 158–172.
15. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Векторные задачи оптимизации с линейными критериями на нечетко заданном комбинаторном множестве альтернатив. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 2. С. 88–99.
16. Koliechkina L.N., Dvirna O.A., Nagornaya A.N. Modified Coordinate Method to Solve Multicriteria Optimization Problems on Combinatorial Configurations Multicriteriality. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. N 4. P. 154–161.
17. Koliechkina L.N., Dvirna O.A. Solving Extremum Problems with Linear Fractional Objective Functions on the Combinatorial Configuration of Permutations Under Multicriteriality. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53, N 4. P. 590–599.
18. Pichugina O.S., Koliechkina L.N. Two criterial combination model of optimization telecommunication networks. *Mathematical Machines and Systems.* 2017. Vol. 4. P. 126–144.
19. Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М. Математична модель багатокритеріальної оптимізації на множині сполучень при побудові комп'ютерних мереж. *Математичні машини і системи*. 2016. № 4. С. 68–73.

*Стаття надійшла до редакції 25.08.2018*