

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.02.031>

УДК 539.3

**А.М. Багно**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: alexbag2016@gmail.com

## **О влиянии конечных начальных деформаций на параметры волнового процесса в системе, состоящей из слоя идеальной жидкости и упругого полупространства**

*Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем*

*Рассматривается задача о распространении нормальных волн в предварительно деформированном несжимаемом полупространстве, взаимодействующем со слоем идеальной сжимаемой жидкости. Исследование проводится на основе трехмерных линеаризованных уравнений теории упругости конечных деформаций для несжимаемого упругого полупространства и трехмерных линеаризованных уравнений Эйлера для идеальной сжимаемой жидкости. Применяются постановка задачи и подход, основанные на использовании представлений общих решений линеаризованных уравнений для упругого тела и жидкости. Получено дисперсионное уравнение, описывающее распространение гармонических волн в гидроупругой системе. Построены дисперсионные кривые нормальных волн в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние конечных начальных деформаций упругого полупространства и толщины слоя идеальной сжимаемой жидкости на фазовые скорости гармонических волн. Предложен критерий существования нормальных волн в гидроупругих волноводах. Развитый подход и полученные результаты позволяют установить для волновых процессов пределы применимости моделей, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций и классической теории упругости для твердого тела. Численные результаты представлены в виде графиков и дан их анализ.*

**Ключевые слова:** нормальные волны, фазовая скорость, несжимаемое упругое полупространство, слой идеальной сжимаемой жидкости, начальные деформации.

Значительное практическое использование поверхностных волн ставит задачу более полного учета свойств реальных упругих и жидких сред. К числу таких факторов принадлежат начальные напряжения в твердом теле. Созданные целенаправленно или возникшие в результате технологических операций при изготовлении начальные напряжения оказывают существенное влияние на волновые процессы. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом в упругих телах начальных напряжений, приведены в [1–10].

В настоящей работе для анализа дисперсионных характеристик нормальных мод в упруго-жидкостной системе применяются постановка задачи и метод, основанные на при-

менении представлений общих решений линейризованных уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости и предварительно напряженного несжимаемого упругого тела, предложенные в работах [3, 5–8, 11, 12].

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из слоя идеальной сжимаемой жидкости и упругого несжимаемого полупространства, подверженного большим (конечным) начальным деформациям. Решение получим с привлечением трехмерных линейризованных уравнений теории упругости при конечных деформациях для твердого тела и линейризованных уравнений Эйлера для жидкости, находящейся в состоянии покоя [3, 5–8, 11, 12].

Далее рассматриваются такие динамические процессы в гидроупругой системе, при которых возникающие дополнительные деформации, т.е. возмущения деформаций значительно меньше начальных. Исследуются гармонические волновые процессы малой амплитуды. При этом принимается, что упругое тело находится в начальном состоянии.

В рамках принятых моделей основные соотношения для системы предварительно напряженного несжимаемого упругого тела – идеальная сжимаемая жидкость принимают такой вид [3, 5–8, 11, 12]:

1) несжимаемые упругие тела

$$\left( \tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_\beta} - \delta_{j\alpha} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\alpha + \tilde{q} \frac{\partial p}{\partial z_i} = 0, \quad z_k \in V_1; \quad (1)$$

$$\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} = \lambda_i \lambda_\beta \kappa_{ij\alpha\beta}; \quad \tilde{q}_{ij} = \lambda_i q_{ij}; \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1; \quad \tilde{q}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial z_i} = 0, \quad z_k \in V_1; \quad (2)$$

$$\tilde{Q}_j \equiv N_i^0 \left( \tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\beta} + \tilde{q}_{ij} p \right), \quad z_k \in S; \quad (3)$$

2) идеальная сжимаемая жидкость

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0, \quad z_k \in V_2; \quad (4)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2; \quad a_0 = \text{const}, \quad z_k \in V_2; \quad (5)$$

$$\tilde{P}_j = p_{ij} N_j^0, \quad p_{ij} = -\delta_{ij} p. \quad (6)$$

При этом специфику взаимодействия упругих и жидких сред отражают динамические  $\tilde{Q}_j = \tilde{P}_j$ ,  $z_k \in S$  и кинематические  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}$ ,  $z_k \in S$  граничные условия, задаваемые на поверхности контакта упругих тел и жидкости.

Введенные здесь тензоры  $\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta}$  и  $\tilde{q}_{ij}$  зависят от вида начального состояния и типа упругого потенциала материала твердого тела. Выражения для вычисления составляющих этих

тензоров приведены в работах [1, 6, 7, 10]. Там же предложены упрощения для различных вариантов теории малых начальных деформаций.

Выше приняты следующие обозначения:  $u_i$  — компоненты вектора перемещений упругого тела  $\mathbf{u}$ ;  $\rho$  — плотность материала упругого полупространства;  $v_i$  — составляющие вектора возмущений скорости жидкости  $\mathbf{v}$ ;  $\rho^*$  и  $p$  — возмущения плотности и давления в жидкости;  $\rho_0$  и  $a_0$  — плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $\lambda_i$  — удлинения упругого полупространства в направлениях координатных осей;  $V_1$  и  $V_2$  — объемы, занимаемые, соответственно, упругим телом и жидкостью;  $S$  — поверхность контакта упругой и жидкой сред.

Равенства (1) — (3) описывают поведение несжимаемого упругого тела. Малые колебания идеальной сжимаемой жидкости относительно состояния покоя отражают соотношения (4) — (6).

Далее предположим, что изотропное нелинейно-упругое твердое тело, упругий потенциал которого является произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина, занимает объем:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-\infty < z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  и контактирует со слоем идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей объем:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 \leq h$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $Oz_3$ . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $Oz_1z_2$ . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений (1) — (6) при следующих граничных условиях:

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=0} = 0; \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; \tilde{P}_2|_{z_2=h} = 0; v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (7)$$

Выше и здесь  $\tilde{Q}_j$  и  $\tilde{P}_j$  обозначают составляющие напряжений, соответственно, в упругом теле и жидкости.

Воспользуемся постановками задач гидроупругости для тел с начальными напряжениями и идеальной жидкости, а также представлениями общих решений, предложенными в работах [3, 5–8, 11, 12]. В дальнейшем исследуются волновые процессы в предварительно деформированных несжимаемых упругих телах, взаимодействующих с идеальной жидкостью, начальное состояние которых является однородным. В случае однородного напряженно-деформированного состояния для плоского случая общие решения имеют вид [3, 5–8, 11, 12]:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \chi_1;$$

$$p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \lambda_1^2 [\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0 - \lambda_1 \lambda_2 q_1 q_2^{-1} (a_{12} + \mu_{12})] \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0) \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \frac{\partial}{\partial z_2} \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t},$$

где введенные функции  $\chi_i$  являются решениями следующих уравнений:

$$\left[ \frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\lambda_2^4 q_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^4} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial t^2} + \frac{q_1 q_2^{-1} (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0) + q_1^{-1} q_2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) - 2\lambda_1 \lambda_2 (a_{12} + \mu_{12})}{\lambda_1^2 \lambda_2^{-2} (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0) q_1 q_2^{-1}} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} - \frac{\lambda_2^2 q_2^2 \rho}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^2 \partial t^2} \right] \chi_1 = 0; \quad q_i = \lambda_i^{-1}; \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1; \quad \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0.$$

Здесь  $a_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  – величины, определяемые из уравнений состояния и зависящие от вида упругого потенциала [6, 7, 10];  $s_{ii}^0$  – начальные напряжения.

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений гидроупругости (1) – (7) определяем в классе бегущих волн

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)] \quad (j = \overline{1, 2}),$$

где  $k$  – волновое число;  $\omega$  – круговая частота;  $i^2 = -1$ .

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаем две задачи Штурма–Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также определяем соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (7) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения этой системы, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| e_{lm}(c, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho, a_0, \omega h/c_s) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 4}), \quad (8)$$

где  $c$  – фазовая скорость мод в гидроупругой системе;  $h$  – толщина слоя жидкости;  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu/\rho$ ) – скорость волны сдвига в материале упругого тела,  $\mu$  – модуль сдвига материала упругого тела.

Отметим, что полученное дисперсионное уравнение (8) не зависит от формы упругого потенциала. Оно является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [1, 2, 4, 9].

Заметим, что модели, основанные на различных вариантах теории малых начальных деформаций, на уравнениях приближенных прикладных двумерных теорий как для предварительно напряженных, так и для тел без начальных деформаций, на линейных соотношениях классической теории упругости, являются частными случаями, рассматриваемого в настоящей работе, и следуют из него при введении дополнительных упрощающих предположений. Задачи, которые были рассмотрены в рамках модели, учитывающей начальные напряжения, приведены в [1, 2, 4, 9]. Если принять  $s_{ii}^0 = 0$ ,  $\lambda_i = 1$ , то получим равенства

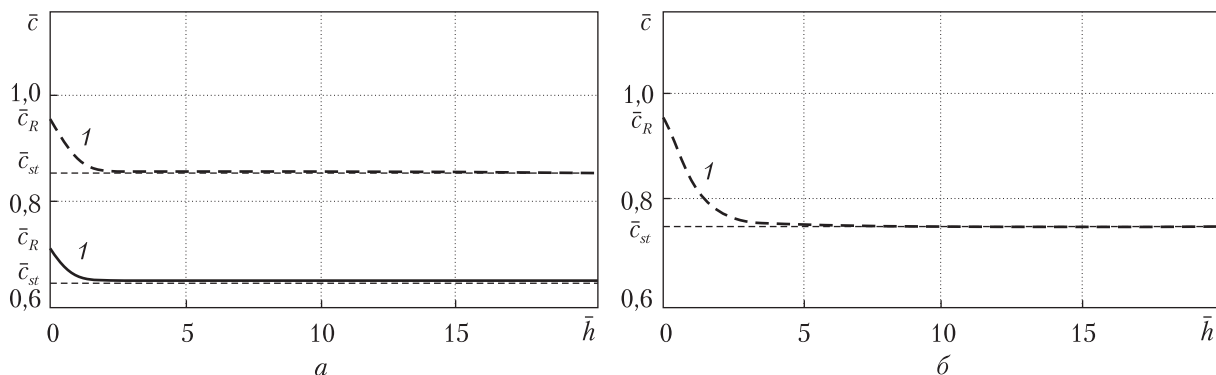


Рис. 1

для основательно исследованных в рамках классической теории упругости волн Рэлея и Стоунли–Шольте [13].

**Числовые результаты.** В дальнейшем дисперсионное уравнение (8) решаем численно. Расчеты проводим для гидроупругой системы, состоящей из реального упругого тела и жидкости, а также для системы с гипотетической жидкостью. Первый волновод состоит из несжимаемого упругого полупространства и слоя воды. В качестве материала для упругого полупространства выбираем высокоэластичную резину, упругие свойства которой описываются упругим потенциалом Трелоара. Механические параметры для этой гидроупругой системы принимаем следующими: упругое полупространство —  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ; слой жидкости —  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ ,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$ . У этого волновода материал упругого тела (резины) является податливым и мягким. Гипотетическую жидкость для второй системы принимаем со скоростью распространения звука в ней, равной  $\bar{a}_0 = 0,85$ . При решении предполагаем, что начальное напряженно-деформированное состояние является однородным и удовлетворяет соотношениям  $s_{11}^0 \neq 0$ ,  $s_{22}^0 = 0$ . Как показано в работах [6, 7], при такой загрузке нет аналогии между задачами в линеаризованной и линейной постановках. Поэтому результаты для тел с начальными напряжениями не могут быть получены из решений соответствующих линейных задач.

Заметим, что уравнение (8) выведено без каких-либо дополнительных требований к виду функции упругого потенциала, поэтому оно имеет место для упругих потенциалов произвольной формы.

Далее дисперсионное уравнение (8) решаем численно. Результаты вычислений в виде графиков представлены на рис. 1 и 2. При этом на рис. 1, а приведены графики для упругого полупространства из высокоэластичной резины и воды ( $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$ ).

Графики для гидроупругой системы с гипотетической жидкостью ( $\bar{a}_0 = 0,85$ ) представлены на рис. 1, б — 2, б.

На рис. 1–2 изображены дисперсионные кривые для гидроупругих волноводов, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины слоя жидкости  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = \omega h/c_s$ ). Приведенные на рис. 1, а и 2, а графики, обозначенные толстыми штриховыми линиями, получены для упруго-жидкостных систем, упругие полупространства которых не подвержены начальным деформациям ( $\lambda_1 = 1$ ).

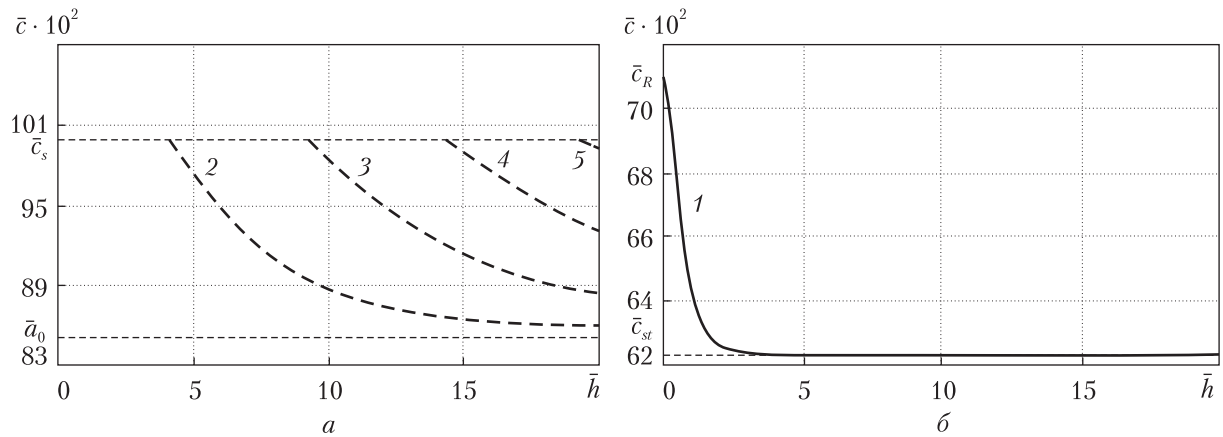


Рис. 2

Характер влияния предварительного сжатия ( $\lambda_1 = 0,8$ ) на скорости нормальных волн в гидроупругих системах иллюстрируют графики на рис. 1, а и 2, б, обозначенные толстыми сплошными линиями.

На всех рисунках для наглядности тонкими штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости мод при возрастании толщины жидкого слоя  $\bar{h}$ .

**Анализ числовых результатов.** Из графиков, представленных на рис. 1, а, следует, что в гидроупругой системе, компонентами которой является слой воды ( $\bar{a}_0 = 46,153442$ ) и упругое полупространство из резины (податливый материал), распространяется лишь одна поверхностная волна. Величина ее фазовой скорости изменяется от скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,955312$  для  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_R = 0,709557$  для  $\lambda_1 = 0,8$ ) при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,859257$  для  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_{st} = 0,650184$  для  $\lambda_1 = 0,8$ ) при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ . В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы резина – вода таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 46,153442$ ) больше скорости рэлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955312$  для  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_R = 0,709557$  для  $\lambda_1 = 0,8$ ). Учитывая результаты, полученные в работе [14], в данной гидроупругой системе это приводит к тому, что в коротковолновой части спектра поверхностная мода, распространяясь вдоль границы раздела сред, локализуется в приконтактных областях как жидкости, так и упругого полупространства. При этом глубина проникания этой поверхностной волны (волна типа Стоунли) в упругое тело больше глубины проникания в жидкость.

На рис. 1, б – 2, б приведены дисперсионные кривые для гидроупругой системы, жидкостной составляющей которой является гипотетическая жидкость со скоростью звука  $\bar{a}_0 = 0,85$ . Как видно из графиков, фазовая скорость первой моды изменяется от скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955313$  для  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_R = 0,709557$  для  $\lambda_1 = 0,8$ ) при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,75318$  для  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{c}_{st} = 0,623644$  для  $\lambda_1 = 0,8$ ) при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ . Скорости мод высокого порядка  $\bar{c}$  изменяются (см. рис. 2, а) от скорости волны сдвига  $\bar{c}_s$  ( $\bar{c}_s = 1$  для  $\lambda_1 = 1$ ) при частотах зарождения до скорости волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,85$ ) при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ .

Из графиков, приведенных на рис. 1, а и 2, б, следует, что начальное сжатие ( $\lambda_1 = 0,8$ ) приводит к понижению фазовых скоростей поверхностных волн.

**Критерий существования квазилэмбовских мод в гидроупругих волноводах.** Анализ дисперсионного уравнения, проведенные дополнительные расчеты и полученные в настоящей работе числовые результаты позволяют установить критерии существования квазилэмбовских мод в упруго-жидкостных волноводах.

В системе, компонентами которой является упругое полупространство и слой жидкости, таким критерием может служить соотношение между скоростью волны звука в жидком слое  $\bar{a}_0$  и скоростью волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ . При  $\bar{a}_0 > \bar{c}_s$ , как видно из графиков, представленных на рис. 1, а и 2, б ( $\bar{a}_0 = 46,153442 > \bar{c}_s = 1$  для  $\lambda_1 = 1$  и  $\bar{a}_0 = 0,85 > \bar{c}_s = 0,8$  для  $\lambda_1 = 0,8$ ), в гидроупругих системах распространяется лишь одна поверхностная волна, скорость которой изменяется от скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  (при  $\bar{h} \rightarrow 0$ ) до скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  (при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ ). В случае выполнения условия  $\bar{a}_0 < \bar{c}_s$  в упруго-жидкостном волноводе распространяется множество квазилэмбовских мод высокого порядка. При этом, как следует из графиков на рис. 1, б и 2, а в системе с гипотетической жидкостью при  $\bar{a}_0 = 0,85 < \bar{c}_s = 1$  для  $\lambda_1 = 1$  на частотном интервале изменения  $\bar{h}$  от 0 до 20 генерируется и распространяется 5 мод. При этом скорость первой моды изменяется от скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  при  $\bar{h} \rightarrow 0$  до скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  при  $\bar{h} \rightarrow \infty$ . Скорости мод высокого порядка изменяются от скорости волны сдвига в упругом теле  $\bar{c}_s$  до скорости звуковой волны в жидкости  $\bar{a}_0$ .

**Влияние конечных начальных деформаций на параметры волновых процессов в гидроупругих системах.** Различия в закономерностях воздействия предварительных деформаций на скорости волн в гидроупругих системах при  $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$  и  $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$  связаны с локализацией этих волн в разных средах [14]. Как показано в работе [14], при  $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$  поверхностная волна 1 распространяется как в жидкости, так и в упругом теле. Этим обусловлено влияние начальных напряжений на эту волну во всем частотном спектре. Начальное сжатие ( $\lambda_1 = 0,8$ ), как следует из графиков на рис. 1, а и 2, б, приводит к понижению фазовых скоростей поверхностных волн во всем интервале частот. Наибольшее влияние предварительные деформации оказывают на скорости этих волн в окрестности частоты их зарождения (запирания).

Влияние больших (конечных) начальных деформаций упругого полупространства на характеристики волнового процесса в упруго-жидкостной системе проявляется не только количественно, но и качественно. Анализ графиков, приведенных на рис. 1, б – 2, б, показывает, что большие (конечные) предварительные деформации могут обусловить не только изменение фазовых скоростей и дисперсионной картины мод, но и более значительное качественное изменение характера волнового процесса в гидроупругой системе в целом. Как видно из рис. 1, б – 2, б, начальное сжатие ( $\lambda_1 = 0,8$ ) изменило соотношение между механическими параметрами системы с  $\bar{a}_0 < \bar{c}_s$  ( $\bar{a}_0 = 0,85 < \bar{c}_s = 1$  при  $\lambda_1 = 1$ ) (рис. 1, б; 2, а) на  $\bar{a}_0 > \bar{c}_s$  ( $\bar{a}_0 = 0,85 > \bar{c}_s = 0,8$  при  $\lambda_1 = 0,8$ ) (рис. 2, б), что привело к преобразованию многомодового волновода в одномодовый. Нетрудно предположить, что в отличие от сжатия начальное растяжение может способствовать обратной трансформации свойств волнопроводов.

Таким образом, анализ полученных числовых результатов показал, что влияние больших начальных деформаций упругого полупространства на характеристики волнового процесса в гидроупругой системе проявляется не только количественно, но и качественно. Конечные предварительные деформации могут привести не только к изменению фазовых скоростей и дисперсионных свойств мод, но и к более существенному изменению пара-

метров волнового процесса в гидроупругой системе в целом. В результате их действия многомодовый волновод может трансформироваться в одномодовый и наоборот.

Предложенный подход и полученные результаты позволяют для волновых процессов установить пределы применимости моделей, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций, а также классической теории упругости.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Babich S.Y., Guz A.N., Zhuk A.P. Elastic waves in bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1979. **15**, № 4. P. 277–291.
2. Bagno A.M., Guz A.N. Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey). *Int. Appl. Mech.* 1997. **33**, № 6. P. 435–463.
3. Guz A.N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. *Int. Appl. Mech.* 2002. **38**, № 1. P. 23–59.
4. Guz A. N., Zhuk A. P., Bagno A. M. Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.* 2016. **52**, № 5. P. 449–507.
5. Guz A. N. Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1980. **16**, № 3. P. 175–190.
6. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: 2 тома. Киев: Наук. думка, 1986. Т. 2. 536 с.
7. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: 2 части. Saarbrücken: LAMBERT Acad. Publ., 2016. Ч. 2. 505 с.
8. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
9. Жук А.П. Волны Стоули в среде с начальными напряжениями. *Прикл. механика*. 1980. **16**, № 1. С. 113–116.
10. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка, 1976. 104 с.
11. Гузь А.Н. Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. Saarbrücken: LAMBERT Acad. Publ. RU, 2017. 244 с.
12. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. 428.
13. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 288 с.
14. Багно А.М. О локализации поверхностных волн в слое идеальной сжимаемой жидкости, взаимодействующем с упругим полупространством. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 1. С. 22–28. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.01.022>

Поступило в редакцию 07.02.2018

#### REFERENCES

1. Babich, S. Y., Guz, A. N. & Zhuk, A. P. (1979). Elastic waves in bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 15, No. 4, pp. 277-291.
2. Bagno, A. M. & Guz, A. N. (1997). Elastic waves in pre-stressed bodies interacting with a fluid (survey). *Int. Appl. Mech.*, 33, No. 6, pp. 435-463.
3. Guz, A. N. (2002). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. *Int. Appl. Mech.*, 38, No. 1, pp. 23-59.
4. Guz, A. N., Zhuk, A. P. & Bagno, A. M. (2016). Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.*, 52, No. 5, pp. 449-507.
5. Guz, A. N. (1980). Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 16, No. 3, pp. 175-190.
6. Guz, A. N. (1986). Elastic waves in bodies with initial stresses. 2 vols. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
7. Guz, A. N. (2016). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. 2 parts. Saarbrücken: LAMBERT Acad. Publ. (in Russian).
8. Guz, A. N. (1998). Dynamics of compressible viscous fluid. Kiev: A.C.K. (in Russian).
9. Zhuk, A. P. (1980). Stoneley waves in a medium with initial stresses. *J. Appl. Mech.*, 16, No. 1, pp. 113-116 (in Russian).
10. Guz, A. N., Zhuk, A. P. & Makhort, F. G. (1976). Waves in layer with initial stresses. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
11. Guz, A. N. (2017). Introduction to dynamics of compressible viscous fluid. Saarbrücken: LAMBERT Acad. Publ. RU (in Russian).



12. Guz, A. N. (2009). Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
13. Viktorov, I. A. (1981). Sound surface waves in solids. Moscow: Nauka (in Russian).
14. Bagno, A. M. (2018). On the localization of surface waves in the layer of an ideal compressible fluid interacting with the elastic half-space. *Dopov. Nac. acad. nauk Ukr.*, No. 1, pp. 22-28 (in Russian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.01.022>

Received 07.02.2018

*О.М. Багно*

Институт механики ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: alexbag2016@gmail.com

### ПРО ВПЛИВ СКІНЧЕННИХ ПОЧАТКОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ НА ПАРАМЕТРИ ХВИЛЬОВОГО ПРОЦЕСУ В СИСТЕМІ, ЩО СКЛАДАЄТЬСЯ З ШАРУ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ ТА ПРУЖНОГО ПІВПРСТОРУ

Розглянуто задачу про поширення нормальних хвиль у попередньо деформованому нестисливому півпросторі, що взаємодіє з шаром ідеальної стисливої рідини. Дослідження проведено на основі тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінченних деформацій для нестисливого пружного півпростору та тривимірних лінеаризованих рівнянь Ейлера для ідеальної стисливої рідини. Застосовано постановку задачі та підхід, засновані на використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для пружного тіла та рідини. Отримано дисперсійне рівняння, яке описує поширення гармонічних хвиль у гідропружній системі. Побудовано дисперсійні криві нормальних хвиль в широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив скінченних початкових деформацій пружного півпростору та товщини шару ідеальної стисливої рідини на фазові швидкості гармонічних хвиль. Запропоновано критерій існування нормальних хвиль у гідропружних хвилеводах. Розвинутий підхід і отримані результати дозволяють встановити для хвильових процесів межі застосування моделей, заснованих на різних варіантах теорії малих початкових деформацій та класичній теорії пружності для твердого тіла. Чисельні результати представлені у вигляді графіків і дано їх аналіз.

**Ключові слова:** *нормальні хвилі, фазова швидкість, нестисливий пружний півпростір, шар ідеальної стисливої рідини, початкові деформації.*

*О.М. Вагно*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: alexbag2016@gmail.com

### ON THE INFLUENCE OF FINITE INITIAL DEFORMATIONS ON PARAMETERS OF A WAVE PROCESS IN THE SYSTEM CONSISTING OF AN IDEAL FLUID LAYER AND THE ELASTIC HALF-SPACE

The problem of propagation of normal waves in a pre-deformed incompressible elastic half-space that interacts with a layer of an ideal compressible fluid is considered. The study is conducted on the basis of the three-dimensional linearized equations of elasticity theory of finite deformations for the incompressible elastic half-space and on the basis of the three-dimensional linearized Euler equations for an ideal compressible fluid. The statement of the problem and the approach based on the use of representations of general solutions of the linearized equations for an elastic solid and a fluid are applied. A dispersion equation, which describes the propagation of harmonic waves in a hydroelastic system, is obtained. The dispersion curves for normal waves over a wide range of frequencies are constructed. The effect of finite initial deformations of the elastic half-space and of the thickness of the layer of an ideal compressible fluid on the phase velocities of harmonic waves are analyzed. A criterion for the existence of normal waves in hydroelastic waveguides is proposed. For the wave processes, an approach developed and the results obtained make it possible to establish the limits of applicability of the models based on different versions of the theory of small initial deformations and of the classical elasticity theory for a solid body. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.

**Keywords:** *normal waves, phase velocity, incompressible elastic half-space, layer of an ideal compressible fluid, initial deformations.*