КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том 17 № 2 2001

УДК 521; 528

О. В. Завізіон

Уманський державний педагогічний університет ім. Павла Тичини
20300, Черкаська обл., м. Умань, вул. Садова 2

Порівняння різних методів описання зовнішнього гравітаційного потенціалу планет-гігантів

Приведено порівняння методів описання гравітаційних потенціалів планет-гігантів у формі двох моделей: системи неоднорідних дисків і двоточкової моделі, параметри яких визначені для планет-гігантів. Динамічні характеристики планет-гігантів взяті з даних астрономічних спостережень.

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ ОПИСАНИЯ ВНЕШНЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ПЛАНЕТ-ГИГАНТОВ, Завизион О. В. — Приведено сравнение методов описания гравитационных потенциалов планет-гигантов в форме двух моделей: системы неоднородных дисков и двухточечной модели, параметры которых определены для планет-гигантов. Динамические характеристики планет-гигантов взяты с данных астрономических наблюдений.

COMPARING DIFFERENT METHODS FOR THE DESCRIPTION OF THE EXTERNAL GRAVITATIONAL POTENTIAL OF GIANT PLANETS, by Zavizion O. V. — We compare various methods used to describe the external gravitational potential of giant planets represented in two forms. They are a system of inhomogeneous disks and a double-point model. Their parameters are determined for giant planets. Dynamical characteristics of giant planets were taken from astronomical observational data.

Будь-яке небесне тіло має власне гравітаційне поле, потенціал якого характеризується внутрішнім розподілом густини і формою, яка залежить від кутової швидкості власного обертання. На даний час існує велика кількість математичних методів описання зовнішнього гравітаційного потенціалу планет. Реальні потенціали планет, визначені за допомогою космічних апаратів і даних астрономічних спостережень, відрізняються від гравітаційних потенціалів моделей небесних тіл. При описанні гравітаційного потенціалу кожен метод дає відносну похибку, величина якої залежить від відстані до планети. Тому для заданої точності існує певна критична відстань, на якій та чи інша модель задовольняє вказану точність.

Таблиця 1. Динамічні характеристики моделей (J_{2n} — гравітаційні моменти двоточково моделі; J^*_{2n} — гравітаційні моменти системи неоднорідних дисків)

Параметри	Юпітер	Сатурн	Уран
$J_2 \cdot 10^2$	1.4697	1.6331	0.351323
$J_2^* \cdot 10^2$	1.47	1.63	0.351
$J_4 \cdot 10^4$	−5.84	−9.14	−0.319
$J_4^* \cdot 10^2$	−5.85	−9.12	−0.322
$J_6 \cdot 10^5$	2.86	13.66	0.0643
$J_6^* \cdot 10^2$	3.475	8.03	0.04784

Розглянемо дві моделі — систему неоднорідних кругових дисків і модель планетарних точкових мас, яка часто використовується при дослідженні гравітаційних полів планет.

Параметри першої моделі визначені в роботі [3]. Динамічні характеристики, які відповідають системі неоднорідних самогравітуючих дисків, подано в табл. 1 (J^*_{2n}). У випадку другої моделі для описання зовнішнього гравітаційного потенціалу планет-гігантів, вважаючи їх осесиметричними фігурами, достатньо розглянути двоточкову модель. Її зовнішній гравітаційний потенціал можна визначити сумою [1, 4]

$$V_2 = \frac{GM}{r}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{r^n} P_n(t)\right\},$$

де $\gamma_n = \dfrac{M_1 a_1^n + M_2 a_2^n}{M}$, $M = M_1 + M_2$, $t = \cos\theta$, M_1 і M_2 — маси точок, a_1 і a_2 — відстані від цих точок до початку координат, $P_n(t)$ — поліноми Лежандра.

Маси M_i і відстані a_i — комплексні величини:

$$M_1 = \frac{M}{2}(1 + i\sigma),\ a_1 = c(\sigma + i),$$

$$M_2 = \frac{M}{2}(1 - i\sigma),\ a_2 = c(\sigma - i).$$

Тоді

$$\gamma_n = \frac{c^n}{2}\left[(1 + i\sigma)(\sigma + i)^n + (1 - i\sigma)(\sigma - i)^n\right].$$

Враховуючи, що $\gamma_n = -J_n a^n$, де J_n — гравітаційні моменти, a — велика піввісь еліпсоїда, параметри c і σ можна виразити, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} c^4(1 + \sigma^2) = J_2 a^2, \\ c^4(1 + \sigma^2)(3\sigma^2 - 1) = J_4 a^4. \end{cases}$$

Отримаємо

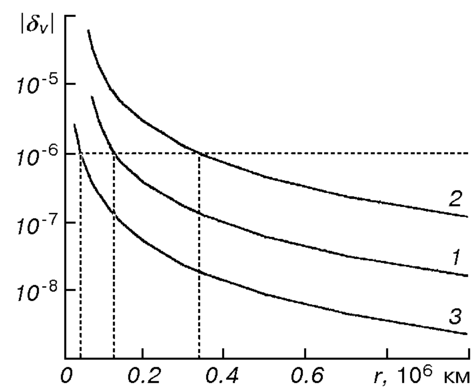
$$\sigma = i\sqrt{\frac{1 - J_2\beta}{1 + 3J_2\beta}},$$

$$c = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3J_2\beta + 1}{\beta}},$$

де $\beta = -J_2/J_4$.

Таблиця 2. Параметри двоточкової моделі

Параметри	Юпітер	Сатурн	Уран
M, 10^{26} кг	18.97	5.68	0.8687
M_1, 10^{26} кг	4.30	1.095	0.20284
M_2, 10^{26} кг	14.67	4.585	0.66586
a, км	71492	60268	25559
c, км	10349.50	9762.68	1790.03
a_1, км	16005.5i	15761.85i	2744.12i
a_2, км	−4693.5i	−3763.51i	−835.94i
σ	0.5465i	0.6145i	0.5330i



Відносна різниця гравітаційних потенціалів двоточкової моделі і моделі системи неоднорідних дисків (1 — Юпітер, 2 — Сатурн, 3 — Уран)

Скориставшись даними астрономічних спостережень для J_2, J_4, знайдемо коефіцієнти σ і c двоточкових моделей планет-гігантів (табл. 2). Різниця між потенціалами для вказаних методів складає

$$\Delta V = \frac{GM}{r}\sum_{n=1}^{\infty}(J_{2n} - J_{2n}^{*})\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}P_{2n}(t),$$

де J_{2n} і J_{2n}^{*} — гравітаційний моменти двоточкової моделі і системи неоднорідних дисків (табл. 1) відповідно.

Відносна різниця між потенціалами для вказаних методів складає

$$\delta_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \sum_{n=1}^{\infty}(J_{2n} - J_{2n}^{*})\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}P_{2n}(t),$$

де $V_0 = GM/r$, чи наближено

$$\delta_V \approx (J_2 - J_2^{*})\left(\frac{a}{r}\right)^{2}P_2(t) + (J_4 - J_4^{*})\left(\frac{a}{r}\right)^{4}P_4(t) + (J_6 - J_6^{*})\left(\frac{a}{r}\right)^{6}P_6(t).$$

З теорії потенціалу відомо [2], що коли зовнішні потенціали рівні на осі симетрії, то вони рівні і в усьому просторі. Тому проводити порівняння будемо на осі симетрії ($\theta = 0$, $t = 1$, $P_{2n}(t) = 1$)

$$\delta_V \approx \Delta_2\left(\frac{a}{r}\right)^{2}\left[1 + \Delta_{2,4}\left(\frac{a}{r}\right)^{2} + \Delta_{6,2}\left(\frac{a}{r}\right)^{4}\right],$$

де $\Delta_2 = J_2 - J_2^{*}$, $\Delta_{2n,2} = \dfrac{J_{2n} - J_{2n}^{*}}{J_2 - J_2^{*}}$.

Побудуємо графік залежності $|\delta_V|(r)$ (рисунок). Як видно з графіка, для точності $|\delta_V| = 10^{-6}$ критичною відстанню різниці потенціалів є: для Юпітера $1.29 \cdot 10^5$ км, для Сатурна $3.36 \cdot 10^5$ км, для Урана $4.7 \cdot 10^4$ км.

Отже, модель системи неоднорідних кругових дисків є досить ефективною для планет-гігантів і описує зовнішній гравітаційний потенціал планети з достатньою точністю, про що говорять результати її порівняння з двоточковою моделлю.

1. *Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г.* Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения спутников Земли // Астрон. журн.—1963.—**40**, № 2.—С. 363—372.
2. *Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников В. В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. — М.: Наука, 1988.—272 с.
3. *Завізіон О. В.* Самогравітуючі диски як засоби описання зовнішніх гравітаційних полів небесних тіл // Кинематика и физика небес. тел.—2000.—**16**, № 5.—С. 477—480.
4. *Машимов М. М.* Планетарные теории геодезии. — М.: Наука, 1982.—261 с.

Надійшла до редакції 20.12.00