ISSN 0233-7665. Кинематика и физика небес. тел. 2002. Т. 18. № 1

УДК 523.4852-35

Э. Г. Яновицкий

Главная астрономическая обсерватория НАН Украины
03680 Киев ГСП, ул. Академика Заболотного 27

Приближенная формула для функции выхода $u(\mu)$ при почти консервативном рассеянии

Рассматривается функция выхода $u(\mu)$ (граничное решение задачи Милна для полубесконечной атмосферы), представленная в виде $u(\mu) = u_0(\mu) + \sqrt{1-\lambda}\, u_1(\mu) + (1-\lambda)u_2(\mu) + \ldots$, где λ — альбедо однократного рассеяния. Найдена достаточно точная приближенная формула для функции $u_0(\mu)$ для не слишком вытянутой индикатрисы рассеяния. Получена также приближенная формула для функции $u_2(\mu)$, которая является точной при простейшей несферической индикатрисе рассеяния.

НАБЛИЖЕНА ФОРМУЛА ДЛЯ ФУНКЦІЇ ВИХОДУ $u(\mu)$ ПРИ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОМУ РОЗСІЯННІ, Яновицький Е. Г. — Розглядається функція виходу $u(\mu)$ (граничний розв'язок задачі Мілна для напівнескінченної однорідної атмосфери), що представлена у вигляді $u(\mu) = u_0(\mu) + \sqrt{1-\lambda}\, u_1(\mu) + (1-\lambda)u_2(\mu) + \ldots$, де λ — альбедо однократного розсіяння. Знайдена доволі точна наближена формула для функції $u_0(\mu)$ при не надто сильно витягнутій індикатрисі розсіяння. Одержана також наближена формула для функції $u_2(\mu)$, яка є точною для найпростішої несферичної індикатриси розсіяння.

APPROXIMATE FORMULA FOR THE ESCAPE FUNCTION $u(\mu)$ FOR NEARLY CONSERVATIVE SCATTERING, by Yanovitskij E. G. — The escape function $u(\mu)$ (i.e., the boundary solution of the Milne problem for a semi-infinite atmosphere) is considered. It is presented in the form $u(\mu) = u_0(\mu) + \sqrt{1-\lambda}\, u_1(\mu) + (1-\lambda)u_2(\mu) + \ldots$, where λ is the single-scattering albedo. A rather accurate approximate formula for a the function $u_0(\mu)$ is obtained for not highly elongated phase function. An approximate expression for the function $u_2(\mu)$ is also derived, it is exact in the case of the most simple anisotropic scattering.

В асимптотической теории переноса излучения в оптически толстых атмосферах функция выхода $u(\mu)$ (граничное решение задачи Милна) играет очень большую роль. Через нее выражаются решения ряда важных задач упомянутой теории (см. соответствующие разделы книг [3, 5, 7]). Поскольку эти решения часто используются для интерпретации результатов наблюдений как в астрофизике, так и в атмосферной оптике, то представляет интерес получение простой и в то же время достаточно точной аналитической формулы для функции $u(\mu)$, что позволит элементарным путем производить соответствующие расчеты.

Представим функцию $u(\mu)$ (μ — косинус угла выхода излучения из атмосферы) в виде

$$u(\mu) = u_0(\mu) + \sqrt{1-\lambda}\,u_1(\mu) + (1-\lambda)u_2(\mu) + \ldots, \tag{1}$$

где λ — альбедо однократного рассеяния. Уже давно В. В. Соболевым была предложена следующая приближенная формула для функции $u_0(\mu)$ [3, гл. VIII, § 4]:

$$u_0(\mu) = u_s(\mu) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\mu \tag{2}$$

при произвольной индикатрисе рассеяния.

В работе [6] (см. также приложение к книге автора [3]) приведены строгие расчеты функции выхода $u(\mu)$ для индикатрисы рассеяния Хеньи—Гринстейна

$$\chi(\cos\gamma) = \frac{1-g^2}{(1+g^2-2g\cos\gamma)^{3/2}} \tag{3}$$

для значений параметра вытянутости $0 \le g \le 0.9$. Выборка значений $u_0(\mu)$ из упомянутых таблиц дана в таблице ниже. В последней ее графе приведены значения функции $u_s(\mu)$.

Как легко видеть, хотя приближенная формула (2) показывает отсутствие зависимости функции выхода от вида индикатрисы рассеяния, в действительности эта зависимость весьма существенна, особенно при малых значениях μ. Например, значение $u_0(0)$ изменяется на 28 % при изменении g от 0 до 0.8. Поэтому очень желательно получить приближенную формулу для функции $u_0(\mu)$, которая бы учитывала зависимость этой функции от индикатрисы рассеяния.

ПРИБЛИЖЕННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ФУНКЦИИ $u_0^a(\mu)$

Будем исходить из строгих формул для функции $u_0(\mu)$, полученных В. В. Соболевым [3, гл. V, VII] для трехчленной индикатрисы рассеяния. Именно,

$$u_0(\mu) = \frac{H_0(\mu)}{2h_1^0}, \tag{4}$$

где функция Чандрасекара $H_0(\mu)$ удовлетворяет уравнению

$$H_0(\mu) = 1 + \mu H_0(\mu)\int_0^1 \Psi_0(\mu)\,\frac{H_0(\mu')}{\mu+\mu'}\,d\mu', \tag{5}$$

а h_1^0 — первый момент этой функции. В данном случае характеристическая функция

$$\Psi_0(\mu) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x_2}{4}(3\mu^2 - 1)\right], \tag{6}$$

где x_2 — второй коэффициент в разложении индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра. При этом выполняются два интегральных соотношения:

$$\int_0^1 H_0(\mu)\Psi_0(\mu)d\mu = 1, \tag{7}$$

$$\int_0^1 H_0(\mu)\Psi_0(\mu)\mu\, d\mu = \sqrt{2}\left[\int_0^1 \Psi_0(\mu)\mu^2 d\mu\right]^{1/2}. \tag{8}$$

Учитывая, что $H_0(0) = 1$, будем искать приближенную формулу для функции $H_0(\mu)$ в виде

$$H_0(\mu) = 1 + b\mu + c\mu\ln\mu. \tag{9}$$

Появление множителя $\ln\mu$ в последнем слагаемом обусловлено теми соображениями, что, как известно (см. [1], § 3.7) при изотропном рассеянии производная $H_0(\mu)$ по μ при $\mu \to 0$ логарифмически расходится.

Подставляя (6) и (9) в (7) и (8), получаем следующую систему уравнений для нахождения постоянных b и c.

$$\begin{gathered}\left(1 - \frac{x_2}{8}\right)b - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x_2}{16}\right)c = 2,\\ \left(1 - \frac{x_2}{5}\right)b - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x_2}{50}\right)c = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{x_2}{5}\right)^{1/2} - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{x_2}{8}\right),\end{gathered} \tag{10}$$

или для индикатрисы (3)

$$\begin{gathered}\left(1 - \frac{5}{8}g^2\right)b - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{16}g^2\right)c = 2,\\ (1 - g^2)b - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{g^2}{10}\right)c = 2\sqrt{3}(1 - g^2)^{1/2} - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{5}{8}g^2\right),\end{gathered} \qquad л(11)$$

Из системы уравнений (11) следует, что определитель этой системы обращается в нуль, если

$$g_c^4 + 49g_c^2 - 80 = 0,$$

откуда $g_c = 0.8508...$ Тогда из (4) и (9) получаем следующую приближенную формулу для функции выхода:

$$u_0^{a}(\mu) = \frac{1 + b\mu + c\mu\ln\mu}{1 + \dfrac{2}{3}\left(b - \dfrac{c}{3}\right)}, \tag{12}$$

где для всех $g \le 0.85$ постоянные и определяются системой уравнений (10) или (11). Результаты расчета функции $u_0^{a}(\mu)$ для различных $0 \le g \le 0.8$ также приведены в таблице. Как видно, приближенная формула (12) для $0 \le g \le 0.8$ (или $0 \le x_1 \le 2.4$) для всех μ дает значения $u_0(\mu)$, которые отличаются от точных не более чем на одну-две единицы второй значащей цифры после запятой. Такая точность вполне приемлема для большинства приложений.

Как известно (см. [3], гл. II, § 6 или [5], формула (3.79)), при $\lambda \to 1$ имеет место следующая строгая асимптотическая формула

$$u_1(\mu) = -\frac{3\gamma_0}{\sqrt{3 - x_1}}\, u_0(\mu), \tag{13}$$

где

$$\gamma_0 = 2\int_0^1 u_0(\mu)\mu^2 d\mu \approx 0.71. \tag{14}$$

Функция выхода при консервативном рассеянии

μ	u_0	u_0^a	u_0	u_0^a	u_0	u_0^a	u_0	u_0^a	u_s
	g = 0		g = 0.5		g = 0.75		g = 0.8		
1.0	1.259	1.252	1.265	1.265	1.270	1.285	1.271	1.285	1.250
0.9	1.182	1.179	1.188	1.188	1.192	1.203	1.193	1.204	1.175
0.8	1.105	1.105	1.109	1.111	1.113	1.126	1.114	1.121	1.100
0.7	1.028	1.030	1.030	1.032	1.033	1.035	1.034	1.036	1.025
0.6	0.950	0.953	0.950	0.951	0.952	0.948	0.952	0.949	0.950
0.5	0.872	0.875	0.869	0.869	0.869	0.852	0.869	0.859	0.875
0.4	0.792	0.795	0.786	0.785	0.783	0.768	0.782	0.767	0.800
0.3	0.711	0.713	0.701	0.697	0.692	0.673	0.690	0.671	0.725
0.2	0.628	0.627	0.612	0.606	0.595	0.573	0.591	0.569	0.650
0.1	0.540	0.536	0.516	0.509	0.484	0.467	0.476	0.460	0.575
0.0	0.433	0.433	0.395	0.396	0.333	0.343	0.312	0.331	0.500

НАХОЖДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ $u_2(\mu)$

По аналогии с формулой (1) представим плоское альбедо $A(\mu)$ для полубесконечной атмосферы в виде разложения

$$A(\mu) = 1 + \sqrt{1-\lambda}\,A_1(\mu) + (1-\lambda)A_2(\mu) + (1-\lambda)^{3/2}A_3(\mu) + \ldots \tag{15}$$

Здесь (см. [3, гл. II, § 5] или [5, § 3.11.6])

$$A_1(\mu) = -\frac{4}{\sqrt{3-x_1}}\,u_0(\mu), \tag{16}$$

$$A_2(\mu) = 3\left[\frac{5}{5-x_2}\,v_0(\mu) + \frac{4\gamma_0}{3-x_1}\,u_0(\mu)\right], \tag{17}$$

где

$$v_0(\mu) = \mu^2 - 2\int_0^1 \rho_0(\mu,\mu')\mu'^3 d\mu', \tag{18}$$

а $\rho_0(\mu,\mu_0)$ — усредненный по азимуту коэффициент отражения полубесконечной атмосферы при консервативном рассеянии.

Как показал И. Н. Минин [2, формула (4.55)]

$$u_2(\mu) = \left[\frac{5\varepsilon_0 - 11}{5-x_2} - \frac{3(2-x_1)}{2(3-x_1)}\right] u_0(\mu) - \frac{\sqrt{3-x_1}}{4}\,A_3(\mu), \tag{19}$$

где

$$\varepsilon_0 = 6\int_0^1 u_0(\mu)\mu^3 d\mu \approx 1.66. \tag{20}$$

При простейшей несферической индикатрисе рассеяния автором [4] была получена следующая строгая формула

$$\frac{\sqrt{3-x_1}}{4}A_3(\mu) = \Big\{(3-x_1)\mu^2 + x_1\gamma_0\mu - r_0(\mu) + \\ + \frac{x_1}{10(3-x_1)}\,[4 + 15\gamma_0^2 - (3-5\gamma_0^2)x_1]\Big\}u_0(\mu), \tag{21}$$

где функция

$$r_0(\mu) = 2\mu \int\limits_0^1 \frac{d\mu'}{\left[4\left(1 - \frac{1}{2}\mu' \ln\frac{1+\mu'}{1-\mu'}\right)^2 + \pi^2\mu'^2\right](\mu + \mu')}. \tag{22}$$

Она затабулирована в работе [4], а также в книге [1], где, в частности, показано, что

$$r_0(1) = 1 - \gamma_0. \tag{23}$$

Для функции $r_0(\mu)$ можно предложить следующую приближенную формулу

$$r_0^{\mathrm{a}}(\mu) = \frac{1-\gamma_0}{\ln 2}\,\mu \ln\left(1 + \frac{1}{\mu}\right), \tag{24}$$

которая дает точное значение этой функции как при $\mu = 1$, так и при $\mu = 0$.

В итоге имеем, что формулу (19) вместе с (21) можно рассматривать как строгую при простейшей несферической индикатрисе рассеяния (тогда в (19) следует положить $x_2 = 0$) и как приближенную при произвольной индикатрисе рассеяния и заданной функцией $u_0(\mu)$.

Для строгой оценки точности этой формулы при произвольной индикатрисе рассеяния следует воспользоваться разложением нулевой гармоники коэффициента отражения

$$\rho(\mu,\mu_0) = \rho_0(\mu,\mu_0) + \sqrt{1-\lambda}\,\rho_1(\mu,\mu_0) + (1-\lambda)\rho_2(\mu,\mu_0) + \ldots \tag{25}$$

и найти величину $\rho_2(\mu,\mu_0)$, через которую непосредственно выражается функция $u_2(\mu)$. Оказывается, что функция $\rho_2(\mu,\mu_0)$ удовлетворяет некому линейному интегральному уравнению, которое может быть решено численно. Этому вопросу будет посвящена отдельная работа.

1. *Иванов В. В.* Перенос излучения и спектры небесных тел. — М.: Наука, 1969.—472 с.
2. *Минин И. Н.* Теория переноса излучения в атмосферах планет. — М.: Наука, 1988.—264 с.
3. *Соболев В. В.* Рассеяние света в атмосферах планет. — М.: Наука, 1972.—335 с.
4. *Яновицкий Э. Г.* К задаче о диффузном отражении монохроматического излучения // Астрометрия и астрофизика.—1968.—Вып. 1.—С. 165—177.
5. *Яновицкий Э. Г.* Рассеяние света в неоднородных атмосферах. — Киев, 1995.—400 с.
6. *Dlugach J. M., Yanovitskij E. G.* The optical properties of Venus and the Jovian planets. II. Methods and results of calculations of the intensity of radiation diffusely reflected from semi-infinite homogeneous atmospheres // Icarus.—1974.—**22**, N 1.—P. 66—81.
7. *Van de Hulst H. C.* Multiple light scattering. Tables, formulas and applications. — New York: Acad. Press, 1980.—Vol I, II.—739 p.

Поступила в редакцию 29.11.01