

УДК 523.9-72

Ю. И. Федоров

Главная астрономическая обсерватория Национальной академии наук Украины
ул. Академика Заболотного 27, Киев, 03143
fedorov@mao.kiev.ua

**Интенсивность космических лучей на начальной
стадии солнечной вспышки**

Распространение солнечных космических лучей в межпланетном пространстве рассмотрено на основе решения уравнения Фоккера — Планка в малоугловом приближении. Источник частиц предполагался мгновенным и точечным. Исследовано пространственно-временное распределение концентрации быстрых частиц на анизотропной фазе вспышки солнечных космических лучей. Также рассмотрен случай продолжительной инжекции частиц в межпланетную среду.

Ключевые слова: космические лучи, кинетическое уравнение, диффузия, магнитные поля.

ВВЕДЕНИЕ

Процесс распространения космических лучей (КЛ) в межпланетной среде является одной из фундаментальных проблем современной астрофизики, так как представляет собой пример взаимодействия заряженных частиц высокой энергии с турбулентными электромагнитными полями, переносимыми плазмой солнечного ветра. Исследование солнечных космических лучей (СКЛ) важно для изучения процессов ускорения частиц в области солнечной вспышки и короне, выхода быстрых частиц из солнечной атмосферы и их распространения в межпланетном пространстве. Энергетические спектры релятивистских протонов, регистрируемые на наземных детекторах КЛ и космических аппаратах, содержат информацию об ускорении частиц и их энергетических распределениях вблизи поверхности Солнца [12, 28, 29].

Солнечные космические лучи могут вызывать значительное повышение радиационного фона в околоземном космическом простран-

ве и верхних слоях земной атмосферы, что представляет опасность для космонавтов и экипажей авиалайнеров, особенно при полетах в полярных областях, влиять на работу бортовых электронных устройств [9, 12, 28]. Наряду с электромагнитными полями и потоками частиц плазмы солнечного ветра, СКЛ являются одним из компонентов, формирующих космическую погоду. Релятивистские частицы СКЛ достигают орбиты Земли раньше, чем межпланетная ударная волна, сопровождающая солнечную вспышку. Поэтому СКЛ часто оказываются предвестниками мощных магнитных бурь и являются важным средством прогноза магнитосферных событий [9, 28].

Заряженные частицы высоких энергий, которые генерируются во время самых мощных солнечных вспышек, регистрируются наземными детекторами КЛ. Данные мировой сети нейтронных мониторов свидетельствуют о том, что условия распространения СКЛ в межпланетной среде могут существенно изменяться от события к событию. Во время некоторых вспышек СКЛ уровень турбулентности межпланетного магнитного поля оказывается низким, рассеяние быстрых частиц на магнитных неоднородностях ослаблено, а транспортный пробег КЛ сравним с расстоянием до источника частиц. Для таких событий СКЛ имеет место быстрое увеличение интенсивности КЛ, а угловое распределение частиц оказывается существенно анизотропным. На начальной фазе таких вспышек СКЛ частицы приходят в точку наблюдения в виде узкого, направленного потока. Анизотропные протонные события характеризуются импульсным всплеском интенсивности КЛ на начальной фазе вспышки. К подобным вспышкам СКЛ относятся, например, события 16 февраля 1984 г. [11], 22 октября 1989 г. [19], 24 мая 1990 г. [15], 20 января 2005 г. [12, 29, 32]. Событие СКЛ 20 января 2005 г. является самым мощным за последние полвека и характеризуется наличием анизотропного потока релятивистских частиц на начальной фазе вспышки [9, 12, 27, 29]. Отметим, что диффузионное описание распространения КЛ во время анизотропных событий становится некорректным, и необходимо пользоваться кинетическим уравнением, описывающим распространение заряженных частиц высоких энергий в межпланетных магнитных полях [3, 8, 16].

В ряде работ распространение КЛ в межпланетной среде рассматривалось на основании кинетического уравнения Больцмана [19, 20, 24—26, 33, 34]. Рассеяние КЛ на неоднородностях магнитного поля в данном случае представлено интегралом столкновений, соответствующим рассеянию частиц на произвольные (в том числе значительные) углы. Перенос КЛ в межпланетной среде исследован на основе кинетического уравнения Фоккера — Планка в работах [3, 5, 7, 16, 23, 25, 31]. Кинетическое уравнение Фоккера — Планка соответствует многократному рассеянию частиц на малые углы, а соответствующий интеграл столкновений описывает диффузию КЛ в импульсном пространстве. В работах [3, 5, 16] рассмотрено распространение КЛ в межпланетной среде при наличии сильного регулярного магнитного поля. Частицы предполагаются движущимися преимущественно вдоль

среднего магнитного поля (малые значения питч-угла θ), а их рассеяние при взаимодействии с магнитными неоднородностями происходит на небольшой угол. Решение кинетического уравнения Фоккера — Планка во втором приближении по углу θ получено в работах [9, 31]. Пространственно-временное распределение СКЛ в анизотропных протонных событиях исследовалось как на основании решения кинетического уравнения Фоккера — Планка [7], так и кинетического уравнения Больцмана [21]. Численное решение кинетического уравнения Фоккера — Планка получено, например, в работах [2, 14, 17, 30].

В настоящей работе рассмотрено распространение СКЛ в межпланетной среде на основании кинетического уравнения Фоккера — Планка, описывающего многократное рассеяние частиц на малые углы. Рассмотрено диффузионное приближение, справедливое на масштабах времен, значительно превышающих характерное время столкновений. На основе решения кинетического уравнения, соответствующего рассеянию частиц на малые углы, рассмотрена начальная фаза анизотропной вспышки СКЛ. Полученное решение применимо на расстояниях от источника частиц, меньших транспортного пробега КЛ. Получен образ Лапласа функции распределения КЛ, проанализировано пространственно-временное распределение концентрации СКЛ на начальной стадии вспышки. Рассмотрен случай продолжительной инжекции быстрых частиц в межпланетную среду.

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Будем исходить из кинетического уравнения, описывающего распространение заряженных частиц высокой энергии в межпланетных магнитных полях [3, 16, 22, 33]:

$$\frac{f}{t} \cos \frac{f}{r} - \sin \frac{f}{r} \frac{f}{2 \sin} - \sin \frac{f}{r} Q, \quad (1)$$

где $f(r, t)$ — функция распределения КЛ, θ — угол между вектором скорости частицы \mathbf{v} и радиальным направлением, l — транспортный пробег КЛ. Первый член в правой части кинетического уравнения (1) описывает процесс рассеяния частиц на неоднородностях магнитного поля. Предполагаем, что функция распределения КЛ зависит от единственной пространственной координаты r . В правую часть кинетического уравнения входит мгновенный источник частиц Q , расположенный в начале координат:

$$Q = \frac{\delta(r) \delta(t) \delta(\theta)}{8 \pi^2 r^2 \sin \theta}. \quad (2)$$

Введем безразмерные переменные

$$\frac{r}{l}, \quad \frac{t}{l/v}. \quad (3)$$

Таким образом, расстояние будет измеряться в длинах пробега КЛ λ , а время — в характерных временах рассеяния τ . В безразмерных переменных кинетическое уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{df}{dt} + \cos \theta \frac{df}{d\theta} - \frac{\sin \theta}{\theta} \frac{df}{d\theta} = \frac{1}{2\sin \theta} \frac{df}{d\theta} - \sin \theta \frac{df}{d\theta} = Q. \quad (4)$$

ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Пусть время, прошедшее после инъекции частиц, значительно превышает характерное время между столкновениями τ , а рассматриваемые пространственные масштабы велики по сравнению с транспортным пробегом λ . В этом случае функция распределения КЛ близка к изотропной, и для описания распространения частиц можно воспользоваться диффузионным приближением. Представим функцию распределения КЛ в виде разложения по сферическим гармоникам, ограничившись только первым членом разложения:

$$f(r, t, \theta) = \frac{1}{4} N(r, t) + \frac{3}{4} j(r, t) \cos \theta, \quad (5)$$

где

$$N(r, t) = \int_0^\pi f(r, t, \theta) \sin^2 \theta d\theta \quad (6)$$

— концентрация частиц. Интегрирование в правой части уравнения (6) проводится по углам вектора скорости частицы. Анизотропия углового распределения частиц пропорциональна потоку частиц, который имеет вид

$$j(r, t) = \int_0^\pi f(r, t, \theta) \sin \theta d\theta. \quad (7)$$

Умножив кинетическое уравнение (1), (2) на $\sin \theta$ и проинтегрировав по углу θ , получим уравнение

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 j) - \frac{j(r)}{4 r^2}, \quad (8)$$

представляющее собой закон сохранения числа частиц. Согласно уравнению (8) изменение числа частиц в единице объема обусловлено наличием потока КЛ $j(r, t)$, который имеет радиальное направление. Умножив кинетическое уравнение на $\sin^2 \theta$ и проинтегрировав по углу θ , получим уравнение для потока КЛ. Если пренебречь производной по времени от потока частиц, учесть, что время t значительно превосходит характерное время рассеяния КЛ ($t \gg \tau$), и ограничиться лишь двумя членами разложения функции распределения КЛ по сферическим гармоникам (5), получим следующее выражение для потока частиц:

$$j = \frac{N}{r}, \quad (9)$$

где

$$\frac{1}{3} \quad (10)$$

— коэффициент диффузии КЛ.

Подставим выражение для потока КЛ (9) в уравнение непрерывности (8) и перейдем к безразмерным переменным (3). В результате получим уравнение диффузии КЛ:

$$\frac{N}{3} \frac{1}{r^2} \frac{dN}{dr} = \frac{1}{4} \frac{d^2N}{dr^2}. \quad (11)$$

Применив преобразование Лапласа

$$N(r, s) = d \exp(-sr) N(s), \quad (12)$$

получим следующее уравнение для образа Лапласа концентрации частиц $N(r, s)$:

$$\frac{1}{2} \frac{dN}{ds} = \frac{N}{3} \frac{d^2N}{ds^2}. \quad (13)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$N(r, s) = C \frac{\exp(-\sqrt{3}sr)}{s}. \quad (14)$$

Постоянную величину C можно найти, проинтегрировав уравнение (13) по координате r . Получим соотношение для образа Лапласа концентрации частиц:

$$N(r, s) = \frac{3}{4} \frac{\exp(-\sqrt{3}sr)}{s^3}. \quad (15)$$

Образу Лапласа (15) соответствует следующее выражение для концентрации КЛ [1]:

$$N(r, t) = \frac{1}{8} \frac{3}{t^3} \exp\left(-\frac{3r^2}{4t}\right). \quad (16)$$

В переменных r, t концентрация КЛ имеет вид

$$N(r, t) = \frac{1}{8} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right). \quad (17)$$

На рис. 1 представлена зависимость концентрации КЛ (16) от безразмерной координаты в различные моменты времени. Сплошная кривая соответствует моменту времени $t = 1$, штриховая — $t = 1.5$, а пунктирная описывает пространственное распределения частиц в мо-

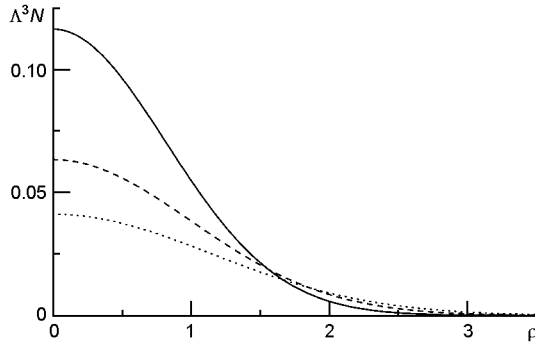


Рис. 1. Пространственная зависимость концентрации частиц в различные моменты времени. Диффузионное приближение. Сплошная кривая — $t = 1$, штриховая — $t = 1.5$, пунктирная — $t = 2$

мент времени $t = 2$. С течением времени максимальное значение концентрации КЛ, которое имеет место в начале координат, уменьшается, а пространственное распределение КЛ расширяется. Концентрация КЛ монотонно уменьшается с увеличением координаты ρ , а объем пространства, занимаемый частицами, увеличивается. Отметим, однако, что концентрация КЛ оказывается отличной от нуля в той области пространства, куда частицы еще не должны были попасть в силу конечности их скорости (рис. 1). Например, в момент времени $t = 1$ в области пространства $\rho > 1$ концентрация КЛ N оказывается отличной от нуля (рис. 1). В то же время, если после мгновенной инъекции частиц со скоростью v в точке $r = 0, t = 0$ прошло время t , то пространственная область $r > vt$ должна быть недоступна для частиц.

Данное обстоятельство присуще диффузионному описанию процесса распространения частиц и обусловлено приближениями, сделанными при выводе уравнения диффузии КЛ. Отметим, что при исследовании распространения частиц на основе кинетического уравнения подобных противоречий не возникает.

РАССЕЯНИЕ НА МАЛЫЕ УГЛЫ. ПРИБЛИЖЕНИЕ 1

Рассмотрим решение кинетического уравнения в случае рассеяния частиц на малые углы. Предположим, что направление движения частицы мало отличается от радиального $\theta \approx 1$. В данном приближении кинетическое уравнение (4) приобретает вид [3, 7, 16]

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \rho^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} = \frac{(\tilde{f}) (\tilde{f}) (\tilde{f})}{8 \rho^2 \rho^3 \rho^2}. \quad (18)$$

Будем искать решение кинетического уравнения (18) в виде [3]

$$\tilde{f}(\rho, t) = f(\rho, t) \left(\frac{\rho}{t} \right). \quad (19)$$

Функция $f(\rho, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{f(\rho, t) f(\rho, t) f(\rho, t)}{8 \rho^2 \rho^3 \rho^2}. \quad (20)$$

Перейдем к новым переменным

$$\frac{1}{3} \tau^3, \quad \tau = \frac{1}{2} \sqrt{2} x. \quad (21)$$

Запишем уравнение (20) в новых переменных:

$$\frac{f}{2} \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\tau} - \frac{f}{8} \frac{(\tau)}{\tau^2} \frac{d}{d\tau} = 0. \quad (22)$$

Выполнив преобразование Лапласа

$$f(\tau, \tau) = \int_0^\infty \exp(-\tau x) f(x, \tau) dx, \quad (23)$$

получим уравнение

$$-\frac{f}{2} \frac{1}{\tau} \frac{d}{d\tau} + \frac{f}{4} \frac{1}{\tau^2} \frac{d}{d\tau} = 0. \quad (24)$$

Сделаем замену переменной

$$x = \sqrt{2} \tau, \quad (25)$$

приходим к модифицированному уравнению Бесселя для образа Лапласа функции распределения КЛ $f(\tau, x)$:

$$-\frac{f}{x} \frac{d}{dx} + \frac{f}{4} \frac{d^2}{dx^2} = 0, \quad (26)$$

решение которого имеет вид

$$f(x) = CK_0(x), \quad (27)$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда. Постоянную величину C можно найти, проинтегрировав уравнение (26) по переменной x :

$$\int_0^\infty dx x f(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{\tau^3}. \quad (28)$$

Учитывая соотношение [4]

$$\int_0^\infty dx x K_0(x) = 1, \quad (29)$$

получаем следующее выражение для образа Лапласа функции распределения КЛ:

$$f(\tau, \tau) = \frac{1}{4} \frac{1}{\tau^3} K_0(\sqrt{2} \tau). \quad (30)$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа [1] и принимая во внимание соотношение (19), получаем следующее выражение для функции распределения КЛ:

$$\tilde{f}(\theta, \varphi, t) = \frac{3}{8} \frac{t^2}{r^3} \exp\left(-\frac{3}{2} \frac{t^2}{r}\right) \quad (31)$$

В переменных r, t данная формула приобретает вид

$$\tilde{f}(r, t, \theta) = \frac{3}{8} \frac{t^2}{r^3} \exp\left(-\frac{3}{2} \frac{t^2}{r}\right) \quad (32)$$

Отметим, что в рассматриваемом приближении ($\theta \ll 1$) все частицы, испущенные мгновенным точечным источником, в момент времени t находятся на сфере радиуса $r = \sqrt{2} t$. Согласно формуле (32) угловое распределение СКЛ на ранней стадии вспышки имеет гауссов вид, причем квадрат среднего угла рассеяния частиц увеличивается пропорционально времени, прошедшему после их инъекции.

Если транспортный пробег КЛ значительно превосходит расстояние до источника частиц r , то функция распределения КЛ (32) имеет резкий максимум в точке $\theta = 0$. В данном случае концентрация КЛ (6) описывается приближенным соотношением

$$N(r, t) = 2 \int_0^{\pi} f(r, t, \theta) \sin \theta d\theta \quad (33)$$

Верхний предел в формуле (33) может быть распространен до бесконечности, так как учитывается только рассеяние на малые углы $\theta \ll 1$. Используя соотношение (32), получим следующее выражение для концентрации частиц:

$$N(r, t) = \frac{(\sqrt{2} t - r)^2}{4 r^2} \quad (34)$$

Таким образом, при рассеянии на малые углы частицы, движущиеся преимущественно в радиальном направлении, расположены на сфере радиуса $r = \sqrt{2} t$, а их концентрация уменьшается обратно пропорционально квадрату времени, прошедшему с момента их инъекции.

РАССЕЯНИЕ НА МАЛЫЕ УГЛЫ. ПРИБЛИЖЕНИЕ $\theta^2 \ll 1$

Рассмотрим распространение частиц в следующем приближении по углу между направлением движения частицы и радиальным направлением. Предположим, что выполняется условие $\theta^2 \ll 1$. В кинетическом уравнении (1) заменим величину $\sin \theta$ на θ , а $\cos \theta$ — на $1 - \theta^2/2$. В рассматриваемом приближении кинетическое уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{f}{r} = \frac{f}{2} - \frac{f}{8} \frac{(r-t)^2}{r^2} \quad (35)$$

Запишем кинетическое уравнение (35) в безразмерных переменных:

$$\frac{f}{(1 - \dots)} - \frac{f}{2} \frac{f}{2} - \frac{f}{8} \frac{(\dots)(\dots)(\dots)}{2^3 2^2}, \quad (36)$$

где

$$\frac{2}{2}. \quad (37)$$

Введем новую переменную

$$(38)$$

и запишем кинетическое уравнение (36) в новых переменных, удерживая первые неисчезающие члены [7]:

$$\frac{f}{2} \frac{f}{2} \frac{2}{2} \frac{f}{2} - \frac{f}{8} \frac{(\dots)(\dots)(\dots)}{2^3 2^2}. \quad (39)$$

Отметим, что в отличие от кинетического уравнения (20), в уравнении (39) есть слагаемое, пропорциональное производной по переменной (38). Такой подход позволяет получить временной профиль интенсивности СКЛ, который отличается от импульсного всплеска интенсивности частиц в момент времени $t = r/c$, рассмотренного в предыдущем разделе статьи.

Выполнив преобразование Лапласа

$$f(x, y, z) = \int_0^\infty d \exp(-\dots) f(x, y, z), \quad (40)$$

получим следующее уравнение для образа Лапласа функции распределения КЛ:

$$f - \frac{f}{2} \frac{2}{2} \frac{f}{2} - \frac{f}{8} \frac{(\dots)(\dots)}{2^3 2^2}. \quad (41)$$

После замены переменной

$$2 \quad (42)$$

уравнение (41) принимает вид

$$-\frac{f}{2} \frac{f}{2} \frac{2}{2} - \frac{f}{8} \frac{(\dots)(\dots)}{2^3 2^2}. \quad (43)$$

Решение уравнения (43) ищем в виде [7]

$$f(x, y) = \tilde{f}(x, y) U(x), \quad (44)$$

где $U(x)$ — единичная функция Хевисайда.

Функция $\tilde{f}(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\tilde{f}}{2} \frac{\tilde{f}}{2} \frac{2}{2} - \frac{\tilde{f}}{8}. \quad (45)$$

и граничному условию

$$\tilde{f}(0, \cdot) = \frac{1}{8} \frac{1}{x^2} \left(\cdot \right). \quad (46)$$

Ищем решение уравнения (45) в виде

$$\tilde{f}(x, \cdot) = h(\cdot) \exp(g(x)), \quad (47)$$

где $g(x)$ и $h(\cdot)$ — новые неизвестные функции. Подставив функцию \tilde{f} (47) в уравнение (45), получаем следующую систему уравнений

$$-\frac{g}{x} - x^2 g' - \frac{1}{2} = 0, \quad (48)$$

$$\frac{1}{h} \frac{h'}{x} = x^2 g'. \quad (49)$$

Уравнение (48) представляет собой уравнение Риккати. При помощи замены функции

$$w(x) = \exp(-d \int x^2 dx) \quad (50)$$

уравнение (48) приводится к линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$-\frac{w''}{x} - \frac{2}{x} \frac{w'}{x} - w = 0. \quad (51)$$

Функция $g(x)$ может быть вычислена согласно соотношению

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \frac{w'(x)}{w(x)}. \quad (52)$$

Ищем решение уравнения (51) в виде

$$w(x) = C x^{3/2} \left(\cdot \right). \quad (53)$$

Для функции получим следующее уравнение:

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{w}{x^2} \right) - \frac{9}{4} \frac{w}{x^2} = 0, \quad (54)$$

решение которого имеет вид

$$\left(\cdot \right) = I_{3/2}(\sqrt{\cdot}), \quad (55)$$

где $I_{3/2}(x)$ — модифицированная функция Бесселя. Функция $w(x)$ (53) приобретает вид

$$w(x) = C x^{3/2} I_{3/2}(\sqrt{x}). \quad (56)$$

Функция $I_{3/2}(x)$ может быть выражена через элементарные функции [6]. Таким образом, приходим к следующему соотношению для функции w :

$$w(\rho) = \frac{C}{3/2} \{ \sqrt{\rho} \operatorname{ch}(\sqrt{\rho}) - \operatorname{sh}(\sqrt{\rho}) \}. \quad (57)$$

Проинтегрировав соотношение (49), приходим к выражению

$$h(\rho) = \exp(-d^2 g(\rho)). \quad (58)$$

Принимая во внимание формулу (50), удастся получить соотношение

$$h(\rho) = \frac{1}{w(\rho)}. \quad (59)$$

Таким образом, функцию распределения КЛ (47) можно представить в виде

$$\tilde{f}(\rho, \theta) = \frac{1}{w(\rho)} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{w(\rho)}{w(\rho)}\right). \quad (60)$$

Запишем выражение для функции распределения КЛ (60) в случае выполнения неравенства $\rho \ll 1$ (вблизи начала координат)

$$\tilde{f}(\rho, \theta) = \frac{3}{C} \exp\left(-\frac{3}{2}\rho\right). \quad (61)$$

Проинтегрировав уравнение (46) по переменной θ , получим соотношение для определения постоянной C :

$$C = 8^{-2/3}. \quad (62)$$

Учитывая (62), получим следующее выражение для функции w (57):

$$w(\rho) = \frac{8^{-2/3}}{3/2} \{ \sqrt{\rho} \operatorname{ch}(\sqrt{\rho}) - \operatorname{sh}(\sqrt{\rho}) \}. \quad (63)$$

Производная этой функции по пространственной переменной имеет вид

$$\frac{w(\rho)}{\rho} = 8^{-2/3} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho}}. \quad (64)$$

Полученные соотношения позволяют записать выражение для образа Лапласа функции распределения КЛ:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\rho, \theta, \theta) &= \frac{3/2}{8^{-2/3}} \frac{1}{\sqrt{\rho} \operatorname{ch}(\sqrt{\rho}) - \operatorname{sh}(\sqrt{\rho})} \\ &\exp\left(-\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\rho})}{\sqrt{\rho} \operatorname{ch}(\sqrt{\rho}) - \operatorname{sh}(\sqrt{\rho})} \frac{\rho}{2}\right). \end{aligned} \quad (65)$$

В данной работе ограничимся рассмотрением пространственно-временного распределения концентрации N частиц (33). Согласно формуле (60) получим

$$N(r, t) = \frac{2}{w(r, t)_0} d \exp \left[\frac{1}{w(r, t)} \right]. \quad (66)$$

Выполнив интегрирование, получим

$$N(r, t) = \frac{2}{w(r, t)}, \quad (67)$$

где производная функции w по пространственной переменной удовлетворяет соотношению (64). Таким образом, образ Лапласа концентрации КЛ имеет вид

$$N(r, t) = \frac{\sqrt{t}}{4 t^3 \operatorname{sh}(\sqrt{t})}. \quad (68)$$

Обратное преобразование Лапласа дается формулой

$$N(r, t) = \frac{1}{2 i_L} d N(r, t) \exp(\dots), \quad (69)$$

где переменная определена соотношением (38), а интегрирование в формуле (69) проводится по прямой L , параллельной мнимой оси и расположенной в правой полуплоскости комплексной переменной.

Замкнем контур интегрирования дугой бесконечно большого радиуса, расположенной в левой полуплоскости комплексной переменной. Отметим, что интеграл по этой дуге равен нулю. Интегрирование по замкнутому контуру, состоящему из прямой L и дуги бесконечно большого радиуса, сводится к вычислению вычетов в особых точках функции $N(r, t)$ (68). Корни знаменателя функции $N(r, t)$ (68) расположены на отрицательной части действительной оси в точках

$$n = \frac{n^2 - 2}{2}, \quad (70)$$

а образ Лапласа концентрации КЛ на действительной оси комплексной переменной имеет вид

$$N(r, t) = \frac{\sqrt{|t|}}{4 t^3 \sin(\sqrt{|t|})}. \quad (71)$$

Вычислив вычеты подынтегральной функции в точках n (70), и учитывая соотношение (38) для переменной t , получим следующее выражение для концентрации КЛ

$$N(r, t) = \frac{1}{2^{3/4} n^{1/4}} (1)^n n^2 \exp \left[\frac{n^2 - 2}{2} \right]. \quad (72)$$

В переменных r, t концентрация КЛ (72) имеет вид

$$N(r, t) = \frac{1}{2r^{4-n-1}} (1-n)^{-1} n^2 \exp\left(-\frac{n^2}{r^2} (t-r)\right). \quad (73)$$

На рис. 2 представлено пространственное распределение концентрации КЛ (72) в различные моменты времени. Значения параметра приведены у соответствующих кривых. В момент времени t концентрация КЛ равна нулю в пространственной области $r > t$ (рис. 2). В момент времени t все частицы находятся внутри сферы $r = t$ причем, концентрация КЛ максимальна вблизи границы области, занятой частицами. Максимальное значение концентрации КЛ уменьшается с течением времени, а пространственная область, занятая частицами, расширяется (рис.2).

Зависимость концентрации КЛ от времени представлена на рис. 3. Значения безразмерной координаты ρ приведены у соответствующих кривых. Сплошные кривые соответствуют кинетическому рассмотрению процесса распространения КЛ, когда концентрация частиц удовлетворяет соотношению (72). Пунктирные кривые на рис. 3 представляют концентрацию КЛ (16), полученную в рамках диффузионного приближения. В отличие от результатов диффузионного приближения, при кинетическом подходе частицы в точке $\rho = 0$ появляются в момент времени $\tau = 0$, а затем концентрация КЛ быстро увеличивается до максимального значения (рис. 3). Максимум концентрации КЛ оказы-

Рис. 2. Пространственная зависимость концентрации частиц в различные моменты времени. Решение кинетического уравнения

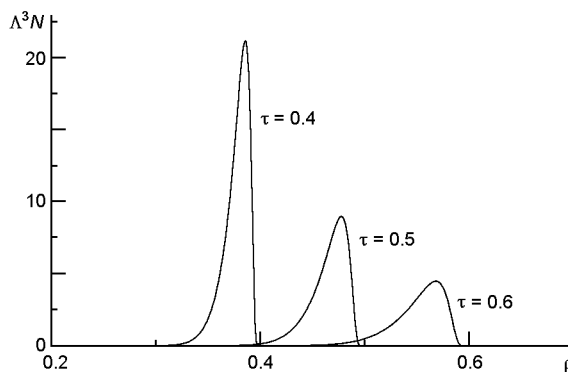
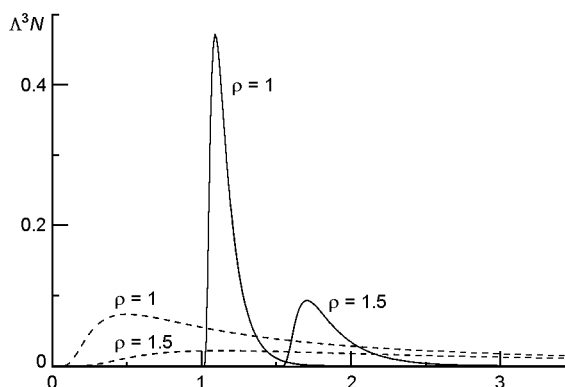


Рис. 3. Зависимость концентрации частиц от времени



вается тем большим, чем меньше расстояние до мгновенного источника частиц. После достижения максимального значения концентрация КЛ быстро уменьшается со временем. Отметим, что рассматриваемое приближение соответствует рассеянию частиц на малые углы и справедливо для времени t , которое меньше, чем характерное время рассеяния КЛ τ . Если $t \gg \tau$, то приведенное рассмотрение оказывается некорректным, но можно воспользоваться результатами диффузионного приближения. Видно, что при больших значениях пунктирные кривые, которые соответствуют концентрации КЛ в диффузионном приближении, расположены выше соответствующих сплошных кривых (рис. 3).

ДЛИТЕЛЬНАЯ ИНЖЕКЦИЯ ЧАСТИЦ

Экспериментальные данные, полученные на мировой сети нейтронных мониторов и на космических аппаратах, свидетельствуют о продолжительной инжекции СКЛ в межпланетное пространство. Длительность инжекции в межпланетное магнитное поле частиц, ускоренных во время солнечных вспышек, существенно изменяется от события к событию. Для релятивистских протонов длительность инжекции составляет от порядка минуты до нескольких десятков минут [10, 11, 18, 32]. На длительный характер испускания СКЛ указывает также величина анизотропии, которая остается значительной на протяжении ряда протонных событий [10, 11, 18].

При длительной инжекции частиц необходимо воспользоваться иным выражением для источника частиц Q , который содержится в правой части кинетического уравнения (1). Мгновенный источник КЛ (2) пропорционален дельта-функции от времени. Заменим величину $\delta(t)$ некоторой функцией времени $f(t)$, которая описывает временной профиль инжекции СКЛ.

Таким образом, источник частиц примет следующий вид:

$$Q = \frac{f(r) f(t) f(\theta)}{8 \pi^2 r^2}, \quad (74)$$

причем функция инжекции КЛ удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\infty dt f(t) = 1. \quad (75)$$

При выполнении данного условия во время вспышки испускается столько же частиц, что и при их мгновенной инжекции, однако испускание частиц происходит за конечное время.

При продолжительной инжекции частиц концентрацию СКЛ можно вычислить как свертку концентрации КЛ, соответствующей мгновенному источнику частиц, и функции $f(t)$, определяющей временной профиль инжекции. В безразмерных переменных концентрация КЛ имеет вид

$$\tilde{N}(r, t) = d N(r, t) (r, t), \quad (76)$$

где величина N соответствует концентрации КЛ при мгновенной инжекции частиц.

Рассмотрим источник КЛ, интенсивность которого уменьшается со временем по экспоненциальному закону. Такому источнику соответствует функция инжекции

$$j(t) = \frac{1}{t_{in}} \exp\left(-\frac{t}{t_{in}}\right), \quad (77)$$

где t_{in} — характерное время инжекции.

На рис. 4 приведена зависимость концентрации КЛ от времени при длительной инжекции частиц (76). Значения концентрации КЛ приведены в точке $r = 1$, т. е. на расстоянии одного транспортного пробега от источника СКЛ. Значения безразмерного времени инжекции частиц ($t_{in} = \tau_{in} / \tau_0$) приведены у соответствующих кривых. Штриховая кривая соответствует импульсной инжекции частиц. Отметим, что для частиц, движущихся со скоростью, близкой к скорости света, и транспортным пробегом 0.1 а. е., параметру $t_{in} = 1$ соответствует характерная длительность инжекции СКЛ $t_{in} = 0.5$ мин, а если $\tau_0 = 1$ а. е., то при $t_{in} = 1$ характерное время инжекции частиц составляет около 30 мин. Если безразмерное время инжекции КЛ оказывается значительно меньшим единицы (например $t_{in} = 0.01$), то временной профиль интенсивности СКЛ в точке $r = 1$ мало отличается от временного профиля интенсивности СКЛ при мгновенном источнике частиц. При увеличении длительности инжекции максимум интенсивности КЛ уменьшается и сдвигается в область более поздних времен, а зависимость концентрации КЛ от времени становится плавной (рис. 4). Например, кривая, соответствующая значению параметра $t_{in} = 1$, характеризуется отсутствием резкого максимума и медленным изменением концентрации КЛ со временем, в отличие от кривых, иллюстрирующих временную зависимость концентрации частиц при менее длительной их инжекции (рис. 4). При этом максимальное значение концентрации КЛ в точке $r = 1$ при $t_{in} = 1$ оказывается на порядок меньшим, чем соответствующее значение при импульсной инжекции частиц.

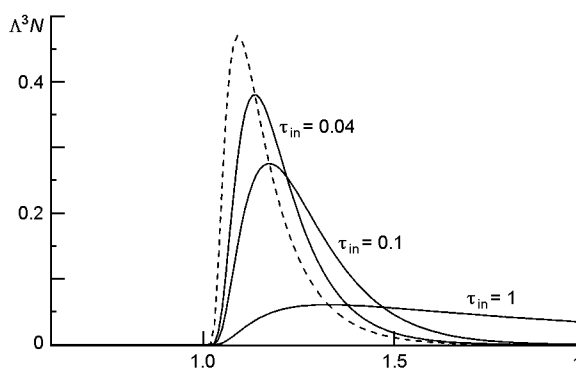


Рис. 4. Зависимость концентрации частиц от времени при их длительной инжекции

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено распространение СКЛ в межпланетной среде на основе кинетического уравнения, описывающего рассеяние частиц на малые углы. Данное малоугловое приближение применимо, если расстояние до источника частиц не превышает величину транспортного пробега КЛ. Показано, что в первом приближении по малому углу угловое распределение СКЛ имеет гауссов вид, а все частицы, испущенные мгновенным точечным источником в начальный момент времени, в момент t находятся на сфере радиусом $r \approx vt$.

Во втором приближении по углу получено выражение для образа Лапласа функции распределения КЛ и соотношение, описывающее пространственно-временное распределение концентрации частиц. Показано, что в момент времени t частицы, инжектированные мгновенным источником, находятся внутри сферы радиусом $r \approx vt$, причем концентрация КЛ максимальна вблизи границы области, занятой частицами. В данной точке пространства частицы появляются в момент времени t , их концентрация быстро увеличивается и быстро уменьшается после достижения максимального значения. Таким образом, на начальной стадии анизотропной вспышки СКЛ имеет место резкий всплеск интенсивности частиц.

Также рассмотрен случай продолжительной инъекции СКЛ в межпланетную среду. Показано, что при увеличении длительности инъекции максимум интенсивности СКЛ в данной точке пространства уменьшается и наступает позднее, а временной профиль интенсивности КЛ становится более плавным.

Автор благодарит Б. А. Шахова за полезное обсуждение.

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
2. Базилевская Г. А., Голынская Р. М. О распространении солнечных космических лучей в межпланетной среде с учетом адиабатической фокусировки. *Геомагнетизм и астрономия*. 1989. 29. № 2. С. 204—209.
3. Гальперин Б. А., Топтыгин И. Н., Фрадкин А. А. Рассеяние частиц магнитными неоднородностями в сильном магнитном поле. *Журн. эксперим. и теор. физ.* 1971. 60. № 3. С. 972.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963. 1108 с.
5. Дорман Л. И., Кац М. Е. О флуктуациях интенсивности солнечных космических лучей. Тр. 5-го Ленинградского международного семинара. Л.: ФТИ, 1973. С. 311—321.
6. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978. 320 с.
7. Топтыгин И. Н. О временной зависимости интенсивности космических лучей на анизотропной стадии солнечных вспышек. *Геомагнетизм и астрономия*. 1972. 12. № 6. С. 989—995.
8. Топтыгин И. Н. Космические лучи в межпланетных магнитных полях. М.: Наука, 1983. 304 с.

9. Bieber J. W., Clem J., Evenson P., et al. Giant ground level enhancement of relativistic solar protons on 2005 January 20. *Astrophys. J.* 2013. 771. 52 (13 p.).
10. Bieber J. W., Earl J. A., Green G., et al. Interplanetary pitch-angle scattering and coronal transport of solar energetic particles: New information from Helios. *J. Geophys. Res.* 1980. 85. N A5. P. 213.
11. Bieber J. W., Evenson P. A., Pomerantz M. A. Focusing anisotropy of solar cosmic rays. *J. Geophys. Res.* 1986. 91. N A8. P. 8713.
12. Bombardieri D. J., Duldig M. L., Humble J. E., Michael K. J. On improved model for relativistic solar proton acceleration applied to the 2005 January 20 and earlier events. *Astrophys. J.* 2008. 682. P. 1315—1327.
13. Cramp J. L., Duldig M. L., Fluckiger E. O., Humble J. E., Shea M. A., Smart D. F. The October 22, 1989 solar cosmic ray enhancement: An analysis of the anisotropy and spectral characteristic. *J. Geophys. Res.* 1997. 102. P. 24237—24248.
14. Danos R. J., Fiege J. D., Shalchi A. Numerical analysis of the Fokker-Planck equation with adiabatic focusing: Isotropic pitch angle scattering. *Astrophys. J.* 2013. 772. 35 (12 p.).
15. Debrunner H., Lockwood J. A., Ryan J. M. The solar flare event on 1990 May 24: Evidence for two separate particle accelerations. *Astrophys. J.* 1992. 387. N 1. P. L51—L54.
16. Dorman L. I., Katz M. E. Cosmic ray kinetics in space. *Space Sci. Rev.* 1977. 70. P. 529—575.
17. Droge W., Kartavych Y. Y., Klecker B., Kovaltsov G. A. Anisotropic three-dimensional focused transport of solar energetic particles in the inner heliosphere. *Astrophys. J.* 2010. 709. P. 912—919.
18. Duggal S. P. Relativistic solar cosmic rays. *Rev. Geophys. Space Phys.* 1979. 17. N 5. P. 1021—1058.
19. Fedorov Yu. I., Shakhov B. A. Solar cosmic rays in homogeneous magnetic field. Proc. 23rd Intern. Cosmic Ray Conf. — Calgary, 1993. Vol. 3. P. 215—218.
20. Fedorov Yu. I., Shakhov B. A., Stehlik M. Non-diffusive transport of cosmic rays in homogeneous regular magnetic fields. *Astron. and Astrophys.* 1995. 302. N 2. —P. 623—634.
21. Fedorov Yu. I., Stehlik M., Kudela K., Kassavicova J. Non-diffusive particle pulse transport: Application to an anisotropic solar GLE. *Solar Phys.* 2002. 208. N 2. —P. 325—334.
22. Gleeson L. J., Webb G. M. Energy changes of cosmic rays in the interplanetary region. *Astrophys. and Space Sci.* 1978. 58. N 1. P. 21—39.
23. Kagashvili E. Kh., Zank G. P., Lu J. Y., Droge W. Transport of energetic charged particles. 2. Small-angle scattering. *J. Plasma Phys.* 2004. 70, part 5. P. 505—532.
24. Kota J. Coherent pulses in the diffusive transport of charged particles. *Astrophys. J.* 1994. 427. N 2. P. 1035—1040.
25. Lu J. Y., Zank J. P., Rankin R., Marchand R. The transport of charged particles in a flowing medium. *Astrophys. J.* 2002. 576. P. 574—586.
26. Lu J. Y., Zank G. P., Webb G. M. Numerical solution of the time-dependent kinetic equation for anisotropic pitch-angle scattering. *Astrophys. J.* 2001. 550. P. 34—51.
27. McCracken K. G., Moraal H., Stoker P. H. Investigation of the multiple-component structure of the 20 January 2005 cosmic ray ground level enhancement. *J. Geophys. Res.* 2008. 113. A1202 (18 p.).
28. Miroshnichenko L. I. Solar cosmic rays. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., Netherlands, 2001. 480 p.
29. Plainaki C., Belov A., Mavromichalaki H., Yanke V. Modeling ground level enhancement: Event of 20 January 2005. *J. Geophys. Res.* 2007. 112. A 04102 (16 p.).

30. Ruffolo D. Effect of adiabatic deceleration on the focused transport of solar cosmic rays. *Astrophys. J.* 1995. 442. N 2. P. 861—874.
31. Shakhov B. A., Stehlik M. The Fokker-Planck equation in the second order pitch angle approximation and its exact solution. *J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer.* 2003. 78. P. 31—39.
32. Simnett G. M. The timing of relativistic proton acceleration in the January 2005 flare. *Astron. and Astrophys.* 2006. 445. P. 715—724.
33. Webb G. M., Pantazopoulou M., Zank G. P. Multiple scattering and the BGK Boltzmann equation. *J. Phys. A Math. Gen.* 2000. 33. P. 3137—3160.
34. Zank G. P., Lu J. Y., Rise W. K. M., Webb G. M. Transport of energetic charged particles in a random magnetic field. Part 1. Large angle scattering. *J. Plasma Phys.* 2000. 64. P. 507.

Статья поступила в редакцию 07.06.2017

Ю. І. Федоров

Головна астрономічна обсерваторія
Національної академії наук України, Київ, Україна

ІНТЕНСИВНІСТЬ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ НА ПОЧАТКОВІЙ СТАДІЇ СОНЯЧНОГО СПАЛАХУ

Поширення сонячних космічних променів у міжпланетному середовищі розглянуто на основі розв'язку рівняння Фоккера — Планка у малокутовому наближенні. Джерело частинок вважалось миттєвим і точковим. Досліджено просторово-часовий розподіл концентрації швидких частинок на анізотропній фазі спалаху сонячних космічних променів. Також розглянуто випадок тривалої інжекції частинок у міжпланетне середовище.

Ключові слова: космічні промені, кінетичне рівняння, дифузія, магнітні поля.

Yu. I. Fedorov

Main Astronomical Observatory
of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv

THE COSMIC RAY INTENSITY ON THE INITIAL STAGE OF THE SOLAR FLARE

The propagation of solar cosmic rays in the interplanetary space is considered based on the solution of Fokker-Planck equation in the small-angle approximation. The particle source is assumed to be instantaneous and point-like. The spatial and temporal distributions of energetic particle density during the anisotropic phase of solar cosmic ray enhancement are studied. The prolonged particle injection in the interplanetary medium is also discussed.

Keywords: cosmic rays, kinetic equation, diffusion, magnetic fields.