

## ДЕФЕКТЫ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЁТКИ

PACS numbers: 05.45.-a, 05.70.-a, 61.72.Bb, 62.20.fq, 62.25.Mn, 81.40.Lm, 83.50.Na

### Некоторые соображения об образовании дефектов в кристаллах на атомном уровне

В. И. Засимчук, Е. Э. Засимчук

*Институт металлофизики им. Г. В. Курдюмова НАН Украины,  
бульвар Академика Вернадского, 36,  
03142 Киев, Украина*

Рассмотрены колебания и взаимодействие двух положительных ионов, погружённых в электронный газ, в том числе и в областях, далёких от линейного поведения. Показано, что, для того, чтобы движение ионов было неустойчивым, необходимо, чтобы они хоть иногда в процессе своих колебаний отходили друг от друга на расстояния, больше  $1,5\alpha$ . Для одновалентных металлов оценены колебательная энергия иона, необходимая, чтобы это произошло, а также вероятность появления таких ионов. Полученные результаты обобщены на металлический образец. Рассмотрен случай большого числа «неустойчивых ионов».

**Ключевые слова:** гидродинамический канал, дефекты, устойчивость, энергия собственных колебаний ионов, предел текучести, активный ион, энтропия, критический размер.

Досліджено коливання та взаємодію двох позитивних йонів, яких занурено у електронний газ, в тому числі і в областях, які є далекими від лінійної поведінки. Показано, що, для того, щоб рух йонів був неусталеним, необхідно, щоб вони хоч іноді під час своїх коливань відходили один від одного на віддаль, більшу, ніж  $1,5\alpha$ . Для металів з валентністю, рівною одиниці, оцінено коливну енергію йону, яка потрібна для цього, а також ймовірність появи таких йонів. Одержані результати були узагальнені на металевий зразок. Досліджено випадок великої кількості «неусталених йонів».

Corresponding author: Olena Emilivna Zasyrchuk  
E-mail: eezas@imp.kiev.ua

*G. V. Kurdyumov Institute for Metal Physics, N.A.S. of Ukraine,  
36 Academician Vernadsky Blvd., UA-03142 Kyiv, Ukraine*

Citation: V. I. Zasyrchuk and O. E. Zasyrchuk, Some Considerations for Formation of Defects in Crystals at the Atomic Level, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **40**, No. 6: 845–857 (2018) (in Russian), DOI: 10.15407/mfint.40.06.0845.

**Ключові слова:** гідродинамічний канал, дефекти, усталеність, енергія власних коливань йонів, межа плинності, активний йон, ентропія, критичний розмір.

Oscillations and interaction of two positive ions embedded into electron gas are investigated including the region far from the linear behaviour. As shown, in order to be unstable movement of the ions, it is necessary that they go away one another on a distance larger than  $1.5\alpha$  at least sometimes during their oscillations. The vibrational energy of ion, which is necessary in order to take place for this separation, and probability of appearance of such ions are estimated for a univalent metals. The obtained results are generalized on a bulk metal. A case of a large number of 'unstable ions' is investigated.

**Key words:** hydrodynamic flow channel, defects, stability, energy of ion natural oscillations, yield stress, active ion, entropy, critical size.

*(Получено 19 декабря 2014 г.; окончат. вариант — 18 мая 2018 г.)*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде наших предыдущих работ (см., например, [1–5]) были развиты представления, подтверждённые экспериментальными данными на ряде металлических материалов, о возможности деформационного массопереноса по каналам с «жидкоподобной» структурой внутри. Эти каналы (т.н. каналы гидродинамического течения — г.к.) являются следствием синергетического структурообразования в области нелинейной зависимости величины деформации от параметров внешнего механического поля, т.е. в условиях пластической деформации, когда дислокационное скольжение по тем или иным причинам тормозится. Развивая представления о гидродинамическом течении кристаллического материала под действием внешней нагрузки, мы столкнулись с нерешённым вопросом о физическом механизме образования г.к. Мы показали, что в основе зарождения каналов лежит самоорганизация вакансионных дефектов кристалла [3, 6], однако при этом остаётся нерешённым вопрос о возможности образования вакансионных дефектов при торможении или полном отсутствии дислокационного скольжения, например, в монокристаллах некоторых ориентировок [5].

В настоящей работе рассмотрена упрощённая модель зарождения разупорядоченной области кристалла, находящегося под нагрузкой, и высказано предположение, что такая область может быть источником возникновения гидродинамического канала.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Рассмотрим процесс образования дефектов и г.к. в кристалле на

примере взаимодействия двух его ионов, окружённых электронами.

Как известно [7], энергия  $U$  одного такого иона вместе с отделёнными от него электронами определяется выражением:

$$U = -A / (\alpha + x) + B / (\alpha + x)^2 - Fx, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — расстояние между ионами, соответствующее положению минимума  $U$  при  $F = 0$ ,  $\alpha + x$  — текущее расстояние между ионами,  $A, B$  — положительные константы, определяемые в [7],  $F$  — сила, действующая на один ион вследствие приложенной к образцу внешней механической нагрузки (мы полагаем, что у нас деформация растяжения и  $F > 0$ ).

Тогда уравнение движения одного иона определяется выражением:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\partial U / \partial x, \quad (2)$$

где  $m$  — масса иона. Ищем  $x$  в виде

$$x = x_0 + y, \quad (3)$$

где  $y$  — малая добавка за счёт возмущений в граничных условиях. Тогда, согласно теории устойчивости решений Ляпунова [8], относительно  $y$  получим уравнение:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = s^2 y, \quad y = C_3 \exp(\pm st), \quad (4)$$

$$s^2 = -\frac{1}{m} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=x_0}. \quad (5)$$

Мы видим, что при

$$s^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0 \quad (6)$$

решение (2) неустойчиво. При

$$s^2 = -s_1^2 < 0, \quad \partial^2 U / \partial x^2 > 0, \quad s = is_1, \quad (7)$$

где  $s_1$  — действительное число,

$$y = C_3 \exp(\pm is_1 t). \quad (8)$$

В этой зоне  $y$  при росте  $t$  остаётся по модулю примерно постоянной величиной и об устойчивости решения уравнения (2) мы сразу

сказать ничего не можем.

Таким образом, если в процессе своих колебаний ион хоть на короткие времена заходит в зону (6),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = \infty, \quad (9)$$

и решение уравнения (2) неустойчиво. Это означает, что в кристалле могут возникать дефекты (вакансии, дислокации и т.д.), а при больших количествах таких «неустойчивых ионов» могут возникать г.к. Посмотрим, какого расстояния между ионами нужно достичь, чтобы всё это происходило. Из (1) следует, что

$$\partial U / \partial x = A / (\alpha + x)^2 - 2B / (\alpha + x)^3 - F. \quad (10)$$

Из определения переменной  $\alpha$  (после (1)) получим:

$$A / \alpha^2 - 2B / \alpha^3 = 0, \quad \alpha = 2B / A, \quad (11)$$

а из (10)

$$G = \partial^2 U / \partial x^2 = -2A / (\alpha + x)^3 + 6B / (\alpha + x)^4. \quad (12)$$

Отсюда мы видим, что  $G < 0$  при

$$x > 3B / A - \alpha, \quad (13)$$

а из (11)

$$x > \alpha / 2. \quad (14)$$

Таким образом, если в процессе колебаний расстояние между двумя ближайшими друг от друга ионами хоть на короткие времена становится больше  $3\alpha/2$ , решение уравнения (2) неустойчиво со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Решим уравнение (2). Согласно [8], его решение имеет вид:

$$\left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \frac{dx}{dt} = \pm(C - U(x))^{1/2} = \pm\left(\frac{W(x)}{(\alpha + x)^2}\right)^{1/2}, \quad (15)$$

где  $C$  — константа, зависящая от энергии колебаний иона [9],

$$W(x) = C(\alpha + x)^2 - B + A(\alpha + x) + Fx(\alpha + x)^2. \quad (16)$$

Очевидно, колебания иона существуют только в тех областях, где  $W(x) \geq 0$ , поскольку  $dx/dt$  не может быть мнимой величиной. Ион не может также «перепрыгивать» через «запрещённые» области:

$$W^1(x) = dW / dx = 3Fx^2 + 2x(C + 2\alpha F) + 2\alpha C + A + \alpha^2 F. \quad (17)$$

Таким образом, уравнение  $W^1(x) = 0$  является квадратным и имеет максимум два действительных корня. Кроме того, как видно из (17), при больших  $x$   $W^1(x) > 0$ . Следовательно,  $W^1(x)$  имеет только одну область  $W^1(x) < 0$ .

Подберём  $C$  таким образом, чтобы при  $x = \alpha/2 = z$  (переход в область неустойчивости) выполнялось равенство  $W(x) = 0$ , т.е. колебания доходили как раз до этой точки. Из (16) и (11) следует:

$$C = \frac{A\alpha - 2A(\alpha + z) - 2Fz(\alpha + z)^2}{2(\alpha + z)^2} = C_0. \quad (18)$$

Если с помощью простой подстановки в (17) мы покажем, что  $W^1(z) < 0$ , это означает, что колебания иона осуществляются в области:

$$b < x \leq \alpha / 2, \quad b < \alpha / 2, \quad (19)$$

т.е. доходят до зоны неустойчивости. Естественно, при

$$C > C_0 \quad (20)$$

ион заходит в зону неустойчивости и какое-то время движется в ней. Это нас как раз и интересует.

Найдём теперь энергию собственных колебаний иона  $E$  [9]:

$$E = C - U(0). \quad (21)$$

Из (1) и (11) следует:

$$U(0) = -A/(2\alpha). \quad (22)$$

Тогда вероятность нахождения такого иона в кристалле определяется выражением [10]:

$$P = \exp(-E/(kT)), \quad (23)$$

где  $T$  — абсолютная температура (полагаем,  $T = 300$  К),  $k$  — постоянная Больцмана ( $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$  эрг/град) [10].

## 2.1. Численная оценка вероятности возникновения дефектов и г.к.

Рассмотрим одновалентный металл, поскольку для металлов с большей валентностью энергия  $E$  получается слишком большой.

Мы полагаем, что для таких металлов теория, развитая в [7], является неточной, поскольку она не учитывает электрон-электронные взаимодействия. Для металлов с валентностью  $z > 1$  они играют существенную роль.

Согласно [7],

$$A = \alpha_1 z 2e^2, \quad B = \beta h^2 z^{5/3} / (8m_e), \quad (24)$$

где  $\alpha_1$  и  $\beta$  — постоянные порядка 1 (мы полагаем  $\alpha_1 = 0,998$ ,  $\beta = 0,996$ ), через  $e$  обозначен заряд электрона ( $e = 4,8032 \cdot 10^{-10}$  СГС),  $h$  — постоянная Планка ( $h = 6,6262 \cdot 10^{-27}$  эрг·с),  $m_e$  — масса электрона ( $m_e = 9,1095 \cdot 10^{-28}$  г) [11]. Отсюда находим  $A$  и  $B$ :

$$A = 2,3 \cdot 10^{-19} \text{ эрг·см}, \quad B = 0,6 \cdot 10^{-26} \text{ эрг·см}^2, \quad (25)$$

а из (11)

$$\alpha = 5,22 \cdot 10^{-8} \text{ см}. \quad (26)$$

1. Тогда из (18) при  $F = 0$  (в отсутствии внешней нагрузки):

$$C > -1,958 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}, \quad (27)$$

т.е. из (21) и (22) следует, что

$$E > 0,245 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}. \quad (28)$$

При таких энергиях собственных колебаний иона его движение становится неустойчивым и возможно образование вакансий, дислокаций и т.д. Из (23) оценим вероятность нахождения такого иона в кристалле:

$$E / (kT) > 5,92, \quad P < e^{-5,92} = 10^{-2,6}. \quad (29)$$

Таким образом, мы видим, что дефекты в кристалле могут образовываться с довольно ощутимой вероятностью.

2. Известно, что г.к. образуются при напряжениях, превышающих предел текучести ( $\sigma_T$ ). Для одновалентного металла меди [12, 13]:

$$\sigma_T = 25 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2 = 250 \text{ Мпа} = 25 \cdot 10^8 \text{ г·см/(с}^2 \cdot \text{см}^2). \quad (30)$$

В одном  $\text{см}^2$  поверхности приблизительно находится  $\alpha^{-2}$  ионов, где  $\alpha$  измеряется в сантиметрах. Следовательно, на один ион действует сила, приблизительно равная

$$F = \sigma_T \alpha^2 = 6,812 \cdot 10^{-6} \text{ г} \cdot \text{см} / \text{с}^2, \quad (31)$$

(мы предположили, что на образец действует нагрузка, равная пределу текучести). Тогда из (18):

$$C > -2,136 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}, \quad (32)$$

а из (21) и (22)

$$E > 6,725 \cdot 10^{-14} \text{ эрг}. \quad (33)$$

Из (23) оценим вероятность нахождения такого иона в кристалле:

$$q = E / (kT) > 1,63, \quad P < \exp(-1,63) = 10^{-0,706}. \quad (34)$$

Мы видим, что в этом случае вероятность нахождения в кристалле активных (а), т.е. проходящих в процессе своего колебания зону неустойчивости, ионов ещё больше. Однако для образования г.к. требуется не один, а много а-ионов, расположенных достаточно близко друг от друга.

## 2.2. Случай большого количества активных ионов

Пусть у нас в кристалле появилось новообразование ( $n$ ) из  $n$  ионов. Из них  $m_1$  ионов являются активными. Тогда число состояний  $Z$ , с помощью которых может быть реализовано такое положение вещей, определяется выражением [8]:

$$Z = \frac{n!}{(n - m_1)! m_1!}. \quad (35)$$

Согласно [10], энтропия  $S$  такого  $n$  определяется выражением:

$$S = k \ln Z, \quad (36)$$

Согласно тому же источнику [10], свободная энергия  $n$ :

$$F_0 = U - TS, \quad (37)$$

где  $U$  — внутренняя энергия  $n$ . У нас

$$U = E m_1. \quad (38)$$

Известно, что всякая система, в том числе и  $n$ , стремится к минимуму  $F_0$ .

Разделим обе части (37) на  $kT$  и получим:

$$f = -qm_1 + \ln Z, \quad (39)$$

где  $f = F_0/(kT)$ ,  $q = E/(kT)$ . Тогда:

$$Q = e^{-f} = Z \exp(-qm_1). \quad (40)$$

Мы видим, что с ростом  $F_0$  величина  $Q$  уменьшается и наоборот. Всякий процесс будет идти, когда  $Q$  растёт.

Предположим, что  $n$  и  $m_1$  — очень большие числа. Тогда для них справедлива приближённая формула Стирлинга [8]:

$$n! \approx (n/e)^n (2\pi n)^{1/2}. \quad (41)$$

Пусть

$$n = sm_1, \quad n - m_1 = m_1(s - 1), \quad s > 1. \quad (42)$$

Тогда из (35) и (41) получим:

$$\begin{aligned} Z &= \exp(m_1(s \ln s - (s - 1) \ln(s - 1))) (s / (2\pi(s - 1)m_1))^{1/2} = \\ &= \exp(r_1(s)m_1) C(s) (m_1)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (43)$$

а из (40)

$$Q = C(s) \exp(rm_1) m_1^{-0,5}, \quad (44)$$

где  $r = r_1(s) - q$ .

Мы видим, что при  $r < 0$  функция  $Q(m_1)$  монотонно убывает с ростом  $m_1$ , т.е.  $F_0(m_1)$  монотонно растёт, а значит,  $n$  не может расти. При  $r > 0$  требуется специальное исследование. Введём:

$$Q_1(m_1) = Q(m_1) / C(s), \quad (45)$$

$$dQ_1 / dm_1 = m_1^{-3/2} \exp(rm_1) (rm_1 - 0,5). \quad (46)$$

Мы видим, что экстремум функции  $Q(m_1)$  находится в точке:

$$m_{\text{ek}} = 1 / (2r), \quad (47)$$

$$d^2Q_1 / dm_1^2 = m_1^{-5/2} \exp(rm_1) D_1, \quad (48)$$

$$D_1 = (rm_1 - 0,5)^2 + 0,5 > 0. \quad (49)$$

Таким образом,  $d^2Q_1 / dm_1^2 > 0$  и функция  $Q(m_1)$  имеет минимум в точке (47). То есть вначале по мере роста  $n$  вероятность его роста



уменьшается. Затем, когда  $n$  достигнет некоторого критического размера  $m_{\text{ек}}$  (см. (47)), по мере его дальнейшего роста вероятность роста  $n$  начинает неограниченно расти. Естественно, этот процесс может идти только тогда и только в том направлении, в котором вещество  $n$  отводится из зоны, где идёт процесс, поскольку  $n$  занимает больший объём, чем металл без а-ионов.

Из (43) и (44):

$$dr_1 / ds = dr / ds = \ln(|s|/|s - 1|) > 0. \quad (50)$$

Оценим  $r(s)$ . Пусть  $s = 10$ , то есть на каждые 10 ионов приходится один активный. Ориентируясь на (34), положим  $q = 1,64$ , тогда из (43) и (44) получим:

$$r(s) = s \ln s - (s - 1) \ln(s - 1) - q = 1,611 > 0. \quad (51)$$

Отсюда, с учётом (50), видно, что при концентрациях а-ионов меньших или равных 1:10 ( $s \geq 10$ ) новообразование может расти.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ.

Оценка энергии, необходимой для отрыва атома металла от своего окружения в кристаллической решётке и создания вакансии, показала слишком большую величину, сравнимую с энергией связи атомов в решётке. В то же время, как показало компьютерное моделирование [14], в практически идеальном ГЦК-нанокристалле могут возникать вакансионные дефекты при незначительных внешних воздействиях на уровне предела упругости. В настоящей работе на примере колебаний двух взаимодействующих ионов в решётке рассмотрена возможность образования вакансионного дефекта при незначительных внешних воздействиях.

Мы предположили, что дефекты и г.к. образуются, когда атомы в процессе своих колебаний друг относительно друга заходят в так называемую зону неустойчивости, то есть удаляются друг относительно друга на достаточно большие расстояния ( $> 1,5\alpha$ ). Этот процесс может идти и при отсутствии действия внешних сил, но особенно эффективно он идёт, когда колебаниям «помогают» внешние механические силы.

Рассматривался одновалентный металл, поскольку для создания неустойчивого состояния в металлах с большей валентностью требуется слишком большая колебательная энергия ионов. Мы предположили, что теория, развитая в [7], для кристаллов с большей валентностью является неточной, поскольку она не учитывает электрон-электронные взаимодействия, которые для металлов с большой валентностью являются существенными.

Экспериментальной проверкой развитой в настоящей работе теории было бы изучение процесса образования дефектов в кристаллах при сверхнизких температурах. Такой эксперимент столкнулся бы со значительными техническими трудностями, поскольку трудно медленно охладить образец до сверхнизких температур, а при быстром охлаждении интенсивно образуются дефекты.

В настоящей работе мы использовали потенциал межатомного взаимодействия Френкеля (1). Известно, что в настоящее время существует огромное количество других потенциалов (например, потенциал Леннард-Джонса [15], потенциалы погружённого атома (модель ЕАМ), парный потенциал Морса и т.д.). Однако нам нужно было иметь относительно простое выражение, чтобы получить наименьшую амплитуду колебаний атомов, достаточную для неустойчивости этих колебаний. Нам нужно было также получить простое выражение для энергии колебаний атома, достаточной для того, чтобы колебания были неустойчивыми, а значит, оценить вероятность нахождения таких атомов в кристалле для разных случаев. В работах [7, 15, 16] потенциалы межатомного взаимодействия раскладываются в ряд Маклорена по степеням  $\xi$  — зависящего от времени смещения атомов. В настоящей работе такой подход неприемлем, поскольку смещение  $x$  достигает значительных величин (порядка  $a/2$ ).

По этой же причине мы не использовали в настоящей работе трёхатомную модель кристалла, используемую в работах [7, 16]. В следующей работе будет рассмотрена многоатомная модель линейной цепочки атомов.

Рассмотрим хотя бы, на какие максимальные расстояния  $\alpha + x$  должен смещаться атом в процессе своих колебаний в двухатомной модели для достижения неустойчивости в случае потенциала, используемого в работе [16]:

$$U = -A / (\alpha + x)^m + B / (\alpha + x)^n, \quad n > m, \quad A > 0, \quad B > 0. \quad (52)$$

В точке равновесия:

$$\partial U / \partial x \Big|_{x=0} = \alpha^{-n-1} (mA\alpha^{n-m} - nB) = 0, \quad B / A = (m / n)\alpha^{n-m}. \quad (53)$$

Как было показано ранее, условием неустойчивости колебаний является следующее:

$$\partial^2 U / \partial x^2 = -m(m+1)A / (\alpha + x)^{m+2} + n(n+1)B / (\alpha + x)^{n+2} < 0; \quad (54)$$

здесь  $x$  — точка максимального отклонения в процессе колебаний атома.

С учётом (53) получаем:

$$\alpha + x > \alpha((n + 1) / (m + 1))^{1/(n-m)}. \quad (55)$$

Рассмотрим примеры.

1. В потенциале Френкеля:

$$n = 2, m = 1, \quad (56)$$

и из (55) следует

$$\alpha + x > 1,5\alpha, \quad (57)$$

как и было получено ранее.

2. Для потенциала Леннарда-Джонса [15]:

$$n = 12, m = 6, \quad (58)$$

и из (55) получаем

$$\alpha + x > \alpha r, \quad (59)$$

$$r = (13 / 7)^{1/6}. \quad (60)$$

Можно показать, что:

$$r = 1,103, \alpha + x > 1,103\alpha. \quad (61)$$

Таким образом, неустойчивость достигается при значительно меньших амплитудах колебаний атома, чем в случае потенциала Френкеля.

#### 4. ВЫВОДЫ

1. На примере двухионной модели показано, что для того, чтобы колебание иона относительно другого было неустойчивым, он должен в процессе своих колебаний иногда удаляться от соседа на расстояние, больше  $1,5\alpha$ , где  $\alpha$  — расстояние между ионами, соответствующее положению минимума  $U$  при  $F = 0$ .

2. На примере одновалентного металла проведена оценка энергии  $E$  собственных колебаний иона, достаточной для возникновения неустойчивости, и вероятности  $P$  нахождения такого иона в кристалле. В отсутствие внешнего механического поля:  $E > 0,245 \cdot 10^{-12}$  эрг,  $P < 10^{-2,6}$ . При напряжении растяжения  $\sigma = 250$  МПа:  $E > 6,725 \cdot 10^{-14}$  эрг,  $P < 10^{-0,706}$ .

3. Рассмотрена модель новообразования (г.к.) из  $n$  ионов,  $m_1$  из которых являются активными (неустойчивыми),  $m_1/n = \text{const}$ . Пока-

зано, что вначале с ростом  $m_1$  вероятность существования такого новообразования уменьшается, затем, после того как его размер  $m_1$  достиг некоторого критического значения  $m_{\text{ек}}$ , вероятность начинает неограниченно расти, т.е. г.к. растёт.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Е. Zasimchuk and L. I. Markashova, *Mater. Sci. Eng. A*, **127**: 33 (1990).
2. М. Н. Беякова, Е. Э. Засимчук, Ю. Г. Гордиенко, *Металлофиз. новейшие технол.*, **21**, № 4: 59 (1999).
3. Е. Э. Засимчук, В. И. Засимчук, *Металлофиз. новейшие технол.*, **28**, № 6: 803 (2006).
4. В. А. Лихачев, В. Е. Панин, Е. Э. Засимчук и др., *Кооперативные деформационные процессы и локализация деформации* (Киев: Наукова думка: 1989), с. 65.
5. Е. Э. Засимчук, В. И. Засимчук, Т. В. Турчак, *Успехи физики металлов*, **14**, № 3: 275 (2013).
6. Yu. Gordienko and E. Zasimchuk, *Phil. Mag. A*, **70**, Iss. 1: 99 (1994).
7. Я. И. Френкель, *Введение в теорию металлов* (Ленинград: Наука: 1972).
8. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (Москва: Наука: 1978) (пер. с англ.).
9. А. И. Ансельм, *Введение в теорию полупроводников* (Москва: Наука: 1978).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. V. Статистическая физика. Ч. I* (Москва: Наука: 1976).
11. Л. А. Сена, *Единицы физических величин и их размерности* (Москва: Наука: 1977).
12. [www.toehelp.ru/theory/sopromat/9.html](http://www.toehelp.ru/theory/sopromat/9.html)
13. [www.mehanika.ks.ua/index.php](http://www.mehanika.ks.ua/index.php)
14. О. С. Гаценко, О. Е. Засимчук, П. О. Теселько, С. Г. Стіренко, Ю. Г. Гордиенко, *Металлофиз. новейшие технол.*, **36**, № 9: 1207 (2014).
15. Ю. М. Полуэктов, *Физика низких температур*, **34**, № 4/5: 459 (2008).
16. В. Х. Козловский, *Изв. ВУЗов. Физика*, **50**, № 3: 16 (2007).

## REFERENCES

1. E. E. Zasimchuk and L. I. Markashova, *Mater. Sci. Eng. A*, **127**: 33 (1990).
2. M. N. Belyakova, E. E. Zasimchuk, and Yu. G. Gordienko, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **21**, No. 4: 59 (1999) (in Russian).
3. O. Eh. Zasimchuk and V. I. Zasimchuk, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **28**, No. 6: 803 (2006) (in Russian).
4. V. A. Likhachev, V. E. Panin, E. E. Zasimchuk et al., *Kooperativnye Deformatsionnye Protsessy i Lokalizatsiya Deformatsii* [Cooperative Deformation Processes and Localization of Deformation] (Kiev: Naukova Dumka: 1989), p. 65 (in Russian).
5. O. Eh. Zasyrchuk, V. I. Zasyrchuk, and T. V. Turchak, *Prog. Phys. Met.*, **14**, No. 3: 275 (2013) (in Russian).
6. Yu. Gordienko and E. Zasimchuk, *Phil. Mag. A*, **70**, Iss. 1: 99 (1994).

7. Ya. I. Frenkel', *Vvedenie v Teoriyu Metallov* [Introduction to the Theory of Metals] (Leningrad: Nauka: 1972) (in Russian).
8. G. Korn and T. Korn, *Spravochnik po Matematike dlya Nauchnykh Rabotnikov i Inzhenerov* [Mathematical Handbook for Scientists and Engineers] (Moscow: Nauka: 1978) (Russian translation).
9. A. I. Ansel'm, *Vvedenie v Teoriyu Poluprovodnikov* [Introduction to the Theory of Semiconductors] (Moscow: Nauka: 1978) (in Russian).
10. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Teoreticheskaya Fizika. T. V. Statisticheskaya Fizika. Ch. 1* [Theoretical Physics. Vol. V. Statistical Physics. Pt. 1] (Moscow: Nauka: 1976) (in Russian).
11. L. A. Sena, *Edinitsy Fizicheskikh Velichin i Ikh Razmernosti* [Units of Physical Quantities and Their Dimensions] (Moscow: Nauka: 1977) (in Russian).
12. [www.toehelp.ru/theory/sopromat/9.html](http://www.toehelp.ru/theory/sopromat/9.html)
13. [www.mehanika.ks.ua/index.php](http://www.mehanika.ks.ua/index.php)
14. O. S. Gatsenko, O. E. Zasyanchuk, P. O. Tesel'ko, S. G. Stirenko, and Yu. G. Gordienko, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **36**, No. 9: 1207 (2014) (in Ukrainian).
15. Yu. M. Poluektov, *Fizika Nizkikh Temperatur*, **34**, Nos. 4/5: 459 (2008) (in Russian).
16. V. Kh. Kozlovskiy, *Izv. VUZov. Fizika*, **50**, No. 3: 16 (2007) (in Russian).