УДК 681:519.68

КОНСТРУКТИВНИЙ АЛГОРИТМ ЗВОРОТНОГО МЕТОДУ ДЛЯ ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

В.А. ДОЦЕНКО

Розглядається загальна схема зворотного методу С.Ю. Маслова для числення висловлювань. Описано низку евристичних стратегій і правил виведення скорочення перебору. Сформульовано конструктивний алгоритм зворотного методу для числення висловлювань.

Одним із завдань теорії штучного інтелекту як важливого напрямку кібернетики є автоматизація процесів доведення, а саме побудова алгоритмів дедуктивного виведення теорем. Таке завдання може бути поставлене, зокрема, для побудови і перевірки доведення існуючих та нововиведених математичних теорем, для процесів верифікації даних у базах знань експертних систем.

Відомо чимало різноманітних алгоритмів автоматичного доведення теорем, кожен з яких має сильні та слабкі сторони. Існують певні обмеження на формат і структуру вхідних даних та форму подання вихідних результатів, тому для вирішення певних завдань необхідно (доцільніше) використовувати одні алгоритми, а для інших — інші. Через це є відкритим питання створення нових чи розвиток існуючих алгоритмів, які могли би бути ефективними та зручними. Одним із алгоритмів, що має значний потенціал для подальших вдосконалень, є зворотний метод С.Ю. Маслова [1,2].

До теперішнього часу існує низка формалізацій зворотного методу, формулювання якого для класичного числення предикатів здійснено С.Ю. Масловим [1, 2] і наведено А. Воронковим та А. Дегтярьовим [3], Т. Тамметом [4], Ф. Пфеннінгом [5]. Формулювання зворотного методу для інтуїтионістичної та інших некласичних логік здійснене А. Воронковим, Г. Мінцем, В. Ліфшицом, К. Доннеллі, К. Чаудурі, Ф. Баадером та С. Тобіесом, А. Бірштунасом та С. Норгелою; для числення предикатів з рівністю А. Воронковим та А. Дегтярьовим; для числення висловлювань, а також деякі доповнення навів С.Л. Катречко [6, 7]. Проте всі ці праці об’єднує одна спільна риса — для зворотного методу наводиться загальна схема без наведення чіткого алгоритму виведення.

Таким чином, існує необхідність побудови конструктивного алгоритму зворотного методу, який би містив усі необхідні правила оптимізації виведення і мав формулювання для тих логік, для яких існує формулювання загальної схеми зворотного методу.

Ця робота присвячена опису загальної схеми зворотного методу для числення висловлювань та формулюванню для нього конструктивного алгоритму зворотного методу, який може бути безпосередньо застосований для кодування однією із мов програмування.

Відповідно до викладення зворотного методу С.Ю. Масловим [1–3], сформулюємо його схему для числення висловлювань.

Розглянемо дедуктивну систему — секвенційний варіант числення висловлювань. Позначимо його C . Алфавіт числення C складається зі знаків $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$, $\Rightarrow$, $(\cdot)$ і нескінченного списку $A_1, A_2, \ldots$, який будемо називати списком *атомів*.

Визначення *формули* будуємо за індукцією:

1. Будь-який атом є формулою.
2. Якщо F_1 і F_2 — формули, то і $\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$ формули.
3. Нехай нижче Γ_i — позначення списків формул (можливо, порожніх). *Секвенцією* називається вираз $\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_2$. У нашому випадку приймаємо, що список формул Γ_1 є порожнім.

Приклад 1. $A, B, C, \ldots$ — атоми. Вони також є і формулами. Розглянемо секвенційне числення висловлювань, де як об'єкти виступають секвенції вигляду $\Rightarrow \Gamma$, де Γ — список формул. Наприклад, $\Rightarrow A \wedge B, \neg A \wedge C, \neg B, \neg C$.

- ***Пропозиційною літерою*** називається атом або його заперечення.
- Нехай F — деяка формула, що може складатися з однієї пропозиційної літери.
- ***Аксіомами*** числення C назвемо секвенції вигляду $\Rightarrow F, \ \neg F$. Тобто аксіомою є секвенція, в якій праворуч від знаку секвенції знаходиться тавтологія. Аксіому $F, \ \neg F$ позначимо також як $\aleph$. Під цим символом будемо розуміти будь-яку окремо взяту аксіому з числа аксіом числення C (без конкретизації, яку саме).
- ***Правила виводу*** числення C :

а) $\dfrac{\Rightarrow \Gamma_1, F_1, F_2, \Gamma_2}{\Rightarrow \Gamma_1, F_1 \vee F_2, \Gamma_2}$ $(\Rightarrow \vee)$ (вставка диз'юнкції);

б) $\dfrac{\Rightarrow \Gamma_1, F_1, \Gamma_2; \quad \Rightarrow \Gamma_1, F_2, \Gamma_2}{\Rightarrow \Gamma_1, F_1 \wedge F_2, \Gamma_2}$ $(\Rightarrow \wedge)$; (вставка кон'юнкції);

в) $\dfrac{\Rightarrow \Gamma_1, F_1, \Gamma_2}{\Rightarrow \Gamma_1, F_1, F_2, \Gamma_2}$ $(\Rightarrow \mathrm{I})$ (вставка формули праворуч від знаку секвенції).

Правила виводу застосовуються зверху вниз. У правилі «вставка диз'юнкції» коми праворуч від знаку секвенції замінюються знаками диз'юнкції. У правилі «вставка кон'юнкції» відбувається об'єднання двох секвенцій в одну з утворенням кон'юнкції. У правилі «вставка формули праворуч від знаку секвенції» до списку формул додається ще одна формула, що не призводить до втрати виводимості, а лише додає надлишковість.

- ***Виведенням секвенції*** $\Rightarrow F$ у численні C назвемо дерево, отримане застосуванням правил виводу, у вершинах якого знаходяться аксіоми, а в корені дерева — секвенція $\Rightarrow F$.

Дерево будується зверху вниз від аксіом до секвенції, яка виводиться.

Сформулюємо зворотний метод для виведення секвенції $\Rightarrow F$ у численні C

$$F = \bigcup_{i=1}^{\delta} C_i \,, \tag{1}$$

де C_i — кон'юнктивні формули, що виступають як аргументи диз'юнкції у формулі F.

Приклад 2. Для секвенції $\Rightarrow F$, де $F = A \wedge B \wedge C \vee \neg A \wedge B \vee \neg C \vee \vee \neg B \wedge \neg C \vee D$, $C_1 = A \wedge B \wedge C$, $C_2 = \neg A \wedge B,$ $C_3 = \neg C$, $C_4 = \neg B \wedge \neg C$, $C_5 = D$. Тут A, B, C, D — атоми.

Формула F за структурою представлена у диз'юнктивній нормальній формі.

Нехай C_i має вигляд

$$C_i = D_{i_1} \wedge \ldots \wedge D_{i_r} = \bigcap_{k=1}^{r} D_{i_k} = \bigcap_{k=1}^{\delta_i} D_{i_k} \,, \tag{1'}$$

де r є кількістю пропозиційних літер D_{i_k}, з яких складається кон'юнктивна формула C_i. Таким чином, r є функцією від i, адже, у загальному випадку вона є різною для різних i. Це демонструє інший варіант запису цього числа — δ_i, який показує зв'язок δ, δ_i та i. Проте, для простоти запису писатимемо D_{i_r} замість $D_{i_{r(i)}}$ чи $D_{i_{\delta_i}}$.

Приклад 3. Для прикладу 2 матимемо $\delta = 5$, загалом $\delta_1 = 3$, $\delta_2 = 2$, $\delta_3 = 1$, $\delta_4 = 2$, $\delta_5 = 1$,

$C_1 = D_{1_1} \wedge D_{1_2} \wedge D_{1_3}$, де $D_{1_1} = A$, $D_{1_2} = B$, $D_{1_3} = C$, $\delta_1 = 3$,

$C_2 = D_{2_1} \wedge D_{2_2}$, де $D_{2_1} = \neg A$, $D_{2_2} = B$, $\delta_2 = 2$,

$C_3 = D_{3_0}$, де $D_{3_0} = \neg C$, $\delta_3 = 1$,

$C_4 = D_{4_1} \wedge D_{4_2}$, де $D_{4_1} = \neg C$, $D_{4_2} = \neg C,$ $\delta_4 = 2$,

$C_5 = D_{5_0}$, де $D_{5_0} = D,$ $\delta_5 = 0$.

Третій аргумент диз'юнкції складається з одного атома, тому він (атом) позначений індексом 0, що підкреслює його єдиність. Такий запис, на перший погляд, протирічить запису (1'), проте в цьому є своя доцільність і своє пояснення. У ході застосування алгоритму зворотного методу за правилом Б (про це буде розказано далі) необхідно постійно слідкувати за значенням числа δ_i для поточного номера з індексом, щоб залучати до об'єднання сприятливі набори, які містять повну множину відповідно до поточного номера. При цьому, якщо поточний номер має індекс 0, то немає потреби проводити пошук (дивитися значення числа δ_i та аналізувати поточну множину сприятливих наборів), адже 0 одразу вказує: такий індекс є єдиним для даного номера (тобто відповідає аргументу диз'юнкції $C_i = D_{i_0}$).

Таким чином, вираз (1’) слід читати так: виконується для всіх $\delta_i > 1$, для випадку $\delta_i = 1$ буде виконуватись $C_i = D_{i_0}$.

- ***h*-членним *F*-набором (*h,F*-набором)** назвемо вираз вигляду

$$[i_1;\ldots;i_h], \tag{2}$$

де $1 \le i_1,\ldots,i_h \le \delta$, $h \ge 0$.

Такий вираз представляє собою послідовність номерів літер D_{j_s} з C_j, об’єднаних між собою у набір і приведених до спільної нумерації ($j \in \{1,\ldots,\delta\}$, $s \in \{0,\ldots,\delta_j\}$).

Зауважимо, що h,F -набір є лише відображенням літер D_{j_s} на номери з індексами, а, отже, h,F -набором ми можемо називати як послідовність номерів з індексами, записаними у формі (2), так і еквівалентний по суті запис, де замість номерів з індексами будуть стояти самі літери з формули F.

Приклад 4. Покажемо на прикладі, що означає запис (2). Нехай маємо літери $A, B, \neg C$, які відповідають $D_{1_1}, D_{2_2}, D_{3_0}$ з формули F, і об’єднані у 3-членний *F*-набір. Тоді такий 3-членний F -набір можна записати як у вигляді $[D_{1_1}; D_{2_2}; D_{3_0}]$ (для нашого прикладу це буде вираз $[A, B, \neg C]$), так і у вигляді $[1_1; 2_2; 3_0]$ (у такому записі ми будемо представляти h,F -набори при наведенні прикладів застосування алгоритму зворотного методу). Разом з тим, вираз $[D_{1_1}; D_{2_2}; D_{3_0}]$ можемо записати і іншим чином. Введемо нове допоміжне позначення

$$H_i = D_{j_s},\ 1 \le i,\ \ j \le \delta,\ \ s \ge 0.$$

Тобто H_i є позначенням з іншим індексом літери D_{j_s} (ця операція еквівалентна перейменуванню та зміні положення аргументів диз’юнкції у диз’юнктивній формулі F).

Запишемо наведений вище 3-членний F-набір, застосувавши наше позначення. Отримаємо вираз $[H_1; H_2; H_3]$, де $H_1 = D_{1_1}$, $H_1 = D_{2_2}$, $H_3 = D_{3_0}$. Разом з тим, можемо записати і вираз $[H_5; H_3; H_9]$, якщо приймемо позначення $H_5 = D_{1_1}$, $H_3 = D_{2_2}$, $H_9 = D_{3_0}$ за умови $\delta \ge 9$. Таке позначення також буде цілком допустимим. Тому для запису у загальному вигляді нашого набору через позначення ми повинні записати $[H_{i_1}; H_{i_2}; H_{i_3}]$, де $1 \le i_1, i_2, i_3 \le \delta$. Якщо запишемо цей набір у еквівалентному вигляді, то матимемо вираз i_1; i_2; i_3. Нескладно переконатися, що таким чином ми отримали запис нашого 3-членного F -набору у вигляді (2).

- **Набором із залежністю** є набір, праворуч від якого в дужках записана деяка (можливо порожня) множина номерів.

$$[i_1;\ldots;i_h](M), \tag{2'}$$

де $1 \le i_1,\ldots,i_h \le \delta$, $h \ge 0$, $M \in \{1,2,\ldots,\delta\}$, $|M| \ge 0$.

Цьому наборові із залежністю відповідає формула $H_{i_1} \vee H_{i_2} \vee H_{i_3} \vee$ $\vee C_5 \vee C_8 \vee C_9$.

Приклад 5. Нехай маємо формулу F з прикладу 4, яка має вигляд (1), і $\delta \geq 9$. Нехай набором є $[1_1;2_2;3_0]$. Набором із залежністю буде вираз $[1_1;2_2;3_0]$ $(5,8,9)$.

Для розуміння правил, наведених нижче, варто мати на увазі інтерпретацію h,F -набору (2) як формули

$$H_{i_1} \vee \ldots \vee H_{i_h} \vee F', \tag{3}$$

де F' — формула, яка є диз'юнкцією підмножини (можливо, порожньої) аргументів диз'юнкту F . Тобто h,F -набір є представленням диз'юнкції h пропозиційних літер (у (3) це $H_{i_1},\ldots,H_{i_h}$), що входять у склад кон'юнктивних формул C_i. Залежність M є представленням формули F' (як було зазначено, вона може бути рівною порожньому диз'юнкту γ) у вигляді послідовності номерів кон'юнктивних формул C_j, $1 \leq j \leq \delta$.

Приклад 6. Розглянемо набір із залежністю з прикладу 5: $[1_1;2_2;3_0]$ $(5,8,9)$. Йому відповідає, згідно виразу (3), запис

$$[H_{i_1};H_{i_2};H_{i_3}](C_5,C_8,C_9) ,$$

де $H_{i_1} = D_{1_2}$; $H_{i_2} = D_{2_2}$; $H_{i_3} = D_{3_0}$; C_5,C_8,C_9 — аргументи диз'юнкції F . $M = \{C_5,C_8,C_9\}$.

- Числення $\Re^{inv}_{C,F}$ називається ***численням приятливих наборів***, якщо воно визначається двома правилами — правилом А і правилом Б. Правила наведемо нижче.

- ***Об'єктами, що виводяться*** у численні $\Re^{inv}_{C,F}$, будуть диз'юнкти вигляду

$$T = H_{i_1} \vee \ldots \vee H_{i_h} , \tag{4}$$

де ($h \geq 0, 1 \leq i_1,\ldots,i_h \leq \delta$).

Таким чином, з урахуванням (4) вираз (3) набуває вигляду (позначимо його $T^{F'}$, де в одному позначенні суміщені позначення приятливого набору як T , та залежності M як F').

$$T^{F'} = T \vee F'. \tag{5}$$

Зокрема, при $T = \gamma$ (де γ — порожній диз'юнкт) буде $T^{F'} = \gamma \vee F' =$ $= \widehat{F}$, де $\widehat{F}$ — формула, що є іншим позначенням формули F', яка знаходиться у корені дерева виведення, і може бути як рівною F , так і більш строгою. $T^{F'} = \widehat{F}$, коли $T = \gamma$ і $T^{F'} = \aleph$, де $\aleph$ —одна з аксіом числення $\Re^{inv}_{C,F}$, коли $F' = \gamma$.

Запис (5) показує, які об’єкти знаходяться на кожному кроці дерева виведення формули при застосуванні зворотного методу. На вершинах цього дерева (від яких будується виведення) знаходяться аксіоми, а в його корені (у випадку, коли формула, що виводиться, є загальнозначущою) — формула F .

Приклад 7. Наведемо схематичний приклад дерева виведення, застосовуючи узагальнені позначення.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\aleph_1 \qquad \aleph_2}{H_{i_1} \vee H_{i_2} \vee F'} \qquad \aleph_3}{H_{j_1} \vee H_{j_2} \vee H_{j_3} \vee F'} \qquad \aleph_4}{\gamma \vee \widehat{F}\ .}$$

Прокоментуємо наведений запис. На листках дерева знаходяться аксіоми $\aleph$ (в цьому випадку $T^{F'} = \aleph$). У самому дереві виведення знаходяться об’єкти, які виводяться, $H_{i_1} \vee H_{i_2} \vee F'$ $(T = H_{i_1} \vee H_{i_2})$ та $H_{j_1} \vee H_{j_2} \vee$ $\vee H_{j_3} \vee F'$ $(T = H_{j_1} \vee H_{j_2} \vee H_{j_3})$. Слід зауважити, що F' у обох цих об’єктах є різними — «нижня» F' є підмножиною «верхньої» F' . Що саме за цим стоїть, буде видно з прикладу, наведеного наприкінці статті. Окрім того, звернемо увагу на навмисне застосування нами різних індексів i та j , аби не склалося хибного враження, що в обох цих об’єктах, які виводяться під H , розуміються однакові літери формули F (адже у загальному випадку це не так). У корені дерева бачимо $T^{F'} = \gamma \vee F' = \gamma \vee \widehat{F} = \widehat{F}$. Навмисно перепозначимо F' на $\widehat{F}$ в корені дерева виведення, підкреслюючи, що під $\widehat{F}$ ми розуміємо таке F' , яке знаходиться в корені дерева виведення.

Аксіоми числення $\Re^{inv}_{C,F}$ задаються наведеним нижче правилом А, а правило Б — це єдине правило виводу.

- **Виведенням** секвенції $\Rightarrow F$ у численні $\Re^{inv}_{C,F}$ будемо називати дерево, на вершині якого знаходяться аксіоми числення $\Re^{inv}_{C,F}$ (сприятливі набори), отримані шляхом застосування правила А до секвенції $\Rightarrow F$. У його корені знаходиться порожній сприятливий набір, і воно побудоване шляхом застосування до даних аксіом правила Б.

Правило А. Нехай нам дана деяка секвенція, що має вигляд (1). Якщо $D_{s_j} \vee D_{s_i}$ — тавтологія, то $[s_j ; s_i]$ є сприятливим набором.

Правило Б. Якщо набори $[H_{i_1}; i_1], \ldots, [H_{i_r}; i_r]$ сприятливі, то набір $[H_{i_1}, \ldots, H_{i_r}]$ є сприятливим, де $r \equiv \delta_i$ — кількість підформул формули C_i $(1 \le i_1, ..., i_r \le \delta \;\; r \ge 0)$, C_i — деяка кон’юнктивна формула.

Зауваження 1. Не слід розуміти під правилом Б таке застосування наведеної схеми до сприятливих наборів, коли в результаті виводу буде отримано повну множину індексів більш ніж по одному числу.

Продемонструємо це зауваження на прикладі.

Приклад 8. Нехай початкова формула має вигляд

$$F = A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B\,.$$

Як видно, ця формула не є загальнозначущою. Початкова множина сприятливих наборів (МСН) матиме вигляд $\{1_1 2_1,\, 1_2 2_2\}$.

Якщо застосувати правило Б так, як забороняє зауваження, то буде побудоване таке дерево виведення (для прикладу ми навмисне розіб'ємо одну операцію на три кроки):

$$\begin{array}{ccc} 1_1 2_1 \quad\quad 1_2 2_2 & & 1_1 2_1 \quad\quad\quad 1_2 2_2 \\ \square(1,2) & => & 1_1 1_2 2_1 2_2 \\ & & | \\ & & 2_1 2_2 (1) \\ & & | \\ & & \square(1,2). \end{array}$$

Таким чином, ми вивели загальнозначущість незагальнозначущої формули.

Тепер пояснимо, що таке розуміння правила Б є хибним. Застосування правила Б у численні $\Re_{C,F}^{inv}$ відповідає одиничному застосуванню правила виведення «вставка кон'юнкції» у численні C. Проте у нашому прикладі це порушується. Покажемо це (перетворимо наведене вище дерево виведення у численні $\Re_{C,F}^{inv}$ у дерево виведення у численні C).

$$\begin{array}{cc} A \vee \neg A \quad\quad B \vee \neg B & A \vee \neg A \quad\quad B \vee \neg B \\ \gamma \vee (A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B) & A \wedge B \vee \neg A \vee \neg B \\ & | \\ & \neg A \vee \neg B \vee (A \wedge B) \\ & | \\ & \gamma \vee (A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B)\,. \end{array}$$

Як бачимо на детально розписаній гілці, спершу відбувається застосування правила виведення «вставка кон'юнкції», проте далі йде абсолютно недопустиме перетворення.

Зауваження 2. Надалі під застосуванням правила Б будемо розуміти такий його механізм, за яким номер об'єднання наборів переноситься у залежність

$$\begin{array}{c} [H_{i_1}; i_1], \ldots, [H_{i_r}; i_r] \\ \ldots \\ [H_{i_1}, \ldots, H_{i_r}] \quad (i). \end{array}$$

Пояснимо тепер детальніше механізм роботи зворотного методу та суть застосованих нами позначень.

Спершу відбувається побудова множини сприятливих наборів за правилом А. Для цього аналізується структура формули F, і з її пропозиційних літер будується ця множина. Такі літери позначаються H_{i_k} (це узагальнене позначення пропозиційної літери D_{j_s} на даному кроці побудови дерева виведення). В цілому,

$$H_{i_k} = D_{j_s},\ k \in \{0,1,\dots,\delta_i\},\ s \in \{0,1,\dots,\delta_j\},\ i, j \in \{1,\dots,\delta\}.$$

F-набір $[H_{i_k}; i_k]$ необхідно читати так: існує в F таке D_{j_s}, що D_{j_s} і D_{i_k} утворюють тавтологію.

У процесі виведення маємо на кожному кроці абсолютно істинні формули — F-набори ($T^{F'}$), що в остаточному результаті у позитивному випадку зводяться до формули F. І навпаки — F-набори визначають зовнішній вигляд формул, які могли б зустрітися у дереві виведення секвенції $\Rightarrow F$. Дерево виведення складається з F-наборів ($T^{F'}$), на вершинах якого знаходяться аксіоми $\aleph$ числення $\Re^{inv}_{C,F}$, а в корені — секвенція $\Rightarrow \widehat{F}$. Шукана секвенція $\Rightarrow F$ отримується із секвенції $\Rightarrow \widehat{F}$ застосуванням правила $(\Rightarrow \mathrm{I})$, де як формула F_2, що вставляється, може виступати порожній диз'юнкт γ.

Приклад 9. Розглянемо приклад застосування правила А та Б. Нехай маємо початкову формулу з прикладу 2. Сформуємо три перші сприятливі набори. Ними будуть $[1_1;2_1], [1_2;4_1], [1_3;3_0]$. Як видно, набори формують номери з індексами, літери яких формують тавтології. Цих наборів достатньо для того, щоб ми могли один раз застосувати правило Б. Вони містять повний набір номерів з індексами по номеру 1. Застосуємо правило Б.

$$\frac{1_1 2_1 \qquad 1_2 4_1 \qquad 1_3 3_0}{2_1 4_1 3_0 (1)} \qquad \frac{[1_1; H_{1_1}] \quad [1_2; H_{1_2}] \quad [1_3; H_{1_3}]}{[H_{1_1}; H_{1_2}; H_{1_3}] \quad (1).}$$

За цими позначеннями стоять секвенції, в яких записані формули, абсолютно істинні у численні C. Одні тому, що є його аксіомами, а інші — виводимими з аксіом за правилами виводу цього числення.

$$\frac{\Rightarrow A \vee \neg A \qquad \Rightarrow B \vee \neg B \qquad \Rightarrow C \vee \neg C}{\Rightarrow \neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee (A \wedge B \wedge C).}$$

Як видно з цього прикладу, застосуванням правила Б ми отримали перший аргумент диз'юнкції початкової формули.

Тепер перейдемо до формулювання **конструктивного алгоритму зворотного методу**. (Формулювання згадуваного далі правила Б* і доведення правил I–III див. у роботах [6, 7]. Там вони називаються лемами 1...3.) Вважатимемо, що вхідна формула знаходиться у диз'юнктивній нормальній формі.

При застосуванні правила Б можливе породження значної кількості сприятливих наборів, які є надлишковими для побудови виводів. Виникає проблема підвищення ефективності загальної схеми зворотного методу. Пропонуємо доповнити існуючі евристичні підходи. Введемо ряд необхідних означень. Усі ці означення та приведені нижче розміркування наводяться для числення висловлювань.

- ***Сприятливим набором*** (СН) називається послідовність чисел з індексами, де порядок запису цих чисел є несуттєвим. Набір записується в рядок без дужок.
- ***Сприятливим набором із залежністю*** називається СН, у якому після послідовності чисел з індексами в дужках записана послідовність чисел без індексів.
- ***Множиною сприятливих наборів*** (МСН) будемо називати множину, яка складається з деяких (можливо усіх) СН, що можуть бути побудовані зі структури початкової формули як за правилом А, так і в результаті застосування правила Б.
- ***Поточною множиною сприятливих наборів*** називатимемо таку МСН, в якій у даний час ведеться пошук СН для застосування правила Б при побудові дерева виведення. На початку дії алгоритму поточною МСН є початкова множина СН.
- ***Гілкою дерева виведення*** називається послідовність СН, яка побудована почерговим застосуванням правила Б до СН з поточної МСН.
- ***Поточною гілкою дерева виведення*** називається гілка дерева виведення, в якій у даний момент ведеться виведення застосуванням правила Б.
- ***Поточним сприятливим набором*** називатимемо СН, що є останнім (найнижчим) у гілці дерева виводу.

Правило вилучення. При побудові дерева виведення після застосування правила Б з поточної МСН гілки дерева виведення вилучаються СН, що брали участь у цьому застосуванні правила Б, а при відкритті нової гілки дерева виведення поточною МСН є початкова МСН, до якої застосовується алгоритм прополки і вилучаються усі СН, що містять номери з індексами, які є поточними в інших гілках дерева виведення.

Доведення. Якщо прослідкувати дерево пошуку виведення прямого методу, то можна помітити, що розбиття формул на підформули ведеться у кожній гілці з новими підформулами початкової формули. (Прямий метод полягає у послідовному розщепленні основної формули на підформули, які також розщеплюються відповідно до правил секвенційного числення, аж доки усі гілки дерева не будуть містити тавтології. У випадку, коли цього досягнуто, таке дерево, що називається деревом пошуку виведення, стає деревом виведення, і загальнозначущість початкової формули вважається доведеною. Зворотний метод «перевертає» напрямок побудови дерева виводу, ведучи його від аксіом-тавтологій і закінчуючи початковою формулою. Звідси він і отримав свою назву — зворотний метод.) Підформули, за якими відбувається розгалуження дерева виведення на гілки, лишаються лише у власних гілках і не зустрічаються в інших. Таким чином, базуючись на цьому спостереженні, робимо висновок, що при зворотній побудові дерева виведення як початкові підформули кожної гілки також будуть застосовуватись підформули різних формул, тобто різні СН. Тому можемо вилучати СН одразу після їх використання за правилом Б при побудові кожної гілки дерева виведення.

Примітка. У ряді випадків є можливим здійснення побудови дерева виведення й тоді, коли поточна МСН нової гілки будується не з початкової МСН, а з поточної МСН останньої гілки. Таке формулювання правила вилучення будемо називати «сильним», у той час як наведене вище — «слабким». Застосування «сильного» формулювання правила вилучення може дати суттєве скорочення виведення. Тому можливо застосування схеми, за якою побудова дерева виведення здійснюється із застосуванням «сильного» формулювання правила вилучення, а коли таке виведення не завершується вдало, то побудова дерева виведення здійснюється із застосуванням «слабкого» правила вилучення, починаючи з тої гілки, виведення якої не може бути завершене виводом нольчленного СН або СН, який містить тільки двічі обрамлені номери. (Пояснення того, що собою представляють обрамлені та двічі обрамлені номери, буде наведене нижче.)

Правило вилучення дає можливість побудувати не лише нові евристики для зворотного методу, а і змінює умови дії вже існуючих. Наведемо їх з урахуванням нових означень.

Правило I. Якщо у деякому поточному СН зустрічається число з індексом таке, що повної сукупності індексів по даному числу у поточній МСН немає, то усі такі набори без втрати виводимості можна виключити з поточної МСН, окрім того випадку, коли повна сукупність індексів формується разом із числами з індексами із СН, поточними в інших гілках дерева виведення.

Доведення. Доведемо не саме правило, а доповнення до нього (обмеження дії). Необхідність такого обмеження обумовлюється тим, що за наведеним нижче алгоритмом допускається існування декількох гілок дерева виводу, у поточних сприятливих наборах яких можуть бути числа з індексами, відсутніми у поточній МСН.

Правило II. Якщо у складі поточної МСН зустрічаються набори, що містять числа з індексом нуль, то усі такі набори можна викреслити, змінивши індексацію інших чисел цих наборів в решті початкових сприятливих наборах. Саме число з індексом нуль переноситься у залежність усіх сприятливих наборів поточної МСН.

Доведення. Доведемо не саме правило, а доповнення до нього. Необхідність такого доповнення полягає у необхідності розширення застосування зворотного методу до вироджених випадків. Наприклад, для формули $A \vee \neg A$ початковою множиною сприятливих наборів буде $\{1_0 2_0\}$. Застосувавши до неї правило II отримаємо множину $\{\square\}$, що свідчить про вдале завершення зворотного методу. Проте залежність порожня, а отже ми не вивели загальнозначущість початкової формули. Застосовуючи правило у новому формулюванні, одержуємо множину $\{\square(1,2)\}$, тобто вивід загальнозначущості початкової формули.

Правило III. За наявності серед поточної МСН такого СН, який є підмножиною деякого знову отриманого СН, використання цього нового СН для отримання виводу є надлишковим.

Правило IV. Якщо у ході виведення було отримано такий СН, що у поточній МСН є набори, які є надмножиною цього нового набору, то тоді без втрати виводимості необхідно вилучити усі такі набори.

Доведення. Дія правила ґрунтується на правилі поглинання і є синтезом правил II і III з проекцією на однолітерний СН.

- ***Алгоритмом прополки*** поточної МСН називається застосування до поточної МСН правил I...IV. (Даний термін запозичено з роботи [6] і розширено за змістом на ще одне правило.)

Правило V. Якщо після побудови початкової МСН застосували (можливо, неодноразово) алгоритм прополки поточної МСН, і в результаті отримали порожній СН, то тоді необхідно вважати отриману в залежності формулу загальнозначущою.

Доведення. Коректність застосування правила II до початкової МСН було доведено вище, тому покажемо, що застосування інших правил не заважатиме вдалому завершенню виведення без застосування правила Б. Правило I вилучає набори, застосування яких у побудові дерева виведення призведе то того, що виведення продовжувати далі буде неможливо. Тому вилучення цих сприятливих наборів не вплине на виведення загальнозначущості початкової формули. Правила III і IV можуть застосовуватись лише після правила Б, адже у початковій множині СН усі набори однакової довжини. Тому на виводимість вони вплинути не можуть. Отож, правила I, III, IV на можливість отримання виведення загальнозначущості початкової формули до першого застосування правила Б не впливають, а правило II сприяє цьому. Лишається довести коректність неодноразового застосування алгоритму прополки початкової множини СН. Розглянемо це на прикладі. Нехай початкова формула буде

$$\Rightarrow \neg A \vee \neg B \vee \neg C \wedge B \vee A \wedge B \wedge C\,,$$

а початкова множина СН

$$\{1_0 4_1, 2_0 3_2, 2_0 4_2, 3_1 4_3\}\,.$$

Застосувавши алгоритм прополки перший раз, отримуємо

$$\{\cancel{1_0 4}_1,\ \cancel{2_0 3}_2,\ \cancel{2_0 4}_2,\ 3_0 4_0(1,2)\}.$$

При цьому в алгоритмі прополки ми застосували правило II.

Слід звернути увагу, що ми змінили індексацію третього і четвертого елементів диз'юнкції і перенесли у залежність номери з нульовими індексами у викреслених наборах.

Оскільки у поточній МСН є номери з нульовими індексами, то знову застосовуємо алгоритм прополки (правило II). Отримуємо

$$\{\cancel{3_0 4}_0(1,2)\},\ \text{тобто}\quad \{\square(1,2,3,4)\}.$$

Правило VI. Якщо у застосуванні правила Б при побудові поточної гілки дерева виведення повний набір індексів за поточним номером можливий лише при такому залученні сприятливих наборів, коли у результаті застосування до них правила Б буде отримано повний набір індексів більш ніж по одному номеру, то без втрати виводимості необхідно викреслити з поточної МСН усі СН з поточним номером.

Доведення. Правило VI вказує на дії, які потрібно виконати у випадку, коли при виборі СН можна залучити лише СН, що призведе до отримання повного набору індексів більш ніж по одному номеру. Такий результат протирічить правилу виводу ($\Rightarrow \wedge$), на якому базується правило Б. Тому вилучення таких СН не вплине на виводимість початкової формули.

Додаткові правила до загальної схеми зворотного методу. Окрім допоміжних у виводі правил, сформулюємо декілька правил для ефективної побудови дерева виведення.

1. Правило обрамлення. При виводі СН номер, що переходить у залежність, обрамлюється.

2. Правило пріоритету. Розглядати номери у СН для встановлення поточності та при підборі СН з поточної МСН слід згідно із їх пріоритетом: обрамленість, кількість індексів у поточному СН, номер. У обрамленості по залученню СН пріоритет мають двічі обрамлені, потім необрамлені, обрамлені номери; встановлені поточності — необрамлені, потім обрамлені, двічі обрамлені; у кількості індексів у поточному СН більший пріоритет мають номери, у яких їх більше. Згідно із номерами більший пріоритет мають менші номери.

3. Правило скорочення. Якщо у поточному СН є два чи більше номерів з однаковими індексами, то слід їх скоротити до одного.

4. Правило вітвлення. Якщо поточний СН складається з одного номера, то проводиться аналіз початкової МСН (при застосуванні «слабкого» правила вилучення) чи поточної МСН (при «сильному» правилі). Якщо є більше одного СН, що містить доповнюючі номери з індексами до поточного СН поточної гілки, то тоді відкривається нова гілка, інакше у поточній гілці виведення продовжується. Застосовувати правило Б до однолітерних СН можна, лише коли по усім гілкам дерева виведення поточні СН складають повний набір індексів.

5. Правило подвійного обрамлення. При відкритті нової гілки поточний номер поточного СН двічі обрамлюється.

6. Правило об’єднання двічі обрамлених номерів. Правило Б застосовується до двічі обрамлених номерів з індексами тоді і тільки тоді, коли вони є поточними у гілках дерева виведення і формують повний набір індексів за номером.

Конструктивний алгоритм зворотного методу. Тепер сформулюємо схему алгоритму, який конструктивно визначить послідовність дій зворотного методу виведення загальнозначущості формули. Для спрощення ідею методу проілюструємо на численні висловлювань.

1. Привести початкову секвенцію $\Gamma \Rightarrow \Delta$ (де Γ і Δ — можливо, порожні списки формул) до вигляду $\Rightarrow F$, де F знаходиться у КНФ.

2. Формуємо початкову МСН за правилом А.

3. Застосовуємо алгоритм прополки поточної МСН (можливо, неодноразово).

4. Якщо поточна МСН порожня (містить порожній СН), то переходимо на крок 5, інакше крок 6.

5. Якщо у порожнього СН в залежності є номери, то переходимо на крок 10, інакше крок 8.

6. Дивимося, чи можна застосувати правило Б*. Якщо так, то йдемо на крок 7. Якщо ні, то крок 8.

7. Застосовуємо почергово правило Б* і правило вилучення з алгоритмом прополки доти, доки для застосування правила Б* не буде необхідних СН, або коли буде виведено порожній СН. Якщо у ході виводу жодного разу не застосовувалося правило Б, то переходимо на крок 9, інакше крок 10. При застосуванні правила Б* необхідно дотримуватися правил 1...6 та VI.

8. Початкова формула не є загальнозначущою. Переходимо на 11.

9. Початкова формула є суперечливою. Переходимо на 11.

10. Початкова формула є загальнозначущою. Переходимо на 11.

11. Кінець алгоритму.

Приклад застосування конструктивного алгоритму зворотного методу. Нехай дано формулу

$$\Rightarrow A \& \neg D \vee \neg C \& D \vee A \& C \& D \vee C \& D \vee$$

$$\vee B \& C \& \neg A \& \neg D \vee B \& \neg D \& \neg A \vee \neg A \& \neg D \,.$$

Використовуючи правило А, отримуємо початкову множину СН

$$\{1_1 5_3, 1_1 6_3, 1_1 7_1, 1_2 2_2, 1_2 3_3, 1_2 4_2, 2_1 3_2, 2_1 4_1, 2_1 5_2, 2_2 5_4, 2_2 6_2,$$

$$2_2 7_2, 3_1 5_3, 3_1 6_3, 3_1 7_1, 3_3 5_4, 3_3 6_2, 3_3 7_1, 4_2 5_4, 4_2 6_2, 4_2 7_2\}\,.$$

Застосовуємо алгоритм прополки. Виявили відсутність зібрання індексів за номерами 5 та 6. За правилом I вилучаємо усі СН, які містять ці номери. Поточна МСН

$$\{1_1 7_1, 1_2 2_2, 1_2 3_3, 1_2 4_2, 2_1 3_2, 2_1 4_1, 2_2 7_2, 3_1 7_1, 3_3 7_1, 4_2 7_2\}\,.$$

Застосовуємо алгоритм прополки. Поточна МСН коректна. Розпочинаємо виведення.

1) $1_1 7_1$[1] $\quad 1_2 2_2$

$2_2 7_1(1) \quad 2_1 3_2$

$3_2 7_1(1,2)$[2] $\quad 3_1 7_1 \quad 3_3 7_2$

$3_2 7_1(1,2) \quad 3_3 7_2$

$3_2 3_3(1,2,7)$[3] $\quad 3_1[7_1]$[4]

$[[7_1]]$[5]$(1,2,3,7)$[6]

[1] Вибір СН і поточного номера з індексом здійснено за правилом пріоритету.

[2] При виводі буде повне зібрання індексів по 3 і 7. Застосовуємо правило VI.

[3] Гілка продовжується за правилом вітвлення.

[4] Номер обрамлено за правилом обрамлення.

[5] Номер двічі обрамлено за правилом подвійного обрамлення.

[6] Розпочинається нова гілка за правилом вітвлення.

Згідно із конструктивним формулюванням правила вилучення поточна МСН нової гілки буде такою:

$$\{1_2 3_3, 1_2 4_2, 2_1 4_1, 2_1 4_1, 2_2 7_2, 4_2 7_2\}.$$

Застосовуємо алгоритм прополки. Немає повного зібрання індексів за номерами 1 і 3. Вилучаємо СН, які містять ці номери. Поточна МСН має вигляд $\{2_1 4_1, 2_1 4_1, 2_2 7_2, 4_2 7_2\}$.

Застосовуємо алгоритм прополки. Поточна МСН коректна. Розпочинаємо виведення.

2) $2_2[[7_2]] \quad 2_1 4_1$

$4_1[[7_2]](2) \quad 4_2[[7_2]]$

$[[7_2]](2,4)$[7] $\qquad [[7_1]]$[8]$(1,2,3,7)$

$\square\ (1,2,3,4,7)$

[7] Поточна МСН: $\{\varnothing\}$.

[8] За правилом об'єднання двічі обрамлених номерів проводимо об'єднання першої та другої гілок.

Виведення завершено виводом формули $\Rightarrow 1,2,3,4,7$, тобто $\Rightarrow F'$, що є більш конструктивною за F.

ВИСНОВКИ

Конструктивний алгоритм зворотного методу полягає у постановці чітких правил, при дотриманні яких процес виведення буде коротким та однозначним. Подальший розвиток алгоритму полягає у його формулюванні для усіх числень, для яких існує формулювання загальної схеми зворотного методу, та у пошуку оптимізаційних правил, що враховують специфіку цих числень для забезпечення здійснення мінімального виведення.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Маслов С.Ю.* Обратный метод установления выводимости для логических исчислений // Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. — **98**. — М.: Ин-т им. В.А. Стеклова АН СССР. — 1968. — С. 26–87.
2. *Маслов С.Ю.* Теория дедуктивних систем и ее применения. — М.: Радио и связь, 1986. — С. 90–114.
3. *Degtyarev A., Voronkov A.* The inverse Method, in A. Robinson & A. Voronkov, eds, `Handbook of Automated Reasoning. — 2001. — P. 181–270.
4. *Tammet T.* Resolution, inverse method and the sequent calculus. In A. Leitsch G. Gottlog and D. Mundici, editors, Proceedings of the 5th Kurt Godel Colloquium on Computational Logic and Proof Theory (KGC'97). — Vienna: Springer-Verlag LNCS, 1997. — P. 65–83.
5. *Pfenning F.* Automated theorem proving. — Pittsburgh PA: Carnegie Mellon University, 2004. — P. 93–116.
6. *Катречко С.Л.* Модификации обратного метода С.Ю. Маслова // Материалы X Всесоюзн. конф. по логике, методологии и философии науки. — М.: ИФ РАН, 1990. — С. 7–18.
7. *Катречко С.Л.* Моделирование правила расщепления в обратном методе С.Ю. Маслова // Логические методы в компьютерных науках. — М.: ИФ РАН, 1991.— С. 24–36.

Надійшла 05.04.2006