

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ВЫХОДНЫХ ЦЕПЯХ РАЗРЯДНО-ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Проведено порівняльний аналіз зручності використання алгебраїчних і гіперболічних поліномів, які апроксимують залежність опору гранульованих струмопровідних середовищ від струму, що в них протікає при розрахунку перехідних процесів у вихідних колах розрядно-імпульсних систем.

Проведен сравнительный анализ удобства использования алгебраических и гиперболических полиномов, аппроксимирующих зависимость сопротивления гранулированных токопроводящих сред от протекающего в них тока при расчете переходных процессов в выходных цепях разрядно-импульсных систем.

ВВЕДЕНИЕ

При анализе переходных процессов в электрических цепях широкое распространение получили аппроксимации нелинейных характеристик реальных нагрузок алгебраическими полиномами. Преимуществом алгебраических полиномов является то, что они легко интегрируются и дифференцируются, а также не содержат особых точек. В [1] показано, что при аппроксимации зависимости сопротивлений гранулированных сред от протекающего в них тока наиболее точность и диапазон интерполяции обеспечивают гиперболические ряды. Данные ряды также хорошо интегрируются и дифференцируются, однако содержат особую точку при нулевом значении аргумента. Одним из способов избежать данной точки является добавление к модулю аргумента бесконечно малой величины. В представленной работе сравним удобство применения алгебраических и гиперболических полиномов, аппроксимирующих зависимость сопротивлений гранулированных сред от протекающего в них тока, с точки зрения решения дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы в выходных цепях разрядно-импульсных систем.

1. СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ ИССЛЕДУЕМОЙ ЦЕПИ

На текущий момент в технологических процессах искрозрозийной обработки гранулированных токопроводящих сред наибольшее распространение получили генераторы импульсов с емкостными накопителями электрической энергии [2].

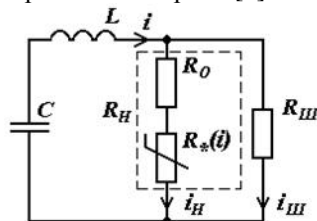


Рис. 1

Эквивалентная схема замещения выходной цепи такого генератора с замкнутым разрядным коммутатором представлена на рис. 1. Емкостной накопитель на рис. 1 обозначен C , индуктивность соединительных кабелей – L , сопротивление нагрузки – R_H , его постоянная составляющая – R_0 , зависящая от тока составляющая – $R_*(i)$, сопротивление шунтирующей нагрузки резистора – $R_Ш$, ток в нем – $i_Ш$, ток емкостного накопителя – i , а ток нагрузки – i_H .

Резистор $R_Ш$ необходим для обеспечения безаварийных режимов работы генераторов с зарядным и разрядным тиристорными коммутаторами при самопроизвольном возрастании сопротивления нагрузки R_H в несколько раз [3].

2. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПРИ АППРОКСИМАЦИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ НАГРУЗКИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

Зависимость эквивалентного электрического сопротивления гранулированной среды от протекающего в ней тока можно аппроксимировать алгебраическим полиномом [1]:

$$\begin{aligned} R_H &= a_0 + a_1 i_H + a_2 i_H^2; \\ R_0 &= a_0; \\ R_* &= a_1 i_H + a_2 i_H^2. \end{aligned} \quad (1)$$

С учетом того, что при такой аппроксимации напряжение на нелинейной составляющей нагрузки будет $i_H R_* = a_1 i_H^2 + a_2 i_H^3$ его первая производная примет вид $\frac{d(i_H R_*)}{dt} = \frac{di_H}{dt} (2a_1 i_H + 3a_2 i_H^2)$, а вторая, соответственно

$$\frac{d^2(i_H R_*)}{dt^2} = \frac{d^2 i_H}{dt^2} (2a_1 i_H + 3a_2 i_H^2) + \left(\frac{di_H}{dt}\right)^2 (2a_1 + 6a_2 i_H)$$

и обозначения:

$$\begin{aligned} R_A &= R_0 R_Ш / (R_0 + R_Ш); \\ R_Ш / (R_0 + R_Ш) &= R_A / R_0. \end{aligned} \quad (2)$$

уравнение, описывающее переходной процесс в цепи рис. 1 примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_H}{dt^2} + \frac{R_A}{L} \frac{di_H}{dt} + \omega_0^2 i_H + \frac{R_A}{R_0} \left[\frac{1}{R_Ш} \cdot \frac{d^2 i_H}{dt^2} (2a_1 i_H + 3a_2 i_H^2) + \right. \\ \left. \frac{1}{R_Ш} \cdot \left(\frac{di_H}{dt}\right)^2 (2a_1 + 6a_2 i_H) + \frac{1}{L} \cdot \frac{di_H}{dt} (2a_1 i_H + 3a_2 i_H^2) + \right. \\ \left. + \frac{\omega_0^2}{R_Ш} (a_1 i_H^2 + a_2 i_H^3) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При записи (3) учитывалось, что

$$i = i_H \frac{R_0 + R_Ш}{R_Ш} + \frac{1}{R_Ш} (a_1 i_H^2 + a_2 i_H^3). \quad (4)$$

Начальные условия в этом случае имеют вид:

$$i_H|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{di_H}{dt} \right|_{t=0} = \frac{-Q_0 \omega_0^2 R_Ш}{R_0 + R_Ш}. \quad (5)$$

Уравнение (3) является нелинейным и не решается методами прямого дифференцирования. Поэтому для его решения применим метод малого параметра [4]. В качестве малого параметра выберем:

$$\varepsilon = \frac{R_Ш}{R_0 + R_Ш} = \frac{R_A}{R_0} < 1. \quad (6)$$

Ток в нагрузке представим в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра:

$$i_H = i_0 + \varepsilon i_1 + \varepsilon^2 i_2 + \dots \quad (7)$$

Ненулевые начальные условия будем учитывать только в порождающем решении. Уравнение при ε^0 принимает вид:

$$\frac{d^2 i_0}{dt^2} + \frac{R_A}{L} \frac{di_0}{dt} + \omega_0^2 i_0 = 0, \quad (8)$$

а порождающее решение:

$$i_0 = C_{10} e^{\lambda_1 t} + C_{20} e^{\lambda_2 t}, \quad (9)$$

$$\text{где} \quad \lambda_{1,2} = -\frac{R_A}{2L} \pm \sqrt{\frac{R_A^2}{4L^2} - \omega_0^2}. \quad (10)$$

В уравнении (10) знак "+" учитывается при λ_1 , а знак "-" – при λ_2 . С учетом начальных условий (5) находим постоянные интегрирования:

$$C_{10} = -C_{20} = \frac{Q_0 \omega_0^2 R_A}{(\lambda_2 - \lambda_1) R_0} = K_0. \quad (11)$$

Нулевое приближение по току нагрузки (порождающее решение) принимает вид:

$$i_0 = K_0 (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (12)$$

Запишем уравнение при ε^1 :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R_A}{L} \frac{di_1}{dt} + \omega_0^2 i_1 = \\ & = - \left[\frac{d^2 i_0}{dt^2} \frac{(2a_1 i_0 + 3a_2 i_0^2)}{R_\phi} + \left(\frac{di_0}{dt} \right)^2 \frac{(2a_1 + 6a_2 i_0)}{R_\phi} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{L} \cdot \frac{di_0}{dt} (2a_1 i_0 + 3a_2 i_0^2) + \frac{\omega_0^2}{R_\phi} (a_1 i_0^2 + a_2 i_0^3) \right] = F_1(t). \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом (12) можем записать:

$$F_1(t) = M_{11} e^{2\lambda_1 t} + M_{12} e^{2\lambda_2 t} + M_{13} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} + M_{21} e^{3\lambda_1 t} + \\ + M_{22} e^{3\lambda_2 t} + M_{23} e^{(2\lambda_1 + \lambda_2)t} + M_{24} e^{(\lambda_1 + 2\lambda_2)t}; \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} M_{11} &= -a_1 K_0^2 \left(\frac{4}{R_{\text{ш}}} \lambda_1^2 + \frac{2}{L} \lambda_1 + \frac{\omega_0^2}{R_{\text{ш}}} \right); \\ M_{12} &= -a_1 K_0^2 \left(\frac{4}{R_{\text{ш}}} \lambda_2^2 + \frac{2}{L} \lambda_2 + \frac{\omega_0^2}{R_{\text{ш}}} \right); \\ M_{21} &= -a_2 K_0^3 \left(\frac{9}{R_{\text{ш}}} \lambda_1^2 + \frac{3}{L} \lambda_1 + \frac{\omega_0^2}{R_{\text{ш}}} \right); \\ M_{13} &= 2a_1 K_0^2 \left(\frac{1}{R_{\text{ш}}} (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \frac{1}{L} (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{\omega_0^2}{R_{\text{ш}}} \right); \\ M_{22} &= a_2 K_0^3 \left(\frac{9}{R_{\text{ш}}} \lambda_2^2 + \frac{3}{L} \lambda_2 + \frac{\omega_0^2}{R_{\text{ш}}} \right); \\ M_{23} &= 3a_2 K_0^3 \left(\frac{1}{R_{\text{ш}}} (3\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2) + \frac{1}{L} (2\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{\omega_0^2}{R_{\text{ш}}} \right); \\ M_{24} &= -3a_2 K_0^3 \left(\frac{1}{R_{\text{ш}}} (\lambda_1^2 + 3\lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2) + \frac{1}{L} (\lambda_1 + 2\lambda_2) + \frac{\omega_0^2}{R_{\text{ш}}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Решением уравнения (13) будет:

$$i_1 = C_{11} e^{\lambda_1 t} + C_{21} e^{\lambda_2 t} + i_{1\text{ч}}. \quad (16)$$

Поскольку $F_1(t)$ является суммой нескольких экспоненциальных функций, применим свойство неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными

коэффициентами [5] и представим частное решение уравнения (13) в виде суммы частных решений:

$$i_{1\text{ч}} = A_{11} e^{2\lambda_1 t} + A_{12} e^{2\lambda_2 t} + A_{13} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} + A_{21} e^{3\lambda_1 t} + \\ + A_{22} e^{3\lambda_2 t} + A_{23} e^{(2\lambda_1 + \lambda_2)t} + A_{24} e^{(\lambda_1 + 2\lambda_2)t}. \quad (17)$$

В (17) значения коэффициентов:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{M_{11}}{\varphi(2\lambda_1)}; \quad A_{12} = \frac{M_{12}}{\varphi(2\lambda_2)}; \quad A_{13} = \frac{M_{13}}{\varphi(\lambda_1 + \lambda_2)}; \\ A_{21} &= \frac{M_{21}}{\varphi(3\lambda_1)}; \quad A_{22} = \frac{M_{22}}{\varphi(3\lambda_2)}; \quad A_{23} = \frac{M_{23}}{\varphi(2\lambda_1 + \lambda_2)}; \\ A_{24} &= \frac{M_{24}}{\varphi(\lambda_1 + 2\lambda_2)} \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(2\lambda_1) &= -2 \frac{R_A}{L} \lambda_1 - 3\omega_0^2; \quad \varphi(2\lambda_2) = -2 \frac{R_A}{L} \lambda_2 - 3\omega_0^2; \\ \varphi(\lambda_1 + \lambda_2) &= \omega_0^2; \quad \varphi(3\lambda_1) = -6 \frac{R_A}{L} \lambda_1 - 8\omega_0^2; \\ \varphi(2\lambda_2) &= -6 \frac{R_A}{L} \lambda_2 - 8\omega_0^2; \quad \varphi(2\lambda_1 + \lambda_2) = -2 \frac{R_A}{L} \lambda_1; \\ \varphi(\lambda_1 + 2\lambda_2) &= -2 \frac{R_A}{L} \lambda_2; \end{aligned} \quad (19)$$

- значения характеристического уравнения цепи при определенных аргументах. Постоянные интегрирования находим при помощи метода Крамера [5]:

$$C_{11} = \frac{B_2 - B_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad C_{21} = \frac{B_1 \lambda_1 - B_2}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

где $B_1 = A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24}$;

$$B_2 = 2\lambda_1 A_{11} + 2\lambda_2 A_{12} + (\lambda_1 + \lambda_2) A_{13} + 3\lambda_1 A_{21} + \\ + 3\lambda_2 A_{22} + (2\lambda_1 + \lambda_2) A_{23} + (\lambda_1 + 2\lambda_2) A_{24}.$$

Если ограничиться только первым приближением, то соотношение для определения i_H имеет вид:

$$i_H = K_0 (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) + \frac{R_A}{R_0} (C_{11} e^{\lambda_1 t} + C_{21} e^{\lambda_2 t} + i_{1\text{ч}}). \quad (20)$$

3. АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПРИ АППРОКСИМАЦИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ НАГРУЗКИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

Если зависимость эквивалентного электрического сопротивления гранулированной среды от протекающего в ней тока описывать гиперболическим полиномом второй степени [1], то:

$$R_H = a_0 + \frac{a_1}{|i_H|} + \frac{a_2}{i_H^2}, \quad R_0 = a_0, \quad R_* = \frac{a_1}{i_H} + \frac{a_2}{i_H^2}. \quad (21)$$

В этом случае напряжение на нелинейной составляющей нагрузки будет описываться выражением $i_H R_* = a_1 + a_2 / i_H$, а его первая и вторая производные соответственно:

$$\frac{d(i_H R_*)}{dt} = \frac{-a_2}{i_H^2} \cdot \frac{di_H}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d^2(i_H R_*)}{dt^2} = \frac{-a_2}{i_H^2} \cdot \frac{d^2 i_H}{dt^2} + \frac{2a_2}{i_H^3} \left(\frac{di_H}{dt} \right)^2.$$

Таким образом, уравнение, описывающее переходные процессы в рассматриваемой цепи, имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 i_i}{dt^2} + \frac{R_A}{L} \frac{di_i}{dt} + \omega_0^2 i_i + \frac{\omega_0^2 a_1}{R_0 + R_\phi} + \frac{R_A}{R_0} \times \\ & \times \left[\frac{-a_2}{R_\phi i_i^2} \cdot \frac{d^2 i_i}{dt^2} + \frac{2a_2}{R_\phi i_i^3} \cdot \left(\frac{di_i}{dt} \right)^2 - \frac{a_2}{i_i^2 L} \cdot \frac{di_i}{dt} + \frac{\omega_0^2 a_2}{R_\phi i_i} \right] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Для решения уравнения (22) применим метод малого параметра [4], который определяется по (6) и будем искать i_H в виде (7). Тогда уравнение при ε^0 принимает вид:

$$\frac{d^2 i_0}{dt^2} + \frac{R_A}{L} \cdot \frac{di_0}{dt} + \omega_0^2 i_0 = \frac{-\omega_0^2 a_1}{R_0 + R_{ш}}, \quad (23)$$

а порождающее решение:

$$i_0 = C_{10} e^{\lambda_1 t} + C_{20} e^{\lambda_2 t} - \frac{a_1}{R_0 + R_{ш}}. \quad (24)$$

В этом случае для нахождения постоянных интегрирования необходимо пользоваться не начальными условиями, которые в данном случае некорректны, а специальными условиями в точке достижения функцией $i(t)$ максимального значения:

$$i_H = I_m \Big|_{t=t_m}; \quad \frac{di_H}{dt} \Big|_{t=t_m} = 0. \quad (25)$$

Тогда постоянные интегрирования определяются по формуле:

$$C_{10} = K_0 \lambda_2 e^{-\lambda_1 t_m}; \quad (26)$$

$$C_{20} = -K_0 \lambda_1 e^{-\lambda_2 t_m}.$$

где
$$K_0 = \frac{I_m (R_0 + R_{ш}) + a_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)(R_0 + R_{ш})}. \quad (27)$$

Корни характеристического уравнения определяются согласно (10). Таким образом, порождающее решение:

$$i_0 = K_0 (\lambda_2 e^{\lambda_1(t-t_m)} - \lambda_1 e^{\lambda_2(t-t_m)}) - \frac{a_1}{(R_0 + R_{ш})}. \quad (28)$$

Уравнение при ε^1 имеет вид:

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R_A}{L} \frac{di_1}{dt} + \omega_0^2 i_1 = \frac{a_2}{R_{ш} i_0^2} \cdot \frac{d^2 i_0}{dt^2} - \frac{2a_2}{R_{ш} i_0^3} \cdot \left(\frac{di_0}{dt} \right)^2 + \frac{a_2}{L i_0^2} \cdot \frac{di_0}{dt} - \frac{\omega_0^2 a_2}{R_{ш} i_0} = F_1(t). \quad (29)$$

Для нахождения решения уравнения (29) воспользуемся методом изменения произвольных постоянных Лагранжа [5]. С этой целью представим решение в виде:

$$i_1 = \vartheta_1(t) e^{\lambda_1 t} + \vartheta_2(t) e^{\lambda_2 t}, \quad (30)$$

$$\vartheta_1(t) = - \int \frac{F_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} dt + C_{11};$$

где
$$\vartheta_2(t) = \int \frac{F_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} dt + C_{21}. \quad (31)$$

Формула для определения $i_H(t)$ с учетом только нулевого и первого приближений принимает вид:

$$i_f = K_0 (\lambda_2 e^{\lambda_1(t-t_m)} - \lambda_1 e^{\lambda_2(t-t_m)}) - \frac{a_1}{(R_0 + R_{ш})} + \frac{R_A}{R_0} (\vartheta_1(t) e^{\lambda_1 t} + \vartheta_2(t) e^{\lambda_2 t}). \quad (32)$$

ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

1. Как видно из приведенных расчетов, использование алгебраического полинома по сравнению с гиперболическим для аппроксимации зависимости эквивалентного электрического сопротивления гранулированных токопроводящих сред от протекающего в них импульсного тока не имеет преимуществ ни при

решении дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы в таких цепях, ни при анализе полученных результатов.

2. Поскольку приближение зависимости сопротивления гранулированных токопроводящих сред от протекающего в них тока гиперболическими полиномами характеризуются малой невязкой и большим диапазоном интерполяции, использование их является предпочтительным при анализе переходных процессов в цепях с такими нагрузками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захарченко С.Н. Моделирование зависимости электрического сопротивления гранулированных токопроводящих сред от протекающего в них импульсного тока // Технічна електродинаміка. – 2012. – № 5. – С. 17-27.
2. Щерба А.А., Захарченко С.Н., Лопатко К.Г., Шевченко Н.И., Ломко Н.А. Разрядно-импульсные системы производства нанокolloидных растворов биологически активных металлов методом объемного электронноспроводящего диспергирования // Пр. Ін-ту електродинаміки НАН України: Зб. наук. пр. – Київ: ІЕД НАНУ. – 2010. – № 26. – С. 152-160.
3. Щерба А.А., Захарченко С.М., Супруновська Н.І., Шевченко Н.І., Монастирський Г.Є., Перетятко Ю.В., Петрученко О.В. Стабілізація режимів електротехнологічних систем для отримання іскроерозійних мікро- та нанопорошків // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск Силова електроніка та енергоефективність. – 2006. – Ч.1. – С. 120-123.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики, Т.2 – М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1953. – 628 с.

Bibliography (transliterated): 1. Zaharchenko S.N. Modelirovanie zavisimosti elektricheskogo soprotivleniya granulirovannykh tokoprovodyaschikh sred ot protekayushchego v nih impul'snogo toka // Tehnichna elektrodinamika. - 2012. - № 5. - S. 17-27. 2. Scherba A.A., Zaharchenko S.N., Lopat'ko K.G., Shevchenko N.I., Lomko N.A. Razryadno-impul'snye sistemy proizvodstva nanokolloidnykh rastvorov biologicheskii aktivnykh metallov metodom ob'emnogo `elektroiskrovogo dispergirovaniya // Pr. In-tu elektrodinamiki NAN Ukraїni: Zb. nauk. pr. - Kїiv: IED NANU. - 2010. - № 26. - S. 152-160. 3. Scherba A.A., Zaharchenko S.M., Suprunovs'ka N.I., Shevchenko N.I., Monastirskij G.E., Peretyatko Yu.V., Petruchenko O.V. Stabilizaciya rezhimiv elektrotehnologichnih sistem dlya otrimannya iskroeroziynih mikro- ta nanoporoshkiv // Tehnichna elektrodinamika. Tematichnij vipusk Silova elektronika ta energoeftivnist'. - 2006. - Ch.1. - S. 120-123. 4. Bogolyubov N.N., Mitropol'skij Yu.A. Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij. - M.: Nauka, 1974. - 504 s. 5. Smirnov V.I. Kurs vyshej matematiki, T.2 - M.: Gos. izd-vo tehniko-teoreticheskij lit-ry, 1953. - 628 s.

Поступила 20.10.2012

Шидловская Наталья Анатольевна, чл.-корр. НАН Украины
Захарченко Сергей Николаевич, к.т.н.
Институт электродинамики НАН Украины
03680, Киев, пр. Победы, 56
тел. (044) 4542425, 4542494
e-mail: shydlovskaya@ied.org.ua, snzakhar@bk.ru

Shydlovskaya N.A., Zakharchenko S.N.

Comparative analysis of algebraic and hyperbolic polynomials application in research on transients in output circuits of discharge-pulse systems.

A comparative analysis of usability of algebraic and hyperbolic polynomials approximating current dependence of granulated current-carrying media resistance at calculation of transients in discharge-pulse system output circuits is carried out.

Key words – nonlinear resistance, approximation, transient process.