

ПРО НЕВІДПОВІДНІСТЬ СХЕМИ ЗАМІЩЕННЯ ТРАНСФОРМАТОРА ЙОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРОЦЕСАМ

Показано невідповідність відомих схем заміщення лінійного трансформатора його електромагнітним процесам, розглянута залежність складових векторного потенціалу від розподілу векторів щільності струмів обмоток трансформатора, встановлені формули, що виражають магнітні потоки розсіяння через просторові компоненти чотиривимірних потенціалів.

Показано несоответствие известных схем замещения линейного трансформатора его электромагнитным процессам, рассмотрены зависимости составляющих векторного потенциала от распределения векторов плотностей токов обмоток трансформатора, установлены формулы, выражающие магнитные потоки рассеяния через пространственные компоненты четырехмерных потенциалов.

ВСТУП

Для аналізу і розрахунку різних режимів роботи трансформатора, в тому числі і визначення вторинної напруги при різних навантаженнях, а також для розрахунку складних електричних кіл, в які трансформатор входить як один з складових елементів, реальний трансформатор замінюють еквівалентною схемою заміщення.

Відомі схеми заміщення трансформатора, що розглядаються у відповідних розділах теоретичних основ електротехніки, не відповідають електромагнітним процесам, що відбуваються в трансформаторі. Дана невідповідність полягає, наприклад, в тому, що в режимі холостого ходу напруги на вихідних затисках трансформатора і схеми заміщення мають різний характер. Це обумовлено тим, що в цих схемах заміщення в вітку намагнічування включена позитивна взаємна індуктивність M . Підставою такого включення є, наприклад [1,4], нічим не мотивоване використання математичного прийому, що полягає в підсумовуванні і відніманні однієї і тієї ж величини в правих частинах рівнянь, складених по другому закону Кірхгофа для первинної і вторинної обмоток. В рівнянні для первинної обмотки невідомо чому величина $j\omega M \dot{I}_1$ підсумовується з $j\omega M \dot{I}_2$, а віднімається від $j\omega L_1 \dot{I}_1$. В рівнянні для вторинної обмотки вже величина $j\omega M \dot{I}_2$ підсумовується з $j\omega M \dot{I}_1$ і віднімається від $j\omega L_2 \dot{I}_2$. Але ж таким же чином (на тій же підставі) замість підсумовування може бути проведено віднімання і навпаки, що змінить схему заміщення, у тому числі і вітку намагнічування.

Отже, дослідження електромагнітних процесів лінійного трансформатора і уточнення схеми його заміщення, що забезпечує відповідність електромагнітних процесів даних пристроїв, є актуальною проблемою, рішення якої дозволяє підвищити надійність функціонування електротехнічних систем, що містять трансформатор.

ОСНОВНИЙ ТЕКСТ СТАТТІ

Електромагнітні процеси, що відбуваються в лінійному трансформаторі, повною мірою описуються основними рівняннями електродинаміки – рівняннями Максвелла:

$$\operatorname{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t} + \delta, \quad (\text{A})$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (\text{B})$$

$$\operatorname{div} D = \rho, \quad (\text{C})$$

$$\operatorname{div} B = 0. \quad (\text{D})$$

Розрахунок електромагнітного поля будь-якого електротехнічного пристрою, у тому числі трансформатора зводиться до відшукування основних векторів поля шляхом інтегрування рівнянь Максвелла. Причому достатньо визначити який-небудь з двох векторів електричного поля і який-небудь з двох векторів магнітного поля, щоб далі за допомогою простих співвідношень, що характеризують середовище, можна було знайти два, що залишилися, вектори. Отже, математично рішення зводиться до інтегрування двох векторних або шести скалярних рівнянь по числу координатних складових векторів поля.

Оскільки дивергенція ротора дорівнює нулю, рівняння (D) дозволяє представити вектор магнітної індукції B як ротор векторного потенціалу A . Використовування другого рівняння Максвелла з урахуванням того, що ротор градієнта тотожно рівний нулю дозволяє представити вектор напруженості E за допомогою похідної за часом векторного і градієнта скалярного потенціалів. Таким чином, вектори B і E можуть бути виражені через чотири скалярні функції: A_x, A_y, A_z і ϕ , що значною мірою полегшує розрахунок поля, а значить, і розрахунок самого електротехнічного пристрою.

Передача енергії з первинної обмотки трансформатора у вторинну здійснюється електромагнітним шляхом за допомогою магнітного поля, створюваного струмами даних обмоток.

Основними рівняннями магнітного поля, є рівняння закону Ампера або закону повного струму:

$$\operatorname{rot} H = \delta, \quad (1)$$

і рівняння, що описує принцип безперервності силових ліній магнітного поля, тобто відсутність вільних магнітних зарядів:

$$\operatorname{div} B = 0. \quad (2)$$

Рівняння (1) і (2) представлені в диференціальній формі. Вектори магнітної індукції B і напруженості H магнітного поля для однорідних середовищ зв'язані співвідношенням:

$$B = \mu_a H. \quad (3)$$

Порівняння рівнянь (1)-(3) показує, що магнітна

рівновага встановлюється лише в тому випадку, якщо вектор магнітної індукції B одночасно підкоряється рівнянням [2]:

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{rot} B = \mu_a \delta. \quad (4)$$

Рішенням рівнянь (4) є співвідношення:

$$B = \operatorname{rot} A, \quad (5)$$

в якому вектор A підкоряється рівнянням:

$$\nabla^2 A = -\mu_a \delta, \quad \operatorname{div} A = 0. \quad (6)$$

З рішенням у вигляді (5) перше з рівнянь (4) виконується автоматично, оскільки дивергенція ротора дорівнює нулю. Друге з рівнянь (4) переписується у вигляді:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \nabla^2 A = \mu_a \delta,$$

звідки і витікає умова (6) справедлива для магнітного поля, у якого лінії вектора A є замкнуті на себе лінії.

Загальним рішенням рівнянь (6), що вказує на можливість магнітної рівноваги, є вираз:

$$A = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta}{r} dV. \quad (7)$$

Різниця між двома рішеннями B і B' , що підкоряються рівнянням (4), буде кінцевим рішенням однорідних рівнянь у всіх точках. Тому вона буде тотожно рівна нулю і стан при магнітній рівновазі однозначно характеризуватиметься завданням B .

Підстановка виразу (5) в друге рівняння Максвела $\operatorname{rot} E = -\partial B / \partial t$ із зміною порядку диференціювання за часом і по просторових координатах і з урахуванням того, що ротор градієнта тотожно рівний нулю, дозволяє одержати співвідношення:

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi. \quad (8)$$

Якщо виразити основні вектори електромагнітного поля за допомогою комбінацій похідних від компонент чотиривимірного потенціалу рівняннями (5), (8), при цьому вважати діелектричну проникність ϵ_a і магнітну проникність μ_a постійними величинами, то перше рівняння Максвела:

$$\operatorname{rot} H = \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} + \delta$$

приймає вигляд:

$$\frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \delta - \epsilon_a \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \epsilon_a \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Беручи до уваги одну з основних формул векторного аналізу, ($\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \nabla^2 A$) останній вираз перетвориться таким чином:

$$\frac{1}{\mu_a} (\operatorname{grad} \operatorname{div} A - \nabla^2 A) = \delta - \epsilon_a \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \epsilon_a \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (9)$$

У виразі (9) векторний потенціал A і скалярний φ є компонентами чотиривимірного потенціалу, для визначення яких в теорії Лоренца додається умова [3]:

$$\operatorname{div} A + \epsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Отже, першому рівнянню Максвела відповідає вираз:

$$\nabla^2 A - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_a \delta \quad (10)$$

звідки:

$$\frac{1}{\mu_a} \nabla^2 A - \epsilon_a \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\delta.$$

Одержане рівняння (10) є неоднорідним векторним хвильовим рівнянням і є добре вивченим в математиці рівнянням Д'Аламбера, яке часто записується у вигляді:

$$\square A = -\mu_a \delta,$$

де $\square = \nabla^2 - \partial^2 / \partial t^2$ – так званий оператор Д'Аламбера або чотиривимірний лапласіан (за четверте вимірювання приймається час t).

Таким чином, рівняння (10) дозволяє визначити значення векторного потенціалу, знайти три його скалярні функції A_x, A_y, A_z по заданому розподілу векторів щільностей струмів первинної δ_1 і вторинної δ_2 обмоток трансформатора, що дає можливість набути значення вектора B магнітного поля взаємодії обмоток за допомогою простої диференціальної операції (5).

Магнітний потік, пронизуючий яку-небудь поверхню S , визначається таким чином:

$$\Phi = \int_S B dS. \quad (11)$$

Оскільки відповідно до основних положень векторного аналізу дивергенція ротора дорівнює нулю, рівняння (D) дозволяє представити вектор магнітної індукції виразом (5), тому:

$$\Phi = \int_S \operatorname{rot} A dS.$$

На підставі теореми Стокса поверхневий інтеграл може бути перетворений в лінійний:

$$\int_S \operatorname{rot} A dS = \oint_l A dl.$$

Отже, для визначення магнітного потоку, пронизуючого деяку поверхню S (вторинну або первинну обмотки трансформатора), необхідно знайти циркуляцію векторного потенціалу по замкнутому контуру, на який спирається дана поверхня:

$$\Phi = \oint_l A dl. \quad (12)$$

У формулі (12) векторний потенціал A і потік Φ обумовлені струмами всіх обмоток трансформатора. Через принцип суперпозиції можна записати:

$$A = \sum_k^n A_k \quad (13)$$

де A_k – векторний потенціал, створюваний в даній точці струмом k -тої обмотки трансформатора.

Вираз (13) можна розвернути таким чином:

$$A = A_n + \sum_k^n \delta_{nk} A_k, \quad \text{де } \delta_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{при } k = n \\ 1 & \text{при } k \neq n \end{cases}. \quad (14)$$

Отже, магнітний потік, пронизуючий n -ту обмотку трансформатора, створений струмом цієї обмотки, (магнітний потік самоіндукції) визначається співвідношенням:

$$\Phi_n = \oint_{l_n} A_n dl_n \quad (15)$$

Магнітному потоку, пронизуючому n -тую обмотку, обумовленому струмом k -тої обмотки, (магнітному потоку взаєміндукції) відповідає вираз:

$$\Phi_{nk} = \oint_{l_n} A_k dl_n \quad (16)$$

Коефіцієнт пропорційності між магнітним потоком самоіндукції і струмом, що його створює, називається індуктивністю L . Коефіцієнт пропорційності між магнітним потоком взаєміндукції і струмом, що його створює, є взаємною індуктивністю M .

Друге рівняння Максвелла (В) описує процеси перетворення магнітного поля (магнітної енергії) в електричне поле (електричну енергію). Інтегрування по поверхні, пронизуючої вектором B магнітної індукції, обох частин рівняння (В)

$$\left(\int_S \text{rot} E dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B dS \right)$$

з урахуванням теореми Стокса

$$\left(\int_S \text{rot} E dS = \oint_l E dl \right)$$

показує, що

$$\oint_l E dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B dS,$$

або, беручи до уваги рівняння (11):

$$\oint_l E dl = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = e(t).$$

Таким чином, використання векторного потенціалу дозволяє за допомогою інтегрування по контуру знайти створювані струмами первинної і вторинної обмоток магнітні потоки, що забезпечують передачу (перетворення) електромагнітної енергії з однієї обмотки в іншу.

Щоб визначити миттєве значення е.р.с. взаєміндукції $e_{21}(t)$, що наводиться у вторинній обмотці, але обумовленої струмом первинної обмотки, необхідно скористатися формулою (16) знайти магнітний потік. При цьому слід враховувати, що:

$$\Psi_{21} = M_{21} \dot{i}_1(t) = M \dot{i}_1(t) \quad (17)$$

тому:

$$e_{21}(t) = -M \frac{\partial \dot{i}_1}{\partial t}.$$

Дана е.р.с. є сторонньою для вторинної обмотки трансформатора і в режимі холостого ходу напруга на її вихідних затисках рівна е.р.с., тобто:

$$u_{2x}(t) = e_{21x}(t) = -M \frac{\partial \dot{i}_{1x}}{\partial t}.$$

Тоді як в схемах заміщення лінійного трансформатора, описуваних у відповідних розділах курсу ТОЕ, наприклад [1, 4], $u_{2x}(t)$ визначається виразом:

$$u_{2x}(t) = M \frac{\partial \dot{i}_{1x}}{\partial t},$$

що суперечить електромагнітним процесам, що відбу-

ваються в трансформаторі.

Магнітні потоки можуть бути представлені як результат накладення потоків, створюваних кожним із струмів окремо, і позначені, наприклад, таким чином: Φ_{11} – потік, створений струмом i_1 ; Φ_{22} – потік, створений струмом i_2 ; Φ_{12} – потік, створений струмом i_2 і пронизуючий не тільки вторинну, але і первинну обмотку (магнітний потік взаємної індукції, пов'язаний з первинною обмоткою, обумовлений струмом вторинної обмотки); Φ_{21} – потік, створений струмом і пронизуючий не тільки первинну і вторинну обмотки (магнітний потік взаємної індукції, пов'язаний з вторинною обмоткою, обумовлений струмом первинної обмотки); Φ_{s1} – потік, створений струмом i_1 і пронизуючий тільки первинну обмотку (потік розсіяння первинної обмотки); Φ_{s2} – потік, створений струмом i_2 і пронизуючий тільки вторинну обмотку (потік розсіяння вторинної обмотки).

Отже:

$$\Phi_{11} = \Phi_{s1} + \Phi_{21}, \quad \Phi_{22} = \Phi_{s2} + \Phi_{12}. \quad (18)$$

Даним магнітним потокам відповідають потокозчеплення: $\Psi_{11} = w_1 \Phi_{11}$ – потокозчеплення самоіндукції первинної обмотки; $\Psi_{22} = w_2 \Phi_{22}$ – потокозчеплення самоіндукції вторинної обмотки; $\Psi_{12} = w_1 \Phi_{12}$ – потокозчеплення взаємної індукції, пов'язане з первинною обмоткою, обумовлене струмом i_2 вторинної обмотки; $\Psi_{21} = w_2 \Phi_{21}$ – потокозчеплення взаємної індукції, пов'язане з вторинною обмоткою, обумовлене струмом i_1 первинної обмотки.

Для лінійного трансформатора мають місце співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{\Psi_{11}}{i_1}, \quad L_2 = \frac{\Psi_{22}}{i_2} \\ M_{21} &= \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{w_2 \Phi_{21}}{i_1} \\ M_{12} &= \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{w_1 \Phi_{12}}{i_2} \\ M_{12} &= M_{21} = \sqrt{\frac{\Psi_{12} \Psi_{21}}{i_1 i_2}} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Магнітні потоки, визначувані як:

$$\Phi_{s1} = \Phi_{11} - \Phi_{21}, \quad \Phi_{s2} = \Phi_{22} - \Phi_{12}$$

є потоками розсіяння, отже, потокозчепленням розсіяння відповідають вирази:

$$\begin{aligned} \Psi_{s1} &= w_1 \Phi_{s1} = w_1 (\Phi_{11} - \Phi_{21}) = \Psi_{11} - w_1 \Phi_{21}; \\ \Psi_{s2} &= w_2 \Phi_{s2} = w_2 (\Phi_{22} - \Phi_{12}) = \Psi_{22} - w_2 \Phi_{12}. \end{aligned}$$

Тому індуктивності розсіяння первинної і вторинної обмоток трансформатора повинні визначатися таким чином:

$$\left. \begin{aligned} L_{s1} &= \frac{\Psi_{s1}}{i_1} = \frac{\Psi_{11}}{i_1} - \frac{w_1 \Phi_{21}}{i_1}, \\ L_{s2} &= \frac{\Psi_{s2}}{i_2} = \frac{\Psi_{22}}{i_2} - \frac{w_2 \Phi_{12}}{i_2}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Відповідно до рівнянь (14)-(16) магнітні потоки, що використовуються у формулах (18) і (19), описуються за допомогою векторного потенціалу, що спрощує і уточняє знаходження основних векторів

магнітного поля трансформатора. Крім того в цьому випадку виключається інше трактування поняття "індуктивність розсіяння". Таким чином, одержані формули (20) визначення L_{s1} , L_{s2} і, встановлені (виведені) за допомогою просторових компонент чотири-вимірних потенціалів, забезпечують правильність їх тлумачення і дозволяють підвищити точність визначення даних індуктивностей

Із співвідношень (14), (16), (17) і (20) витікає, що формули визначення індуктивності розсіяння первинної і вторинної обмоток трансформатора, описані в [4]:

$$\left. \begin{aligned} L_{s1} &= \frac{\Psi_{11}}{i_1} - \frac{w_1}{w_2} \frac{\Psi_{21}}{i_1} = L_1 - \frac{w_1}{w_2} M \\ L_{s2} &= \frac{\Psi_{22}}{i_2} - \frac{w_2}{w_1} \frac{\Psi_{12}}{i_2} = L_2 - \frac{w_2}{w_1} M \end{aligned} \right\},$$

суперечать основним рівнянням електротехніки, з яких одержані співвідношення (20), і тому не можуть бути використані при описі електромагнітних процесів лінійного трансформатора.

Відповідно до закону електромагнітної індукції струм первинної обмотки наводить у вторинній обмотці е.р.с. взаємодукції, миттєве значення якої визначається виразом:

$$e_{21}(t) = -\frac{\partial \Psi_{21}}{\partial t} = -M \frac{\partial i_1}{\partial t}.$$

Дана е.р.с. є сторонньою для вторинної обмотки трансформатора. Тому в режимі холостого ходу вичезає е.р.с. повинна бути і напругою на виході вторинної обмотки трансформатора, тобто:

$$u_{2x}(t) = -M \frac{\partial i_{1x}}{\partial t}. \quad (21)$$

Отже, тільки описана в роботах [5, 6] схема є схемою заміщення лінійного трансформатора, оскільки напруга на її виході в режимі холостого ходу визначається формулою (21), що можливе лише в тому випадку, якщо в вітті намагнічування розташована взаємна індуктивність, узятя із знаком мінус ($-M$).

ВИСНОВКИ

Таким чином, схема заміщення лінійного трансформатора, в вітті намагнічування якої міститься взаємна індуктивність $-M$, однозначно відповідає електромагнітним процесам даного трансформатора. Тому при її використанні в процесі розрахунку складних електричних систем, в які трансформатор входить як один з складових елементів, забезпечується підвищення надійності функціонування даних систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Нейман Л.Р. Демирчан К.С. Теоретические основы электротехники. Том 1. Теория линейных электрических цепей. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 536 с.
2. Тоннела М.-А. Основы электромагнетизма и теории относительности. – М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 483 с.
3. Паули В. Теория относительности. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит. 1991. – 328 с.
4. Атабеков Г.И. Теория линейных электрических цепей. – Л.: "Советское радио", 1960 – 712 с.
5. Придубков П.Я., Хоменко І.В. Дослідження схеми заміщення лінійного трансформатора // Энергозбереження. Энергетика. Энергоаудит. – 2010. – № 9. – С. 44-50.
6. Придубков П.Я., Хоменко І.В. Теорія чотириполюсників і схема заміщення трансформатора // Електротехніка і електромеханіка. – 2011. – № 1. – С. 58-60.

Bibliography (transliterated): 1. Nejman L.R. Demirchan K.S. Teoreticheskie osnovy `elektrotehniki. Tom 1. Teoriya linejnyh `elektricheskix cepej. - L.: `Energoizdat, 1981. - 536 s. 2. Tonnela M.-A. Osnovy `elektromagnetizma i teorii otnositel'nosti. - M.: Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1962. - 483 s. 3. Pauli V. Teoriya otnositel'nosti. - M.: Nauka. Gl. red. Fiz.-mat. lit. 1991. - 328 s. 4. Atabekov G.I. Teoriya linejnyh `elektricheskix cepej. - L.: "Sovetskoe radio". 1960 - 712 s. 5. Pridubkov P.Ya., Homenko I.V. Doslidzhennya shemi zamischennya linijnogo transformatora // Energozberzhennya. Energetika. Energoaudit. - 2010. - № 9. - S. 44-50. 6. Pridubkov P.Ya., Homenko I.V. Teoriya chotiripolyusnikov i shema zamischennya transformatora // Elektrotehnika i elektromehnika. - 2011. - № 1. - S. 58-60.

Надійшла 10.07.2012

Придубков Павло Якович, к.т.н., доц.
доцент кафедри "Електротехніка та електричні машини"
Українська державна академія залізничного транспорту
61050, Харків, пл. Фейербаха, 7
тел. (057) 7301996

Хоменко Ігор Васильович, к.т.н., доц.
доцент кафедри "Передача електричної енергії"
Національний технічний університет
"Харківський політехнічний інститут"
61002, Харків, вул. Фрунзе 21

Pridubkov P.Y., Khomenko I.V.

About inadequacy of transformer equivalent circuits to its electromagnetic processes.

Inadequacy of available equivalent circuits of a linear transformer to its electromagnetic processes is shown. Dependences of vector potential components on the transformer winding current density vectors distribution are analyzed. Formulas for stray flux through spatial components of four-dimensional potentials are derived.

Key words – transformer, electromagnetic processes, equivalent circuits, inadequacy.