УДК 621.3.011

И.В. Пентегов, А.Л. Приступа

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДА ХОУ ДЛЯ РАСЧЕТА ЧАСТИЧНЫХ ЕМКОСТЕЙ СИСТЕМЫ ПРОВОДНИКОВ

Запропоновано новий спосіб вдосконалення методу Хоу для розрахунку часткових ємностей системи провідників. На прикладі системи паралельних циліндричних провідників показано, що даний метод є більше точним у порівнянні із класичним методом Хоу.

Предложен новый способ усовершенствования метода Хоу для расчета частичных емкостей системы проводников. На примере системы параллельных цилиндрических проводников показано, что данный метод является более точным по сравнению с классическим методом Хоу.

ВВЕДЕНИЕ

Задача нахождения частичных емкостей в системе проводников может быть строго решена на основе расчета электростатического поля рассматриваемой системы. Для расчета электростатического поля, используя группы формул Максвелла, необходимо знать распределение потенциала и заряда проводников, что не всегда возможно. Поэтому в тех случаях, когда расчет электростатического поля не может быть выполнен, используются специальные методы расчета емкости, основанные на установлении точной или приближенной связи заряда проводника непосредственно с потенциалом его поверхности, среди которых выделяют методы непосредственного определения емкости и вспомогательные методы и оценки. [1]

Методы непосредственного определения емкости применимы в тех случаях, когда проводники расположены в однородной или кусочно-однородной среде. Эти методы основаны на замене каждого из рассматриваемых проводников диэлектрическим телом, имеющим ту же форму, что и проводник, и ту же диэлектрическую проницаемость, что и окружающая среда. При этом вместо неизвестного истинного (равновесного) распределения заряда по поверхности проводника задается некоторое фиктивное распределение заряда по поверхности тела или в его объеме.

Вспомогательные методы основаны на геометрическом преобразовании проводников (при котором значения емкостей остаются постоянными или изменяются известным образом) с целью свести задачу определения емкостей к виду, доступному для расчетов либо методами непосредственного определения емкости, либо путем предварительного расчета электростатического поля; или определяют пределы, в которых находится истинное значение емкости.

Из всех методов расчета емкостей более подробно остановимся на методе средних потенциалов, который позволяет довольно просто определить значения частичных емкостей в системах цилиндрических проводников, применимых, например, в системах беспроводной передачи энергии при помощи тесловских процессов. [2-3]

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДА ХОУ

Метод средних потенциалов основан на задании фиктивного распределения заряда по поверхности или в объеме тел, заменяющих проводники. При этом поверхности каждого из тел приписывается постоянный потенциал, равный среднему арифметическому значений потенциала во всех точках поверхности тела ($U = U_{\text{СР}}$). Эту величину ($U_{\text{СР}}$) называют средним потенциалом поверхности или средним потенциалом проводника.

Наиболее распространенным является допущение о том, что заряд распределен по поверхности тела равномерно. Основанный на этом допущении метод расчета емкости был предложен Г. Хоу и носит его имя.

Реальное распределение заряда вдоль проводника будет отличаться от равномерного, что вносит дополнительную погрешность в расчет частичных емкостей. Равномерное распределение в методе Хоу было принято для упрощения расчета. С развитием вычислительной техники вопросы сложности математических расчетов стоят не так остро, поэтому для увеличения точности можно задаться более сложным законом распределение заряда.

Рассмотрим для примера расчет частичных емкостей в системе проводников рис. 1.

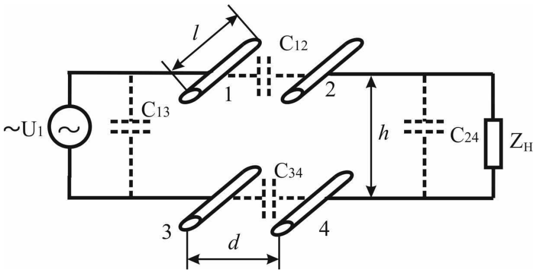


Рис. 1

Для системы проводников потенциалы на поверхности проводников связаны с их зарядами первой группой формул Максвелла:

$$\begin{aligned} U_1 &= \alpha_{11}\cdot Q_1+\alpha_{12}\cdot Q_2+\ldots+\alpha_{1n}\cdot Q_n; \\ U_2 &= \alpha_{21}\cdot Q_1+\alpha_{22}\cdot Q_2+\ldots+\alpha_{2n}\cdot Q_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_n &= \alpha_{n1}\cdot Q_1+\alpha_{n2}\cdot Q_2+\ldots+\alpha_{nn}\cdot Q_n; \end{aligned} \qquad (1)$$

где потенциальные коэффициенты α_{ij} определяются согласно методу средних потенциалов по формулам

$$\alpha_{ij} = -\frac{\varphi_{cp\,ij}}{Q_{cp\,i}}; \qquad (2)$$

Значение частичных емкостей определяется по формулам [4]

$$C_{ik} = -\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}; \quad C_{kk} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_{kj}}{\Delta}\,; \qquad (3)$$

где Δ – определитель матрицы потенциальных коэффициентов; Δ_{ik} – алгебраическое дополнение.

Как известно [5] потенциал, создаваемый проводником длиной l и радиусом a в точке А (рис.2), определяется выражением:

$$\varphi(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int\limits_{-l/2}^{l/2}\frac{\tau(x)dx}{\sqrt{y^2+(x_0-x)^2}}. \qquad (4)$$

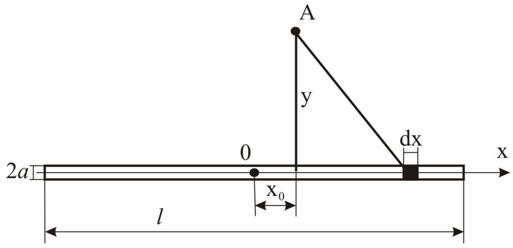


Рис. 2

Пусть линейная плотность заряда непостоянна вдоль проводника, размещенного по оси x, а определяется выражением:

$$\tau(x)=\tau_0+\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot x^{2\cdot i} \qquad (5)$$

где τ_0 – линейная плотность заряда в центре проводника; b_i – коэффициенты аппроксимации; n – количество членов ряда.

Так как распределение заряда симметрично относительно центра проводника, то при выборе функции распределения учитываем только четные степени x.

Для нахождения распределения зарядов воспользуемся условием равенства потенциала в любых точках поверхности проводника.

Заряд на малом отрезке проводника dx можно считать сосредоточенным на оси отрезка, тогда на поверхности проводника потенциал будет равен

$$\varphi(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\int\limits_{-l/2}^{l/2}\frac{\tau(x)dx}{\sqrt{a^2+(x_0-x)^2}} \qquad (6)$$

Для уменьшения времени затрачиваемого при машинном расчете, лучше перейти к безразмерным величинам

$$x'=\frac{x}{0{,}5\cdot l};\quad x_0'=\frac{x_0}{0{,}5\cdot l};\quad a'=\frac{a}{0{,}5\cdot l};$$
$$b_i'=\frac{b_i}{\tau_0};d'=\frac{d}{0{,}5\cdot l};\quad h'=\frac{h}{0{,}5\cdot l}; \qquad (7)$$

$$\varphi'(x')=\frac{\varphi(x')}{\tau_0/4\pi\varepsilon_0}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{1+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i'\cdot x'^{2\cdot i}}{\sqrt{a^2+(x_0'-x')^2}}dx' \qquad (8)$$

Для нахождения b_i необходимо задаться количеством членов ряда n , а также соответствующими координатами выбранных точек $\overline{X}_{\Gamma}=(0;x_1;x_2;\dots x_n)$, потенциалы которых будут равны между собой. Решая систему полученных уравнений, находим значения b_i

$$\begin{cases}\varphi(0)-\varphi(x_1)=0;\\ \varphi(x_1)-\varphi(x_2)=0;\\ \vdots\\ \varphi(x_{n-1})-\varphi(x_n)=0,\end{cases} \qquad (9)$$

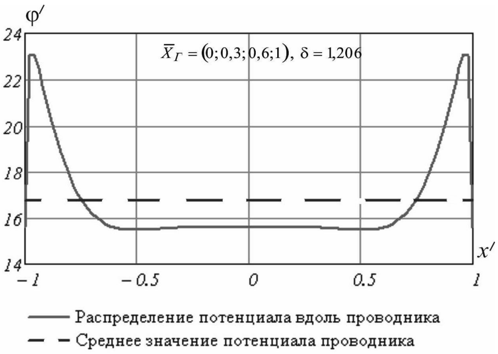
где $\varphi(x_i)$ – потенциал на поверхности проводника в i-ой выбранной точке.

При нахождении коэффициентов b_i важную роль играет выбор точек, в которых должно обеспечиваться равенство потенциала, а также количество членов ряда n (рис. 3).

Для определения равномерности распределения потенциала по поверхности проводника воспользуемся среднеквадратичной ошибкой:

$$\delta=\int\limits_0^1\sqrt{(\varphi'(x')-\varphi'(0))^2}\cdot dx'. \qquad (10)$$

Минимальное значение δ соответствует наиболее рациональному размещению выбранных точек.



а

б

Рис. 3

На рис. 4 показано распределение потенциала вдоль проводника при n = 12 для следующих точек $\overline{X}_{\Gamma}$ = (0; 0,08; 0,16; 0,24; 0,32; 0,4; 0,48; 0,81; 0,86; 0,87; 0,94; 0,97). В данном случае среднеквадратичная ошибка δ не превышает 2 %, распределение потенциала по поверхности практически равномерно, а коэффициенты b_i имеют следующие значения для a =1 мм, l =30 см, h =30 см, d =3 см:

$b_1'=0{,}073$; $b_2'=0{,}044$; $b_3'=0{,}055$; $b_4'=-0{,}552$;
$b_5'=7{,}496$; $b_6'=-52{,}493$; $b_7'=208{,}573$; $b_8'=-474{,}686$;
$b_9'=612{,}359$; $b_{10}'=-416{,}263$; $b_{11}'=115{,}988$.

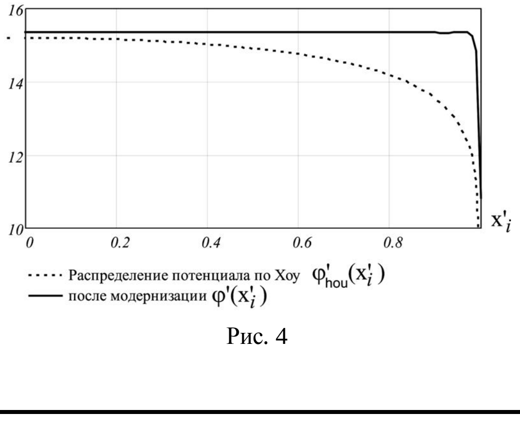


Рис. 4

После определения коэффициентов b_i средний заряд проводника определяется по формуле:

$$Q_{\text{ср}} = \int_{-0{,}5\cdot l}^{0{,}5\cdot l} \tau(x)\cdot dx = \tau_0 \cdot \frac{l}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} b_i' \cdot x'^{2\cdot i} \right) dx' \quad (11)$$

График распределения заряда вдоль проводника представлен на рис. 5.

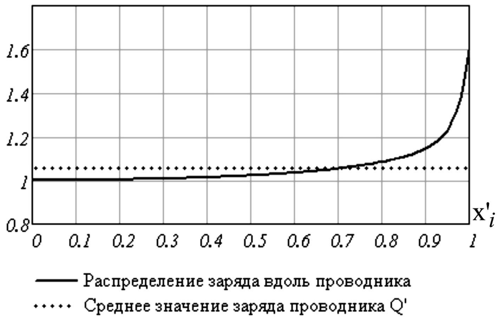


Рис. 5

Для системы проводников рис. 1, учитывая, что все проводники одинаковы и расположены параллельно друг другу, потенциал, создаваемый зарядом проводника 1 в точке x_0' на поверхности проводников 2, 3 и 4 соответственно, будет равняться

$$\varphi_{12}'(x_0') = \int_{-1}^{1} \frac{1 + \sum_{i=1}^{n} b_i' \cdot x'^{2\cdot i}}{\sqrt{d'^2 + (x_0' - x')^2}} dx';$$

$$\varphi_{13}'(x_0') = \int_{-1}^{1} \frac{1 + \sum_{i=1}^{n} b_i' \cdot x'^{2\cdot i}}{\sqrt{h'^2 + (x_0' - x')^2}} dx'; \quad (12)$$

$$\varphi_{14}'(x_0') = \int_{-1}^{1} \frac{1 + \sum_{i=1}^{n} b_i' \cdot x'^{2\cdot i}}{\sqrt{d'^2 + h'^2 + (x_0' - x')^2}} dx'.$$

Средние значения потенциалов на поверхности проводников 2, 3 и 4 соответственно, будут равняться

$$\varphi_{\text{ср}\,12}' = \int_{0}^{1} \varphi_{12}'(x_0') dx_0';$$

$$\varphi_{\text{ср}\,13}' = \int_{0}^{1} \varphi_{13}'(x_0') dx_0'; \quad \varphi_{\text{ср}\,14}' = \int_{0}^{1} \varphi_{14}'(x_0') dx_0'. \quad (13)$$

Используя полученные формулы для определения средних зарядов и потенциалов, можно определить потенциальные коэффициенты, по которым рассчитать частичные емкости.

Результаты расчета частичных емкостей для системы проводников (рис. 1) при a = 1 мм, l = 30 см, h = 30 см, d = 3 см для классического метода Хоу и усовершенствованного представлены в табл. 1.

Таблица 1

Частичная емкость	C_{11}, пФ	C_{12}, пФ	C_{13}, пФ	C_{14}, пФ
Метод Хоу	1,617	0,7066	0,08979	0,08852
усовершенствованный	1,626	0,7071	0,09062	0,08934

ВЫВОДЫ

Предложен новый способ усовершенствования метода средних потенциалов, который предполагает использование более сложного закона распределения заряда вдоль проводника.

Предложенный способ проиллюстрирован на примере расчета частичных емкостей в системе параллельных цилиндрических проводников.

Оказалось, что величина частичных емкостей в данном случае выше, чем в классическом методе Хоу. Известно, что классический метод Хоу дает заниженное значение емкости [1], поэтому предлагаемые усовершенствования позволяют повысить точность определения частичных емкостей в системе многих проводников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической ёмкости. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 288 с.
2. Пентегов И.В., Приступа А.Л. О возможности беспроводной передачи энергии с помощью тесловских процессов // Техническая электродинамика. – 2005. – № 3. – С. 11-15.
3. Пентегов І.В., Приступа А.Л. Аналіз теслівських процесів при передачі енергії без проводів // Вісник Чернігівського державного технологічного університету. Збірник. – 2005. – № 25. – С. 116-122.
4. Шимони К. Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. – 775 с.
5. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: Высш. шк., 1983. – 463 с.

Bibliography (transliterated): *1.* Iossel' Yu.Ya., Kochanov `E.S., Strunskij M.G. Raschet `elektricheskoj emkosti. - L.: `Energoizdat, 1981. - 288 s. *2.* Pentegov I.V., Pristupa A.L. O vozmozhnosti besprovodnoj peredachi `energii s pomosch'yu teslovskih processov // Tehnicheskaya `elektrodinamika. - 2005. - № 3. - S. 11-15. *3.* Pentegov I.V., Pristupa A.L. Analiz teslivs'kih procesiv pri peredachi energiї bez provodiv // Visnik Chernigivs'kogo derzhavnogo tehnologichnogo universitetu. Zbirnik. - 2005. - № 25. - S. 116-122. *4.* Shimoni K. Teoreticheskaya `elektrotehnika. - M.: Mir, 1964. - 775 s. *5.* Matveev A.N. `Elektrichestvo i magnetizm. - M.: Vyssh. shk., 1983. - 463 s.

Поступила 14.10.2011

Пентегов Игорь Владимирович, д.т.н., проф.
Институт электросварки им. Е.О.Патона
отдел электротермии
03680, Киев-150, ул. Боженко, 11
тел. (044) 287-23-88, e-mail: i.v.pentegov@gmail.com

Приступа Анатолий Леонидович, к.т.н.
Черниговский государственный технологический университет
кафедра физики
14000, Чернигов, ул. Шевченко, 95
тел. (04622) 3-22-99, e-mail: prystol@ukr.net

Pentegov I.V., Prystupa A.L.

An improved Hou method for calculation of partial capacitance of a system of conductors.

The paper presents a new procedure for improving Hou method for calculating partial capacitance of a system of conductors. With an example of a system of parallel cylindrical conductors, it is shown that this method is more accurate than the classical Hou method.

Key words – **Tesla processes, wireless transmission, Maxwell's equations, partial capacitance.**