

И. Ю. Хома, О. Г. Дашко

**О РЕШЕНИИ ТРЕТЬЕЙ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С
КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ ВСЕСТОРОННЕМ РАСТЯЖЕНИИ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: reolog@inmech.kiev.ua*

Abstract. A solution of the problem on the stress state of infinite transversely isotropic plate with curvilinear (non-circular) hole is obtained using the method of expanding the unknown functions into the Fourier series by Legendre functions together with the boundary-shape perturbation method. It is assumed that the plate is uniformly tensed at infinity and the normal displacement and tangential stresses are zero on the hole surface. The numerical data are analyzed.

Key words: infinite transversely isotropic plate, stress state, curvilinear (non-circular) hole, elliptical hole, quadratic hole, triangular hole.

Введение.

Изучению концентрации напряжений около отверстий в нетонких пластинах посвящены многие публикации [7, 10, 18 – 21, 24 и др.]. На рассмотрении этого класса задач апробируются разные подходы и методы: методы однородных решений [11, 13], асимптотический [8], конечно-элементный [22, 23], разложения по толщине [1, 16]. В работах [6, 15] изложена методика решения задач о напряженном состоянии нетонких трансверсально-изотропных пластин с криволинейными (некруговыми) отверстиями. В основу решения положен метод разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины [1, 9, 12] и метод возмущения формы границы [2, 5]. Изложенным способом в [17] получено решение задачи о распределении напряжений около криволинейного (эллиптического, квадратного и треугольного) отверстия в трансверсально-изотропной пластине, находящейся в поле равномерного всестороннего растяжения, при условии свободного от внешних усилий контура.

Ниже рассмотрена аналогичная задача о равномерном растяжении неограниченной пластины с криволинейным отверстием, на контуре которого заданы однородные (нулевые) условия для нормального смещения и касательных напряжений, т.е. один из возможных вариантов третьей краевой задачи теории упругости [3].

§1. Постановка задачи. Основные уравнения и соотношения.

Примем, что пластина толщиной $2h$ ($h = \text{const}$) отнесена к декартовой системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$), причем x_1, x_2 принадлежат срединной плоскости S , совпадающей с плоскостью изотропии, а $x_3 \in [-h, h]$. Пластина, рассматриваемая как трехмерное тело, ослаблена некруговой цилиндрической полостью $L \times [-h, h]$, кривая L которой незначительно отличается от окружности радиуса R . На поверхности полости заданы нулевые значения для нормального перемещения и касательных напряжений, а на бесконечности пластина находится под действием равномерного всестороннего растяжения.

Для решения задачи воспользуемся методом разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\xi)$ и методом возмущения формы границы. Представим, следуя [1, 15], компоненты вектора перемещений $u_j(x_1, x_2, x_3)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ в виде

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi), \quad (1.1)$$

где $x = (x_1, x_2) \in S$; $\xi = h^{-1}x_3 \in [-1, 1]$; $u_j^{(k)}(x)$; $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коэффициенты разложений, именуемые ниже моментами (номер момента соответствует порядку полинома Лежандра); N – натуральное число, которое примем четным $N = 2n$ ($n = 0, 1, \dots, < \infty$).

Относительно моментов напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$, как функций двух независимых переменных, получаем [15] систему уравнений

$$\partial_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(k)} - (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{3j}^{(k)} + f_j^{(k)} = 0 \quad (j=1, 2, 3; k = \overline{0, N}). \quad (1.2)$$

Здесь $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$); $K = (k-1)/2$; символ $[K]$ обозначает целую часть числа K ; $f_j^{(k)}$ – свободные члены, содержащие заданные значения напряжений σ_{3j}^+ и σ_{3j}^- на плоских гранях $x_3 = \pm h$. Соотношения упругости для анизотропного тела имеют вид

$$\sigma_{ij}^{(k)} = c_{ijlm} \varepsilon_{lm}^{(k)}, \quad (1.3)$$

где c_{ijlm} – упругие постоянные, удовлетворяющие условиям симметрии [4]; $\varepsilon_{im}^{(k)}$ – моменты деформаций, определяемые равенствами

$$\varepsilon_{\alpha j}^{(k)} = \partial_\alpha u_j^{(k)} \quad (\alpha = 1, 2); \quad \varepsilon_{3j}^{(k)} = (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[N_k]} u_j^{(k+2s+1)} \quad (j=1, 2, 3). \quad (1.4)$$

В приведенных равенствах $N_k = (N-k-1)/2$ (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, причем греческие буквы принимают значения 1, 2, а латинские – 1, 2, 3).

Если внести значения функций (1.3), (1.4) в равенства (1.2) и принять напряжения $\sigma_{3j}^+ = \sigma_{3j}^- = 0$, то получим однородную систему уравнений относительно моментов вектора перемещений. Для трансверсально-изотропной пластины она распадается на две группы уравнений, описывающих, соответственно, симметричное и кососимметричное (по отношению к срединной плоскости S) деформирование пластины. При симметричном деформировании система уравнений имеет вид [14]

$$c_{66} \Delta u_\alpha^{(2k)} + (c_{12} + c_{66}) \partial_\alpha e^{(2k)} + (4k+1)h^{-1} \sum_{s=1}^n \left(\lambda_{2s-1}^{(k)} \partial_\alpha u_3^{(2s-1)} - c_{44} h^{-1} \beta_{2s}^{(k)} u_\alpha^{(2s)} \right) = 0$$

$$(\alpha = 1, 2; k = \overline{0, n});$$

$$c_{44} \Delta u_3^{(2k-1)} + (4k-1)h^{-1} \sum_{s=0}^n \left(\gamma_{2s}^{(k)} e^{(2s)} - c_{33} h^{-1} \alpha_{2s-1}^{(k)} u_3^{(2s-1)} \right) = 0 \quad (k = \overline{1, n}), \quad (1.5)$$

где Δ – оператор Лапласа; $e^{(2k)} = \partial_{\alpha} u_{\alpha}^{(2k)}$;

$$\lambda_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, 1 \leq s \leq k; \\ c_{13}, k < s \leq n; \end{cases} \quad \gamma_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, 0 \leq s < k; \\ c_{44}, k \leq s \leq n; \end{cases}$$

$\alpha_{2s-1}^{(k)}, \beta_{2s}^{(k)}$ – абсолютные константы:

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s-1), 1 \leq s \leq k; \\ k(2k-1), k \leq s \leq n; \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), 1 \leq s \leq k; \\ k(2k+1), k \leq s \leq n; \end{cases}$$

$c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$ – упругие постоянные, определяемые формулами

$$c_{11} = (1 - \nu^2)E/d; \quad c_{12} = (\nu + \nu^2)E/d; \quad c_{13} = \nu'(1 + \nu)E/d;$$

$$c_{33} = (1 - \nu^2)E/ed; \quad c_{44} = G'; \quad c_{66} = G = E/2(1 + \nu); \quad d = (1 + \nu)(1 - \nu - 2\nu\nu'^2).$$

Здесь $e = E/E'$; ν, ν' и E, E' – коэффициенты Пуассона и модули упругости в плоскости изотропии и нормальной к ней плоскости; G' – поперечный модуль сдвига.

Общее аналитическое решение системы уравнений (1.5) в комплексной форме имеет вид [14]

$$c_{66}u_+^{(0)} = \kappa^* \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_l;$$

$$c_{66}u_+^{(2)} = \kappa_2^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2)} \partial_{\bar{z}} V_l + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}} W_s;$$

$$c_{66}u_+^{(2k)} = h \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_l + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} W_s \quad (k = \overline{2, n}); \quad (1.6)$$

$$c_{66}u_3^{(1)} = -\kappa_1^* h \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + \sum_{l=1}^{2n} c_l^{(1)} V_l;$$

$$c_{66}u_3^{(2k-1)} = \sum_{l=1}^{2n} c_l^{(2k-1)} V_l \quad (k = \overline{2, n}); \quad u_+^{(2k)} = u_1^{(2k)} + iu_2^{(2k)},$$

где $\varphi(z), \psi(z)$ – произвольные голоморфные функции; V_l и W_s – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta V_l - k_l h^{-2} V_l = 0; \quad \Delta W_s - \lambda_s h^{-2} W_s = 0, \quad (1.7)$$

в которых параметрами k_l и λ_s являются корни соответствующих характеристических уравнений; $a_l^{(2k)}, b_s^{(2k)}, c_l^{(2k-1)}$ – безразмерные константы;

$$\kappa^* = 1 + \frac{2c_{66}}{c_{1c_{11}}}; \quad \kappa_1^* = \frac{2c_{13}c_{66}}{c_{1c_{11}}c_{33}}; \quad \kappa_2^* = \frac{2\kappa_1^*}{3}; \quad c = 1 - \frac{c_{13}^2}{c_{1c_{33}}}; \quad c_1 = c - \frac{c_{66}}{c_{11}}.$$

При симметричном деформировании трансверсально-изотропной пластины уравнения состояния (1.3) в комплексной форме представим таким образом:

$$\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} = 2 \left[(c_{12} + c_{66}) e^{(2k)} + (4k+1) c_{13} h^{-1} \sum_{s=k+1}^n u_3^{(2s-1)} \right];$$

$$\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} = 4c_{66} \partial_{\bar{z}} u_+^{(2k)}; \quad \sigma_{33}^{(2k)} = c_{13} e^{(2k)} + (4k+1) c_{33} h^{-1} \sum_{s=k+1}^n u_3^{(2s-1)} \quad (k = \overline{0, n});$$

$$\sigma_+^{(2k-1)} = \sigma_{13}^{(2k-1)} + \sigma_{23}^{(2k-1)} = c_{44} \left[2\partial_{\bar{z}} u_3^{(2k-1)} + (4k-1) h^{-1} \sum_{s=k}^n u_+^{(2s)} \right] \quad (k = \overline{1, n}). \quad (1.8)$$

С учетом значений функций (1.6), соотношения (1.8) примут вид

$$\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} = 4 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_l^{(0)} V_l; \quad \sigma_{33}^{(0)} = h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_{3l}^{(0)} V_l;$$

$$\sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{22}^{(0)} + 2i\sigma_{12}^{(0)} = 4 \left[-z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} + h \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_l \right];$$

$$\sigma_{11}^{(2)} - \sigma_{22}^{(2)} + 2i\sigma_{12}^{(2)} = 4h \left(\kappa_2^* h \overline{\varphi'''(z)} + \sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2)} \partial_{\bar{z}}^2 V_l + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s \right);$$

$$\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} = 2h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_l^{(2k)} V_l; \quad \sigma_{33}^{(2k)} = h^{-1} \sum_{l=1}^{2n} d_{3l}^{(2k)} V_l \quad (k = \overline{1, n}); \quad (1.9)$$

$$\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} = 4h \left[\sum_{l=1}^{2n} a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_l + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s \right] \quad (k = \overline{2, n});$$

$$\sigma_+^{(2k-1)} = 2 \left[\sum_{l=1}^{2n} p_l^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_l + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} W_s \right] \quad (k = \overline{1, n}),$$

где $d_l^{(2k)}$, $p_l^{(2k-1)}$, $q_s^{(2k-1)}$ – постоянные, определяемые равенствами

$$d_l^{(2k)} = \frac{c_{12} + c_{66}}{2c_{66}} a_l^{(2k)} k_l + \frac{(4k+1)c_{13}}{c_{66}} \sum_{s=k+1}^n c_l^{(2s-1)};$$

$$d_{3l}^{(2k)} = \frac{c_{13}}{2c_{66}} a_l^{(2k)} k_l + \frac{(4k+1)c_{33}}{c_{66}} \sum_{s=k+1}^n c_l^{(2s-1)};$$

$$p_l^{(2k-1)} = \frac{c_{44}}{2c_{66}} \left[2c_l^{(2k-1)} + (4k-1) \sum_{s=k}^n a_l^{(2s)} \right]; \quad q_s^{(2k-1)} = \frac{(4k-1)c_{44}}{2c_{66}} \sum_{l=k}^n b_s^{(2l)}.$$

Введем полярную систему координат r, θ и воспользуемся формулами преобразования

$$\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} = e^{-2i\theta} \left(\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} \right);$$

$$\sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} = \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)}; \quad \sigma_{r3}^{(2k-1)} + i\sigma_{\theta 3}^{(2k-1)} = e^{-i\theta} \sigma_+^{(2k-1)}; \quad (1.10)$$

$$u_r^{(2k)} + iu_\theta^{(2k)} = e^{-i\theta} u_+^{(2k)}.$$

Отсюда получаем необходимые выражения для краевых условий соответствующих задач. В частности, для сформулированной третьей краевой задачи имеем равенства

$$c_{66}u_r^{(2k)} = \operatorname{Re}\left(c_{66}u_+^{(2k)}e^{-i\theta}\right); \quad \sigma_{r3}^{(2k-1)} = \operatorname{Re}\left(\sigma_+^{(2k-1)}e^{-i\theta}\right);$$

$$2\sigma_{r\theta}^{(2k)} = \operatorname{Im}\left[e^{-2i\theta}\left(\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{11}^{(2k)} + 2i\sigma_{11}^{(2k)}\right)\right]. \quad (1.11)$$

Для бесконечной области S , ограниченной кривой L , голоморфные функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ примем в виде

$$\varphi(z) = \Gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}; \quad \psi(z) = \Gamma' z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad (1.12)$$

где a_n , b_n – произвольные постоянные; Γ , Γ' – константы, определяемые напряжениями, заданными на бесконечности, т.е.

$$\Gamma + \bar{\Gamma} = \frac{1}{4}\left(\sigma_{11}^{(0)\infty} + \sigma_{22}^{(0)\infty}\right); \quad \Gamma' = \frac{1}{4}\left(\sigma_{22}^{(0)\infty} - \sigma_{11}^{(0)\infty} + 2i\sigma_{12}^{(0)\infty}\right).$$

При равномерном всестороннем растяжении пластины – $\sigma_{11}^{(0)\infty} = \sigma_{22}^{(0)\infty} = p$; $\sigma_{12}^{(0)\infty} = 0$ и, следовательно, $\Gamma + \bar{\Gamma} = p/2$; $\Gamma' = 0$.

Вид метагармонических функций V_m и W_s зависит от значений корней характеристических уравнений, которые могут быть действительными и комплексными. Так, если k_1 и k_2 – отрицательный и положительный вещественные корни, а k_3 и k_4 – комплексно-сопряженные корни, то

$$V_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n Y_n(rR^{-1}x_1)e^{in\theta}; \quad V_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n K_n(rR^{-1}x_2)e^{in\theta};$$

$$V_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(rR^{-1}x_3)e^{in\theta}; \quad V_4 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n^{(2)}(rR^{-1}x_4)e^{in\theta}, \quad (1.13)$$

где $Y_n(rR^{-1}x_1)$, $K_n(rR^{-1}x_2)$, $H_n^{(1)}(rR^{-1}x_3)$, $H_n^{(2)}(rR^{-1}x_4)$ – цилиндрические функции Неймана, Макдональда, Ханкеля первого и второго рода, $x_m = Rl_m/h$, $l_1 = \sqrt{-k_1}$, $l_2 = \sqrt{k_2}$, $l_3 = \sqrt{-k_3}$, $l_4 = \bar{l}_3$; A_n , B_n , C_n , D_n – произвольные постоянные. Аналогичный вид имеют метагармонические функции W_s (здесь использованы цилиндрические функции, затухающие на бесконечности).

Для однородных условий (1.11) следует, что

$$u_r^{(2k)}(r, \theta)\Big|_{r=R} = 0; \quad \sigma_{r\theta}^{(2k)}(r, \theta)\Big|_{r=R} = 0 \quad (k = \overline{0, n});$$

$$\sigma_{r3}^{(2k-1)}(r, \theta)\Big|_{r=R} = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \quad (1.14)$$

Отсюда, учитывая формулы (1.6), (1.9), (1.11) и значения функций (1.12), (1.13), получим систему алгебраических уравнений для определения неизвестных констант. По полученным функциям определим составляющие компонент напряжений в окрестности кругового отверстия.

§2. Пластина с криволинейным отверстием.

Пусть пластина ослаблена некруговым отверстием, контур L которого незначительно отличается от кругового контура радиуса R и описывается уравнениями [5]

$$x_1 = R(\cos \vartheta + \varepsilon \cos m\vartheta); \quad x_2 = R(\sin \vartheta - \varepsilon \sin m\vartheta), \quad (2.1)$$

где m – целое положительное число; ε – малый параметр. При определенных значениях m и ε получаем отверстия соответствующей формы: эллиптическое, квадратное и треугольное с закругленными углами. Функцию, конформно отображающую внешнюю область единичного круга на бесконечную область, ограниченную кривой (2.1), задаем формулой

$$z = x + iy = R^{-1}\omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta). \quad (2.2)$$

Здесь $x = x_1/R$, $y = x_2/R$, $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$, $f(\zeta) = \zeta^{-m}$; x и y – безразмерные декартовы координаты; ρ и ϑ – ортогональные криволинейные координаты.

Поскольку криволинейная система координат (ρ, ϑ, ξ) повернута на некоторый угол β относительно полярной системы (r, θ, x_3) вокруг общей оси $\xi = h^{-1}x_3$, то имеют место аналогичные (1.10) формулы преобразования

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k)} &= e^{2i\beta} (\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)}); \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} &= \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)}; \quad \sigma_{\xi\xi}^{(2k)} = \sigma_{33}^{(2k)} \quad (k = \overline{0, n}); \\ \sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1)} &= e^{i\beta} (\sigma_{r3}^{(2k-1)} - i\sigma_{\theta3}^{(2k-1)}) \quad (k = \overline{1, n}); \\ u_{\rho}^{(2k)} - iu_{\vartheta}^{(2k)} &= e^{i\beta} (u_r^{(2k)} - iu_{\theta}^{(2k)}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\sigma_{i'j'}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(m)}$ ($i', j' = \rho, \vartheta, \xi$), $\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)}$ ($i, j = r, \theta, 3$).

Согласно (2.2), связь между переменными r, θ и ρ, ϑ устанавливается равенствами

$$r = |\omega(\zeta)|; \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \omega(\zeta)}{\operatorname{Re} \omega(\zeta)}, \quad (2.4)$$

а экспонента $e^{i\beta}$ определяется формулой [5]

$$e^{i\beta} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \cdot \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{|\omega(\zeta)|}. \quad (2.5)$$

Основные уравнения (1.7) в переменных ρ, ϑ с учетом равенств (2.4) будут сложны, и получить их точное решение не представляется возможным. Поэтому, следуя [2, 5], решение задачи определим в виде рядов по положительным степеням малого параметра ε , т.е.

$$\sigma_{i'j'}^{(k)}(\rho, \vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^{\tau} \sigma_{i'j'}^{(k, \tau)}(\rho, \vartheta); \quad u_j^{(k)}(\rho, \vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^{\tau} u_j^{(k, \tau)}(\rho, \vartheta). \quad (2.6)$$

Пользуясь равенствами (2.3), необходимо и их правые части представить в виде рядов по степеням параметра ε . Произвольные скалярные функции $\Phi^{(k)}(r, \theta)$ (в частности, компоненты тензора напряжений и вектора перемещений), согласно [5], представляем в виде ряда

$$\Phi^{(k)}(r, \theta) = \sum_{(p)} \varepsilon^p \frac{1}{p!} L_p \Phi^{(k)}(\rho, \vartheta), \quad (2.7)$$

где L_p – операторы вида

$$L_0 = 1; \quad L_1 = f(\zeta) \partial_\zeta + \overline{f(\zeta)} \partial_{\bar{\zeta}}; \quad L_2 = f^2(\zeta) \partial_\zeta^2 + 2f(\zeta) \overline{f(\zeta)} \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} + \overline{f^2(\zeta)} \partial_{\bar{\zeta}}^2; \dots,$$

причем

$$2\partial_\zeta = e^{-i\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right); \quad 2\partial_{\bar{\zeta}} = e^{i\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right);$$

экспонента $e^{i\beta}$ из (2.5) раскладывается таким образом:

$$e^{i\beta} = 1 + i\varepsilon q_1(\zeta, \bar{\zeta}) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[-q_1^2(\zeta, \bar{\zeta}) + 2iq_2(\zeta, \bar{\zeta}) \right] + \dots \quad (2.8)$$

$$\left\{ q_1(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\rho^2} \operatorname{Im} \left[\zeta \overline{f(\zeta)} + \zeta \bar{\zeta} f'(\zeta) \right]; \quad q_2(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2\rho^4} \operatorname{Im} \left[\bar{\zeta}^2 f^2(\zeta) + \zeta^2 \bar{\zeta}^2 f'^2(\zeta) \right] \right\}.$$

Учитывая разложения (2.6) – (2.8), из равенств (2.3) после ряда преобразований и приравнивания выражений при одинаковых степенях параметра ε получим соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2k, \tau)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k, \tau)} &= \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_1^{(\tau-j)} \left(\sigma_{rr}^{(2k, j)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k, j)} \right); \quad \sigma_{\zeta\bar{\zeta}}^{(2k, \tau)} = \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_1^{(\tau-j)} \sigma_{33}^{(2k, j)}; \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2k, \tau)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k, \tau)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k, \tau)} &= \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_2^{(\tau-j)} \left(\sigma_{rr}^{(2k, j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k, j)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k, j)} \right); \quad (2.9) \\ \sigma_{\rho\zeta}^{(2k-1, \tau)} - i\sigma_{\vartheta\bar{\zeta}}^{(2k-1, \tau)} &= \sum_{j=0}^{\tau} \Lambda_3^{(\tau-j)} \left(\sigma_{r3}^{(2k-1, j)} - i\sigma_{\theta 3}^{(2k-1, j)} \right); \\ u_\rho^{(2k, \tau)} - iu_\vartheta^{(2k, \tau)} &= \sum_{j=1}^{\tau} \Lambda_3^{(\tau-j)} \left(u_r^{(2k, j)} - iu_\theta^{(2k, j)} \right), \end{aligned}$$

где $\Lambda_p^{(l)}$ – операторы следующего вида:

$$\Lambda_p^{(0)} = 1 \quad (p=1, 2, 3); \quad \Lambda_1^{(1)} = L_1; \quad \Lambda_2^{(1)} = L_1 + 2iq_1; \quad \Lambda_3^{(1)} = L_1 + iq_1;$$

$$\Lambda_1^{(2)} = \frac{1}{2}L_2; \quad \Lambda_2^{(2)} = \frac{1}{2}L_2 - 2q_1^2 + 2i(q_1L_1 + q_2); \quad \Lambda_3^{(2)} = \frac{1}{2}(L_2 - q_1^2) + i(q_1L_1 + q_2).$$

Напряжения, фигурирующие в правых частях равенств (2.9), представляются аналогичными (1.9), (1.10) формулами, в которых проведена формальная замена переменных z, \bar{z} на переменные $\zeta, \bar{\zeta}$ (или же переменных r, θ на ρ, ϑ).

Отсюда получаем выражения для краевых условий, которые записываем таким же способом, как и для пластины с круговым отверстием. Следовательно, для рассматриваемой задачи имеем

$$\begin{aligned} u_\rho^{(2k, \tau)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} &= 0; \quad \sigma_{\rho\vartheta}^{(2k, \tau)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} = 0 \quad (k = \overline{0, n}); \\ \sigma_{\rho 3}^{(2k-1, \tau)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} &= 0 \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, в каждом из приближений приходим к решению задачи для кругового отверстия.

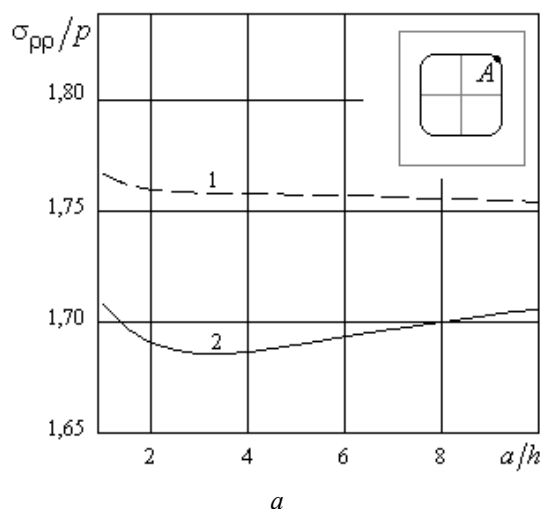
§3. Численные исследования. Анализ результатов.

Численные исследования напряженного состояния около криволинейных отверстий в неограниченной трансверсально-изотропной пластине проведены при равномерном всестороннем растяжении её на бесконечности. Расчеты выполнены для эллиптического, квадратного и треугольного отверстий. Параметры ε , m и R рассматриваемых отверстий приняты такими, как в работе [5, с. 124, 128, 132]. Для эллиптического отверстия $m=1$, $\varepsilon=(a-b)/(a+b)$, $R=(a+b)/2$, где a и b – полуоси эллипса.

Проведенные исследования распределения напряжений показали, что все напряжения принимают свои максимальные значения на краевой поверхности отверстия ($\rho=1$) в точках, соответствующих серединной ($\xi=0$) либо граничным ($\xi=\pm 1$) плоскостям пластины и монотонно изменяются на отрезках $\xi \in [-1,0]$ и $\xi \in [0,1]$.

a/b	ξ	$\sigma_{\rho\rho}/p$		$\sigma_{\theta\theta}/p$		σ_{33}/p	
		1-е пригл.	2-е пригл.	1-е пригл.	2-е пригл.	1-е пригл.	2-е пригл.
1,0	0	1,3	1,3	0,7	0,7	0	0
1,1	0	1,3609	1,3663	0,7071	0,6930	0,0097	0,0082
	1	1,3515	1,3584	0,6931	0,6814	-0,0003	-0,0002
1,2	0	1,4152	1,4348	0,7115	0,6641	0,0177	0,0123
	1	1,3974	1,4221	0,6873	0,6455	-0,0005	-0,0003
1,3	0	1,4654	1,5057	0,7163	0,6187	0,0237	0,0137
	1	1,4400	1,4905	0,6825	0,5964	-0,0007	-0,0003
1,4	0	1,5113	1,5773	0,7205	0,5611	0,0301	0,0129
	1	1,4788	1,5614	0,6784	0,5377	-0,0008	-0,0002
1,5	0	1,5536	1,6487	0,7243	0,4945	0,0349	0,0105
	1	1,5146	1,6334	0,6750	0,4724	-0,0010	0

В таблице приведены для первого и второго приближений значения нормальных $\sigma_{\rho\rho}/p$, окружных $\sigma_{\theta\theta}/p$ и поперечных σ_{33}/p напряжений на контуре отверстия ($\rho=1$) при $\theta=0$ в точках на срединной ($\xi=0$) и граничной ($\xi=1$) плоскостях пластины в зависимости от отношения полуосей эллипса a/b . Упругие постоянные приняты такими: $\nu=0,35$; $\nu'=0,25$; $E/E'=1,25$; $E/G'=2,5$. Как видно из таблицы, доминирующими являются нормальные напряжения $\sigma_{\rho\rho}$. Они незначительно изменяются по толщине пластины и монотонно возрастают с увеличением отношения a/b .



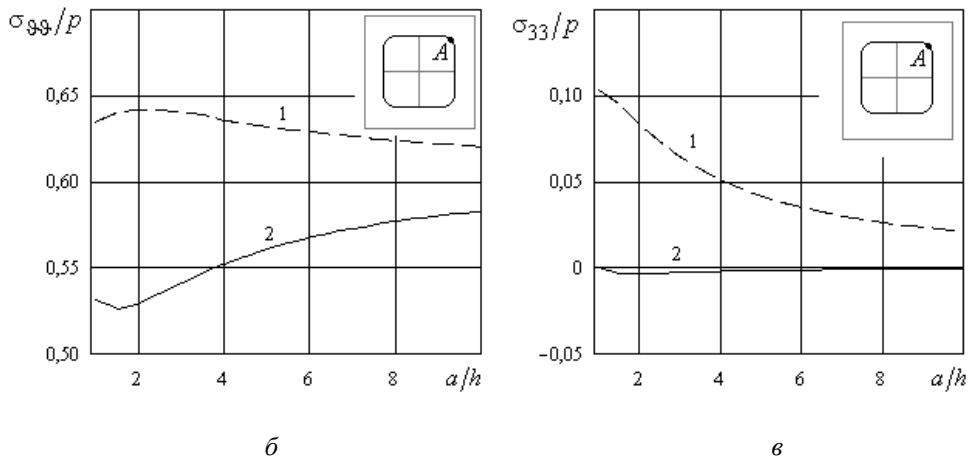


Рис. 1

Для квадратного отверстия с закругленными углами: $m = 3$; $\varepsilon = -1/9$; $R = 0,9a$; где $2a$ – диагональ квадрата. Численные расчеты были проведены при значении упругих констант $\nu = 0,3$; $\nu' = 0,25$; $E/E' = 1,5$; $E/G' = 2,5$. На рис. 1, а, б, в представлены кривые изменения нормальных $\sigma_{\rho\rho}/p$, окружных σ_{99}/p и нормальных поперечных σ_{33}/p напряжений в точке $\rho = 1$, $\vartheta = \pi/4$ (точка А), соответственно, на срединной (кривая 1) и граничной (кривая 2) плоскостях пластины в зависимости от отношения a/h .

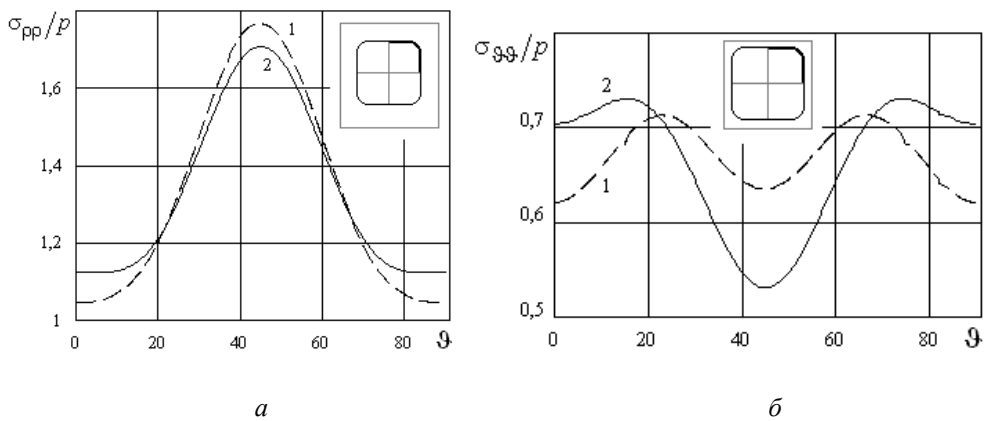
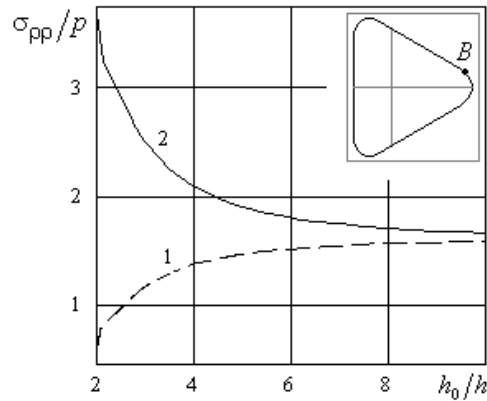


Рис. 2

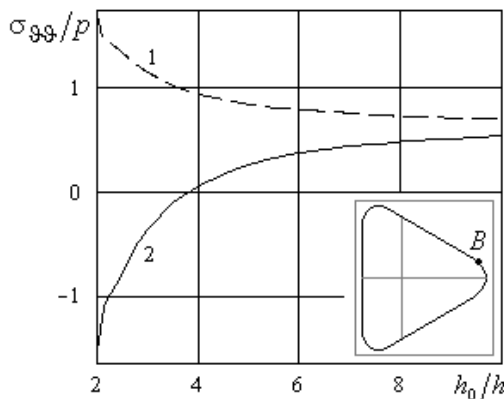
Как видно из графиков, максимальных значений напряжения в исследуемой точке достигают на срединной плоскости пластины ($\xi = 0$). С увеличением параметра a/h напряжения $\sigma_{\rho\rho}$ и σ_{99} на срединной плоскости уменьшаются, а на граничной – возрастают. Нормальные поперечные напряжения σ_{33} на граничной плоскости почти нулевые и монотонно убывают, приближаясь к нулю на срединной плоскости.

Представленные на рис. 2, а, б кривые характеризуют изменения $\sigma_{\rho\rho}$ и σ_{99} по контуру отверстия ($0 \leq \vartheta \leq \pi/2$) на срединной (кривая 1) и граничной (кривая 2) плоскостях пластины. Нормальные напряжения $\sigma_{\rho\rho}$ наибольшее значение принимают на

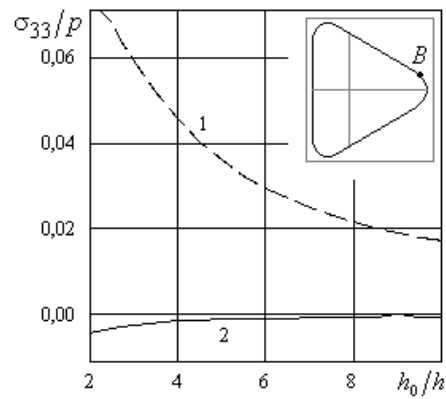
срединной плоскости в точке $\rho=1$, $\vartheta=\pi/4$. Кольцевые напряжения в этой точке на граничной плоскости имеют минимальные значения.



а



б



в

Рис. 3

Треугольное отверстие с закругленными углами описывается уравнениями (2.1), в которых $m=2$; $\varepsilon=1/4$; $R=8h_0/15$, где h_0 – высота правильного треугольника. Численные расчеты были проведены при значении упругих констант $\nu=0,3$; $\nu'=0,25$; $E/E'=1,5$; $E/G'=2,5$. На рис. 3 а, б, в изображены графики изменения нормальных $\sigma_{\rho\rho}/p$, окружных $\sigma_{\theta\theta}/p$ и поперечных σ_{33}/p напряжений в зависимости от относительной толщины h_0/h в точке $\rho=1$, $\vartheta=\pi/9$ (точка В), соответственно, на срединной (кривая 1) и граничной (кривая 2) плоскостях пластины. Как видно из рисунков, максимальных значений нормальные напряжения $\sigma_{\rho\rho}$ достигают на граничной плоскости ($\xi=1$) и минимальных – на срединной. С уменьшением относительной толщины пластины напряжения $\sigma_{\rho\rho}$ на граничной плоскости в исследуемой точке убывают, а на срединной – возрастают, стремясь к общему значению. Выравнивание напряжений характерно и для $\sigma_{\theta\theta}$. Нормальные поперечные напряжения σ_{33} монотонно убывают, приближаясь к нулю.

На рис. 4, а – в представлены графики изменения напряжений $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{33} по контуру треугольного отверстия ($0 \leq \vartheta \leq 2\pi/3$), соответственно, на срединной (кривая 1) и граничной (кривая 2) плоскостях пластины.

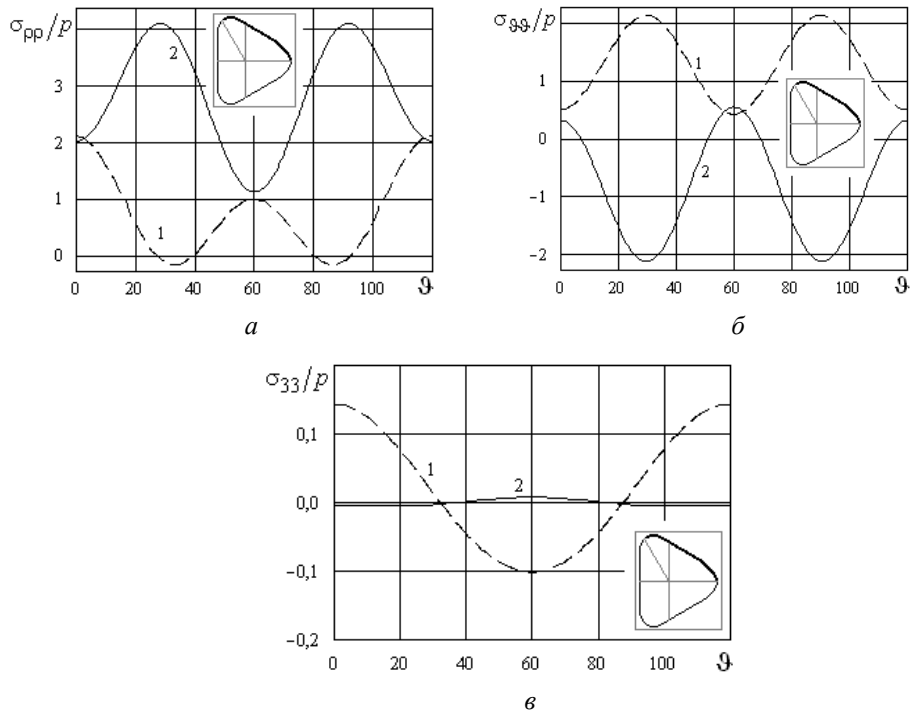


Рис. 4

На рис. 5, а, б, в показано монотонное изменение напряжений по толщине пластины для треугольного отверстия в точке $\rho = 1$, $\vartheta = \pi/6$ (точка C).

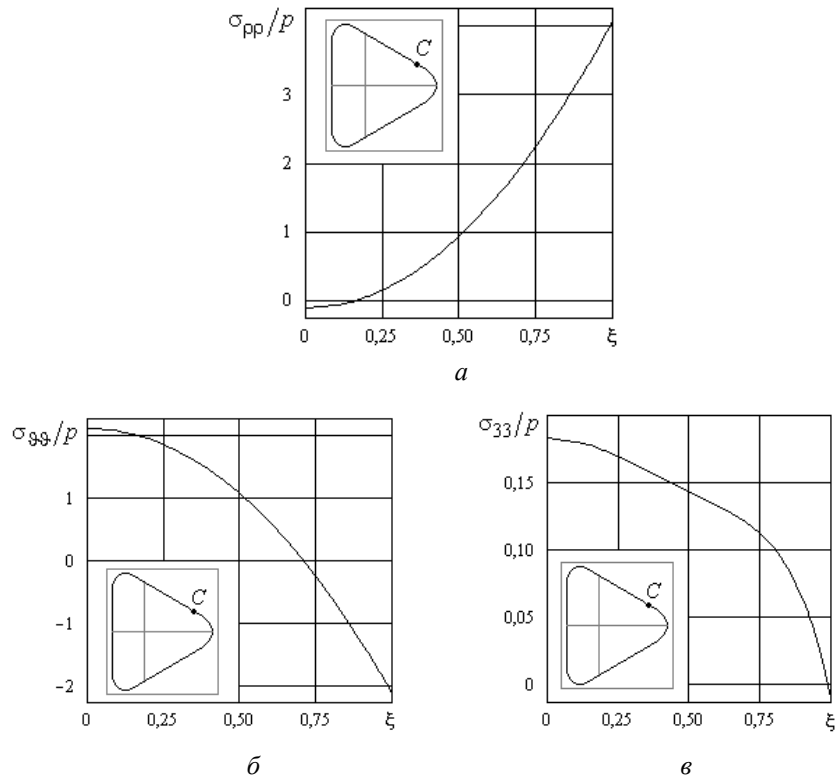


Рис. 5

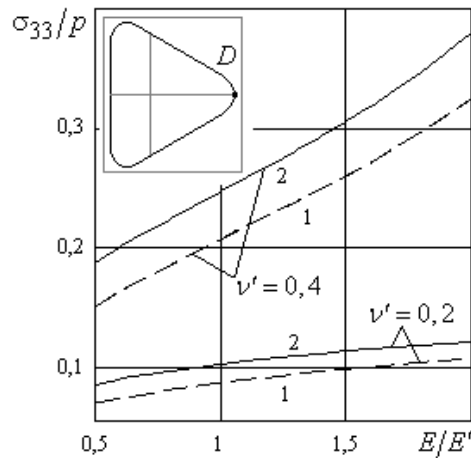


Рис. 6

Влияние упругих констант на величину нормальных поперечных напряжений σ_{33} в точке $\vartheta = 0$; $\rho = 1$; $\xi = 0$ (точка D) показано на рис. 6. Графики характеризуют зависимость σ_{33} от отношения модулей упругости E/E' при двух значениях коэффициента Пуассона $\nu' = 0,2$ и $\nu' = 0,4$. Кривые 1 соответствуют первому приближению, а кривые 2 – второму.

Таким образом, из проведенных исследований следует, что в рассмотренной третьей однородной краевой задаче доминирующими являются радиальные напряжения. Коэффициент их концентрации зависит от формы отверстия и упругих постоянных материала. Так, в рассмотренных примерах в случае треугольного отверстия он достигает четырех единиц.

РЕЗЮМЕ. Методом розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра спільно з методом збурення форми границі отримано розв'язок задачі про напружений стан необмеженої трансверсально-ізотропної пластини з криволінійним (не круговим) отвором. Пластина перебуває під дією рівномірного всебічного розтягу на нескінченності, а на поверхні отвору задано нульові значення нормального переміщення і дотичних напружень. Приведено числові результати та дано їх аналіз.

1. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. матем. ин-та. – 1965. – 30. – С. 3 – 103.
2. Гузь О.М. Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках // Прикл. механіка. – 1962. – 8, № 6. – С. 605 – 612.
3. Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башенейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1968. – 627 с.
4. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими вклюдженнями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
5. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, В.Н. Чехов и др. – К.: Наук. думка, 1980. – 686 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т. 1).
6. Хома І., Дашко О. Про напружений стан трансверсально ізотропної пластини з еліптичною циліндричною порожниною // Зб. наук. праць «Теоретичні основи будівництва». – 2012. – 20. – Р. 269 – 276.
7. Abbas Ibrahim A. Fractional Order GN Model on Thermoelastic Interaction in an Infinite Fibre-Reinforced Anisotropic Plate Containing a Circular Hole // J. Comput. and Theor. Nanosci. – 2014. – 11, N 2. – Р. 380 – 384.

8. *Burniston E. E.* On the Extension of an Infinite Elastic Plate Containing an Axisymmetric Hole // *J. Appl. Mech.* – 1972. – **39**, N 2. – P. 507 – 512.
9. *Cicala P.* Sulla teoria elastica della plate sottile // *Giornale di Ingegneria Civile.* – 1959. – **97**, N 4. – P. 238 – 256.
10. *Darwish F., Gharaibeh M., Tashtoush G.* A Modified Equation for the Stress Concentration Factor in Countersunk Holes // *Eur. J. Mech. A/Solids.* – 2012. – **36**. – P. 94 – 103.
11. *Fil'stinskii L.A., Kovalev U.D., Vensel E.S.* Solution of the Elastic Boundary Value Problem for a Layer with Tunnel Stress Raisers // *Int. J. Solids and Struct.* – 2002. – **39**. – P. 6385 – 6402.
12. *Fellers J.I., Soler A.I.* Approximate Solution of the Finite Cylinder Problem Using Legendre Polynomials // *AIAA J.* – 1970. – **8**, N 11. – P. 2037 – 2042.
13. *Folias E.S., Wang J.S.* On the Three-Dimensional Stress Fields around a Circular Hole in a Plate of Arbitrary Thickness // *Comput. Mech.* – 1990. – **6**, N 5. – P. 379 – 391.
14. *Khoma I.Yu.* Representation of the Solution of the Equilibrium Equations for Non-Thin Transversely Isotropic Plates // *J. of Math. Sci.* – 2000. – **101**, N 6. – P. 3577 – 3584.
15. *Khoma I.Yu.* Tension of a Nonthin Transversely Isotropic Plate with a Noncircular Cylindrical Cavity // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 11. – P. 1285 – 1297.
16. *Khoma I.Yu.* Analytical Solution of the Equilibrium Equations for Nonthin Electroelastic Transversely Isotropic Plates Polarized through the Thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 4. – P. 430 – 445.
17. *Khoma I.Yu., Dashko O.G.* Stress State of a Nonthin Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 4. – P. 461 – 473.
18. *Maksimiyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Stress-Strain State of Flexible Orthotropic Cylindrical Shell with a Reinforced Circular Hole // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 4. – P. 425 – 433.
19. *Markenscoff X.* Stress amplification in the neighborhood of an eccentric large hole in a strip in tension // *ZAMP.* – 2000. – **51**, N 4. – P. 550 – 554.
20. *Rezaeepazhand J., Jafari M.* Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout // *Int. J. Mech. Sci.* – 2010. – **52**, N 1. – P. 96 – 102.
21. *Sternberg E.* Three-Dimensional Stress Constraint in the Theory of Elasticity // *Appl. Mech. Rev.* – 1958. – **11**, N 1. – P. 1 – 4.
22. *Yang Zh.* The Stress and Strain Concentrations of an Elliptical Hole in an Elastic Plate of Finite Thickness Subjected to Tensile Stress // *Int. J. Fract.* – 2009. – **155**. – P. 43 – 44.
23. *Yang Zh., Kim Ch-Boo, Chjo Ch., Beom N.G.* The Concentration of Stress and Strain in Finite Thickness Elastic Plate Containing a Circular Hole // *Int. J. Solids and Struct.* – 2008. – **45**. – P. 713 – 731.
24. *Youngdahl C. K., Sternberg E.* Three-Dimensional Stress Concentration Around a Cylindrical Hole in a Semi-Infinite Elastic Body // *J. Appl. Mech.* – 1966. – **33**, N 4. – P. 855 – 865.

Поступила 17.12.2015

Утверждена в печать 05.07.2016