

Ю. Ю. Абросов<sup>1</sup>, В. А. Максимюк<sup>1</sup>, И. С. Чернышенко<sup>2</sup>

**ВЛИЯНИЕ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ НА  
ДЕФОРМИРОВАНИЕ ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;  
e-mail: <sup>1</sup>desc@inmech.kiev.ua, <sup>2</sup>prikl@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A phenomenon of the membrane locking in the variational-difference method is demonstrated. A delayed but stable convergence of numerical calculations of the stress-strain state to the analytical solution is shown. This problem can supplement a collection of so-called pathological tests.

**Key words:** elliptical cylinder, stress-strain state, membrane locking, variational-difference method.

**Введение.**

Цилиндрические оболочки некругового поперечного сечения широко [14] применяются в современном инженерном деле. Так, в строительстве эллиптические полые профили сочетают в себе преимущества круглых и прямоугольных профилей [4]. В авиационной технике фюзеляжи [2] и гермокабины [16] современных самолетов часто из соображений аэродинамичности, компоновки технологических соединений, эффективности использования внутреннего объема также имеют некруговое поперечное сечение. Представляет интерес исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) [6, 2], устойчивости [4, 16], колебаний [13] и динамики [11] таких видов конструкций и их элементов.

Одномерная задача о деформировании под внутренним давлением длинной цилиндрической оболочки эллиптического сечения (фактически кольца) имеет 150-ти летнюю историю [3, с. 326 – 338]. Однако первые аналитические решения были весьма упрощенными. Упомянутое решение [3] для оболочки под внутренней нагрузкой давало разного знака (что является правильным при значительной эллиптичности), но равные по абсолютной величине (что является упрощенным) моменты и перемещения в двух сечениях плоскостями симметрии.

Корректные результаты, очевидно впервые (1930), были получены С.П. Тимошенко и опубликованы в первом издании монографии [12]. Моменты вычислены при помощи таблицы некоторых коэффициентов для ряда значений соотношений полуосей эллипса. Процедура получения коэффициентов не приведена и осталась неизвестной. В дальнейшем (1965) Р.Дж. Роарк (R.J. Roark) [15] представил более обширные аналогичные таблицы и привел формулы для вычисления поправок в случае неоднородного момента инерции кольца (переменной толщины). Дальнейшая история развития аналитических и графических методов кратко изложена в работе [7].

В работе [1] продемонстрировано вычислительное явление мембранного записания [10], присущее рассматриваемой задаче вследствие больших изгибов при малых растяжениях. Показано замедленную, но устойчивую сходимость численных расчетов НДС к аналитическому решению [12]. Особый интерес представляет появление отрицательных прогибов возле длинной полуоси при малой эллиптичности.

### 1. Постановка задач.

Пусть [1] в декартовой системе координат  $(x, y, z)$  уравнение срединной поверхности замкнутой длинной цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения (рис. 1) имеет вид

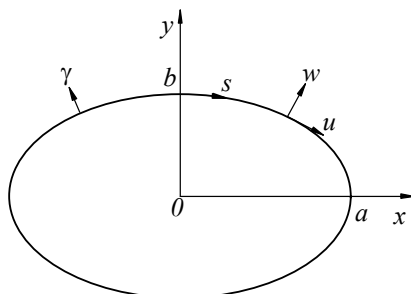


Рис. 1

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса.

Эту поверхность отнесем к криволинейной системе координат  $(s, z, \gamma)$ , в которой координата  $\gamma$  направлена по нормали к поверхности, а  $s$  – длина дуги эллипса, которая отсчитывается от точки  $(x=0, y=b)$  по часовой стрелке (рис. 1). Очевидно, что оба коэффициента первой квадратичной формы в этой системе будут равными единице ( $A_s = A_z = 1$ ), а кривизна образующей – нулевая.

С помощью оригинального алгоритма численной дискретизации плоской кривой [5] уравнение (1) можно представить в параметрическом виде

$$x = x(s); \quad y = y(s), \quad (2)$$

причем форма зависимостей (2) может быть как табличной, так и алгоритмической. Тогда кривизна эллипса будет вычисляться по формуле

$$k = x'y'' - x''y'. \quad (3)$$

Символ «штрих» в (3) и далее обозначает дифференцирование по координате  $s$ .

В длинных оболочках НДС в произвольном поперечном сечении можно принять одинаковым, поэтому задача статики будет одномерной. Пусть тогда под действием постоянного и равномерного внутреннего давления  $p$  в изотропной однородной упругой тонкой оболочке постоянной толщины  $h$  возникают малые перемещения в поперечном сечении, а вдоль оси  $z$  перемещения отсутствуют. В этом случае компоненты НДС будут зависеть только от координаты  $s$ . Очевидно, замкнутая оболочка будет стремиться к близкой к круговой форме, что приведет к большим изгибам вблизи точек пересечения эллипса плоскостями симметрии. Для расчетов НДС при таких условиях целесообразно использовать геометрически линейную теорию тонких оболочек с привлечением смешанного функционала для упрощения реализации гипотез Кирхгофа – Лява [10].

### 2. Основные уравнения и метод решения задачи.

Геометрические соотношения между компонентами деформаций срединной поверхности и перемещениями и углом поворота определяются формулами [1]

$$\varepsilon = u' + kw; \quad \kappa = \varphi', \quad (4)$$

где  $u$ ,  $w$  – компоненты вектора перемещений вдоль осей  $(s, \gamma)$ , соответственно. Для гипотез Кирхгофа – Лява угол  $\varphi$  в (4) задаем [10] с помощью метода множителей Лагранжа из условий равенства нулю деформации поперечного сдвига, т.е.

$$\varepsilon_{s\gamma} = \varphi + w' - ku = 0. \quad (5)$$

Мембранная деформация произвольной точки по толщине ( $\gamma = \text{const}$ ) оболочки, когда не учитывается изменение метрики по толщине, определяется формулой

$$e = \varepsilon + \gamma\kappa. \quad (6)$$

В длинной оболочке возникают поперечные

$$\sigma_s = Ee / (1 - \nu^2) \quad (7)$$

и продольные  $\sigma_z = \nu\sigma_s$  напряжения, где  $E$  и  $\nu$  – модуль упругости и коэффициент поперечной деформации изотропного материала. Напряжения (7) заменяются средними по толщине внутренними усилием и моментом

$$T = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \varepsilon; \quad M = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \kappa. \quad (8)$$

Численный метод строим на основе вариационных принципов с использованием смешанного функционала [10]

$$\Pi(u, w, \varphi, T_{s\gamma}^f) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (T\varepsilon + M\kappa - 2pw) d\Omega + \iint_{\Omega} T_{s\gamma}^f \varepsilon_{s\gamma} d\Omega. \quad (9)$$

Функционал (9) является суммой энергии деформации оболочки и дополнительного условия для реализации геометрической части (5) гипотез Кирхгофа – Лява методом множителей ( $T_{s\gamma}^f$ ) Лагранжа. Он зависит от четырех варьируемых функций: двух перемещений, угла поворота и усилия  $T_{s\gamma}^f$ , которое имеет физическое смысл перерезывающей силы. Преимущества такого построения функционала изложены в [10].

Следует отметить использование в (9) обозначений верхним индексом для усилия, что подчеркивает отличие между усилием-формулой и усилием-функцией и имеет определенное методологическое значение при записи краевых условий и во время построения алгоритма.

Из условия стационарности функционала  $\delta\Pi = 0$  следуют естественные статические краевые условия, а главные геометрические условия [10] в случае симметрии, например, имеют вид

$$u = 0; \quad \varphi = 0; \quad T_{s\gamma}^f = 0. \quad (10)$$

Для определения стационарных значений функционала (9) используем вариационно-разностный метод (ВРМ), который приводит к системе линейных алгебраических разрешающих уравнений с симметричной матрицей [10].

### 3. Числовые результаты и их анализ.

Выполнен расчет НДС оболочки с такими геометрическими параметрами [1]:  $h = 0,01$  м;  $a = 1$  м;  $b = 0,5$  м. Материал оболочки – сталь с  $E = 210$  ГПа;  $\nu = 0,3$ . Нагрузка –  $p = 10$  кПа. Вследствие симметрии задачи (рис. 1) относительно плоскостей  $x = 0$  и  $y = 0$  рассмотрена область  $s \in [0, s_k]$ , где  $s_k = 1,211$  м – четверть периметра эллипса, который вычислялся упомянутым алгоритмом [5] численной дискретизации кривой (1).

Тем же алгоритмом эта дуга эллипса разбивалась на  $K$  узловых точек с равномерным шагом. Дифференцирование в (3) выполнялось численно по разностным формулам.

Практическая сходимость результатов расчетов НДС [1] с увеличением количества узлов  $K$  показана в табл. 1, где приведены безразмерные прогибы ( $\tilde{w} = w/h$ ), напряжения на внешней ( $\sigma^+$ ), в срединной ( $\sigma^0$ ) и на внутренней ( $\sigma^-$ ) поверхностях оболочки и моменты в точках  $\tilde{s} = s/s_k = 0$  (короткая полуось) и  $\tilde{s} = 1$  (длинная полуось).

В двух последних строках табл. 1 приведено: точные значения напряжений  $\sigma^0(0) = pb/h$  и  $\sigma^0(s_k) = pa/h$ ; моменты  $M(0) = 0,629pb^2$  и  $M(s_k) = -0,870pb^2$ , куда входят табличные числовые коэффициенты (из монографии [12]) для случая  $b/a = 0,5$ ; вычисленные согласно (6) и (8), соответственно, по предыдущим величинам ( $\sigma^0, M$ ) напряжения  $\sigma^+ = \sigma^0 + 6M/h^2$  и  $\sigma^- = \sigma^0 - 6M/h^2$ .

Таблица 1

$K$	$\tilde{s}$	$\tilde{w}$	$\sigma^+$ , МПа	$\sigma^0$ , МПа	$\sigma^-$ , МПа	$M$ , Н
641	0	2,20	87,88	0,5794	-86,72	1455
	1	-1,01	-109,4	0,6081	110,6	-1833
1281	0	2,36	93,03	0,5273	-91,97	1541
	1	-1,10	-124,0	0,8922	125,7	-2080
2561	0	2,41	94,47	0,5127	-93,45	1566
	1	-1,12	-128,0	0,9724	130,0	-2150
5121	0	2,42	94,85	0,5088	-93,84	1572
	1	-1,13	-129,1	0,9931	131,1	-2168
10241	0	2,42	94,96	0,5077	-93,94	1574
	1	-1,13	-129,3	0,9981	131,3	-2171
[12]	0	-	94,85	0,5	-93,85	1572,5
	1	-	-129,5	1,0	131,5	-2175

Результаты расчетов в табл. 1 демонстрируют замедленную, но устойчивую сходимость со сгущением сетки рассчитанных ВРМ компонент НДС к аналитическому решению [12]. Совпадение в двух значащих цифрах максимальных величин прогибов, напряжений или моментов достигается при  $K=2561$ , а совпадение мембранных напряжений  $\sigma^0$  в срединной поверхности – несколько позднее при  $K=5121$ . При  $K < 321$  настолько проявляется завышенная фиктивная жесткость оболочки, что в вычисленных моментах возле большей полуоси меняется знак. Такие нежелательные вычислительные эффекты обусловлены большими изгибами при малых растяжениях и называются мембранным запирающим или вырождением [10].

Распределение прогибов  $\tilde{w}$  в поперечном сечении  $\tilde{s}$  для  $b/a=0,5$  (кривая 1) и  $b/a=0,9$  (кривая 2) показано на рис. 2. При таком значительном уменьшении эллиптичности разность прогибов возле длинной и короткой полуосей уменьшается незначительно. Видно, что под внутренним давлением оболочка эллиптического поперечного сечения стремится к круговой форме, что обуславливает отрицательные прогибы возле длинной полуоси.

Особый интерес представляет появление отрицательных прогибов возле длинной полуоси при малой эллиптичности. Влияние эллиптичности поперечного сечения на деформирование оболочки показано в табл. 2, где приведено распределение прогибов  $\tilde{w}$  в поперечном сечении  $\tilde{s}$  для ряда малых значений эллиптичности  $b/a = 0,9; \dots 0,99999$ . В последней строке табл. 2 дана четверть периметра эллипса ( $s_k/h$ ).

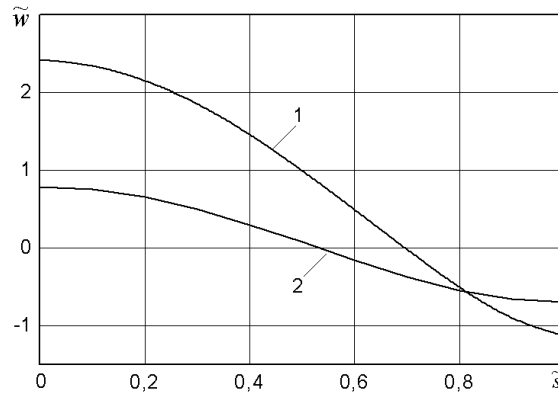


Рис. 2

Вычисления проведены с последовательным десятикратным уменьшением эллиптичности, начиная с незначительного, на первый взгляд, значения  $b/a=0,9$ . Оказалось, что на третьем шаге уменьшения прогибы по всему сечению были положительными. Это позволило предположить, что значение  $b/a \sim 0,99995$  в данном случае представляет собой критическую эллиптичность, выше которой будут иметь место отрицательные прогибы возле длинной полуоси, что и подтверждает предпоследний столбец табл. 2. Здесь прогиб возле длинной оси положительный, но на три порядка меньший, чем возле малой полуоси.

Отметим, что в случае кругового цилиндра ( $b/a=1$ ) имеем:

$$\frac{w}{h} = \frac{a^2}{h^2} (1 - \nu^2) \frac{p}{E} \approx 4,33 \cdot 10^{-4}, \quad s_k/h = \pi a/2h \approx 157,0796.$$

Таблица 2

$b/a$ $\bar{s}$	0,9	0,99	0,9999	0,99995	0,99999
0	$7,85 \cdot 10^{-1}$	$8,62 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^{-3}$	$8,66 \cdot 10^{-4}$	$5,20 \cdot 10^{-4}$
0,1	$7,51 \cdot 10^{-1}$	$8,20 \cdot 10^{-2}$	$1,26 \cdot 10^{-3}$	$8,45 \cdot 10^{-4}$	$5,16 \cdot 10^{-4}$
0,2	$6,53 \cdot 10^{-1}$	$7,00 \cdot 10^{-2}$	$1,13 \cdot 10^{-3}$	$7,83 \cdot 10^{-4}$	$5,03 \cdot 10^{-4}$
0,3	$4,98 \cdot 10^{-1}$	$5,12 \cdot 10^{-2}$	$9,42 \cdot 10^{-4}$	$6,88 \cdot 10^{-4}$	$4,84 \cdot 10^{-4}$
0,4	$2,99 \cdot 10^{-1}$	$2,76 \cdot 10^{-2}$	$7,01 \cdot 10^{-4}$	$5,67 \cdot 10^{-4}$	$4,60 \cdot 10^{-4}$
0,5	$7,43 \cdot 10^{-2}$	$1,24 \cdot 10^{-3}$	$4,33 \cdot 10^{-4}$	$4,33 \cdot 10^{-4}$	$4,33 \cdot 10^{-4}$
0,6	$-1,57 \cdot 10^{-1}$	$-2,51 \cdot 10^{-2}$	$1,66 \cdot 10^{-4}$	$3,00 \cdot 10^{-4}$	$4,07 \cdot 10^{-4}$
0,7	$-3,71 \cdot 10^{-1}$	$-4,90 \cdot 10^{-2}$	$-7,53 \cdot 10^{-5}$	$1,79 \cdot 10^{-4}$	$3,82 \cdot 10^{-4}$
0,8	$-5,45 \cdot 10^{-1}$	$-6,80 \cdot 10^{-2}$	$-2,67 \cdot 10^{-4}$	$8,32 \cdot 10^{-5}$	$3,63 \cdot 10^{-4}$
0,9	$-6,59 \cdot 10^{-1}$	$-8,02 \cdot 10^{-2}$	$-3,90 \cdot 10^{-4}$	$2,18 \cdot 10^{-5}$	$3,51 \cdot 10^{-4}$
1	$-6,98 \cdot 10^{-1}$	$-8,44 \cdot 10^{-2}$	$-4,32 \cdot 10^{-4}$	$5,86 \cdot 10^{-7}$	$3,47 \cdot 10^{-4}$
$s_k/h$	149,3290	156,2952	157,0718	157,0757	157,0788

Из результатов на рис. 2 и табл. 2 следует, что с уменьшением эллиптичности изменение области отрицательных прогибов происходит немонотонно. Сначала она несколько увеличивается (рис. 2), а затем уменьшается и исчезает (табл. 2).

#### Заключение.

Продемонстрировано вычислительное явление мембранного запираия в ВРМ на основе смешанного функционала, в котором геометрическая часть гипотез Кирхгофа – Лява реализована методом множителей Лагранжа. Показано замедленную, но устойчивую сходимость численных расчетов НДС к аналитическому решению. Численно обнаружен эффект смены знака прогибов при незначительной, на первый взгляд,

эллиптичности. Данная задача может пополнить коллекцию, так называемых, патологических тестов [8]. С точки зрения явлений записания двумерное деформирование цилиндрической оболочки с закрепленными торцами будет более простой задачей за счет уменьшения изгибов вследствие подкрепляющего действия торцов. Следует ожидать, что в случае гибких цилиндрических оболочек с отверстиями [9] эффект эллиптичности поперечного сечения проявится еще в большей степени. Очевидно, для улучшения сходимости целесообразно использовать смешанные функционалы, в которых дополнительно варьируется мембранная деформация.

РЕЗЮМЕ. Продемонстровано обчислювальне явище мембранного «замикання» в варіаційно-різницевому методі. Показано сповільнену, але стійку збіжність чисельних розрахунків напружено-деформованого стану до аналітичного розв'язку. Дана задача може доповнити колекцію так званих патологічних тестів.

1. *Абросов Ю.Ю., Максимюк В.А., Тарасюк В.С.* Деформування довгої тонкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2015. – № 2. – С. 5 – 10.
2. *Bouille A., Dubé M., Gosselin F.P.* Parametric study of an elliptical fuselage made of a sandwich composite structure // Mech. Res. Comm. – 2015. – **69**. – P. 129 – 135.
3. *Bresse J. A. C. H.* Cours de mécanique appliquée. Première partie. Résistance des matériaux et stabilité des constructions. – Deuxième Édition. – Paris: Gauthier-Villars, 1866. – 536 p.
4. *Chan T.M., Gardner L., Law K.H.* Structural design of elliptical hollow sections: a review // Proc. Inst. Civil. Engrs.: Struct. Build. – 2010. – **163**, N 6. – P. 391 – 402.
5. *Chernyshenko I.S., Maksimyuk V.A.* On the Stress-Strain State of Toroidal Shells of Elliptical Cross Section Formed From Nonlinear Elastic Orthotropic Materials // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 1. – P. 90 – 97.
6. *Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S.* Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 105 – 127.
7. *Holland M.* Pressurized member with elliptic median line: effect of radial thickness function // J. Mech. Engng Sci. – 1976. – **18**, N 5. – P. 245 – 253.
8. *Mallikarjuna Rao K., Shrinivasa U.* A set of pathological tests to validate new finite elements // Sadhana. – 2001. – **26**. – P. 549 – 590.
9. *Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Stress-Strain State of Flexible Orthotropic Cylindrical Shells with a Reinforced Circular Hole // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P. 425– 433.
10. *Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Variational Finite-Difference Methods in Linear and Nonlinear Problems of the Deformation of Metallic and Composite Shells (review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 6. – P. 613 – 687.
11. *Meish V. F., Kepenach M. P.* Nonstationary Dynamics of Longitudinally Reinforced Elliptic Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 6. – P. 677 – 682.
12. *Timoshenko S.* Strength of materials. Part II, Advanced theory and problems. – 2nd Ed. – New York: D. Van Nostrand Company, 1941. – 510 p.
13. *Tornabene F, Fantuzzi N, Bacciocchi M, Dimitri R.* Free vibrations of composite oval and elliptic cylinders by the generalized differential quadrature method // Thin Walled Struct. – 2015. – **97**. – P. 114–129.
14. *Soldatos K. P.* Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: a survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – **52**, N 8. – P. 237 – 274.
15. *Young W.C., Budynas R.G.* Roark's Formulas for Stress and Strain. – 7th ed. – New York: McGraw-Hill, 2002. – 852 p.
16. *Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V.* Nonlinear deformation and stability of oval cylindrical shells under pure bending and internal pressure // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2006. – **47**, N 3. – P. 406 – 411.

Поступила 28.12.2015

Утверждена в печать 05.07.2016