

А. В. Константинов¹, О. С. Лимарченко²

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ
«РЕЗЕРВУАР – ЖИДКОСТЬ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ»

¹Институт математики НАН Украины,

ул. Терещенковская, 3, 01601, Киев, Украина; e-mail: akonst.im@mail.ru;

²Киевск. нац. ун-т им. Т.Г.Шевченко,

просп. Глушкова, 4е, 01033, Киев, Украина; e-mail: olelim2010@yahoo.com

Abstract. The nonlinear oscillations of mechanical system “reservoir – liquid with a free surface” under action of horizontal harmonic force are studied. A process of forming the waves on a free surface is considered on the basis of nonlinear multimode (twelve modes) model that describes the combined motion of reservoir and liquid under action of active external forces. It is shown that transition of the system to the steady oscillation regime according to the classic sense does not occur at all, what is confirmed by the experimental results. The modelling within the framework of advanced model shows the presence of multi-frequency dynamical process, effect of high-frequency modes, shift of frequencies of anti-symmetric modes.

Key words: nonlinear dynamics, combined motion, liquid with free surface, steady mode, modulation, effect of high-frequency modes, shift of frequencies.

Введение.

Для исследования установившихся режимов колебаний тел с жидкостью [5, 7, 10, 13, 15] были использованы малоразмерные модели (до 5 форм колебаний). В данной работе рассмотрена нелинейная задача динамики совместного движения цилиндрического резервуара и частично заполняющей его жидкости. Резервуар совершает поступательное движение в горизонтальном направлении под действием периодической силы. Ставится задача исследовать выход механической системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» на установившийся режим колебаний на основе нелинейной многомодовой модели, ориентированной на исследование установившихся и переходных процессов.

В этих исследованиях за основу принята гипотеза, согласно которой колебания в системе происходят только с частотами, кратными частоте внешнего возмущения. Кроме того, в этих работах изучены колебания свободной поверхности жидкости при условии, что резервуар движется поступательно по заданному гармоническому закону. Таким образом, влияние жидкости на движение резервуара не учитывалось, что делало постановку задачи неполной, хотя большинство практических результатов связано как раз со случаями, когда масса жидкости существенно превосходит массу резервуара и учет совместного движения компонент системы является определяющим [1, 9, 11, 12, 14].

В работе [3] разработаны математическая модель и метод исследования совместного движения резервуара и частично заполняющей его жидкости. В рамках модели [3] колебания в системе «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» могут происходить под действием сил и моментов, приложенных к стенке резервуара. Дви-

жение тела рассматривается как поступательное, так и вращательное. При этом модель [3] учитывает взаимное влияние колебаний жидкости и резервуара, поскольку массы резервуара и жидкости входят в эту модель в качестве параметров. На основе модели [3] в теоретической работе [4] для резервуара в форме тела вращения показано, что выход колебаний свободной поверхности жидкости на установившийся режим в чистом виде не происходит. Это согласуется с выводами экспериментальных работ [10, 16], проведенных в последние годы, для резервуаров прямоугольной формы. Согласно результатам этих работ даже после примерно 200 периодов колебаний выход на установившийся режим не происходит, в тоже время существенным является проявление модуляции колебаний, которую модели работ [5, 7, 10, 13, 15] вообще не отображают. В работе [4] указано также, что различие результатов исследований обусловлено, прежде всего, отказом от гипотезы о возможности пренебрежения колебаниями на собственных частотах системы (учет колебаний свободной поверхности жидкости на собственных и комбинационных частотах, как показали результаты исследований, является определяющим), т.е. исследование динамики системы на основе нелинейной многомодовой модели (не менее 10 форм колебаний), а также учетом совместного движения жидкости и резервуара. Аналогичные выводы можно сделать и из анализа сопоставления результатов теоретического и экспериментального исследования колебаний жидкости в резервуаре, выполненном в [13], где малоразмерная модель в отличие от эксперимента не отображает наличия некоторой группы частот, которые отличаются от частоты возмущения системы и кратных им. Приведенный подход [3, 4] использован в данной работе для анализа нелинейной динамики совместного движения резервуара и жидкости со свободной поверхностью.

1. Постановка задачи. Объект исследования. Основные уравнения.

Рассмотрим цилиндрический резервуар, частично заполненный жидкостью. Примем, что резервуар является абсолютно твердым телом, которое может двигаться поступательно под действием активных внешних сил. Жидкость является идеальной, несжимаемой, однородной, а ее начальное движение безвихревым. Следуя методике работы [3], математическая модель системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» строится на основе вариационного принципа Гамильтона –

Остроградского $\delta I = 0$, где $I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, при этом функция Лагранжа задается в класси-

ческой форме Гамильтона – Остроградского как разность между кинетической и потенциальной энергиями

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla}_3 \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - (M_T + M_F) g \varepsilon_z - \frac{1}{2} \rho g \int_S (\xi^2 - H^2) dS - \\ - \sigma \int_S \sqrt{1 + (\vec{\nabla}_2 \xi)^2} dS - \sigma \cos \theta_1 \int_{L_0} \xi dl + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon},$$

где ρ – плотность жидкости; τ – область, занимаемая жидкостью; r, θ, z – цилиндрические координаты, причем ось Oz направлена противоположно вектору ускорения свободного падения \vec{g} , а система координат неподвижно связана с резервуаром;

$\vec{\nabla}_3 = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial z}$; $\vec{\nabla}_2 = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$; φ – потенциал скоростей жидкости; ξ

– возмущение свободной поверхности жидкости по отношению к невозмущенной свободной поверхности некапиллярной жидкости; S – поперечное сечение цилиндрического резервуара; H – глубина жидкости в резервуаре; σ – поверхностное натяжение на свободной поверхности жидкости; θ_1 – контактный угол; L_0 – контур, ограничивающий S ; M_T – масса резервуара; M_F – масса жидкости; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ –

вектор поступательных перемещений резервуара; \vec{F} – главный вектор внешних сил, действующих на резервуар.

Для эффективного решения задачи на основе вариационной постановки ставится задача – ввести в рассмотрение минимальное число независимых переменных, описывающих движение резервуара с жидкостью, т.е. фактически строятся разложения искоемых переменных, удовлетворяющие всем кинематическим граничным условиям. При этом вариационная формулировка эквивалентна совокупности уравнений движения и динамических граничных условий задачи. Так как безвихревое движение идеальной однородной несжимаемой жидкости полностью определяется движением ее границ, то возмущения свободной поверхности жидкости ξ и радиус-вектор $\vec{e}(t)$ полностью характеризуют движение самой жидкости, и поэтому потенциал скоростей жидкости φ следует принять зависимой переменной.

Следуя методике работ [2, 3], разложения искоемых переменных представим в виде

$$\xi(r, \theta, t) \equiv \xi_0(r) + \Delta z(r, \theta, t) = \xi_0(r) + \sum_i a_i(t) \psi_i(r, \theta); \quad \varphi = \sum_i b_i(t) \varphi_i(r, \theta, z), \quad (1)$$

где $\xi_0(r)$ – уравнение равновесной формы свободной поверхности жидкости при наличии сил поверхностного натяжения; $\Delta z(r, \theta, t)$ – возмущение свободной поверхности жидкости относительно ее равновесного положения $\xi_0(r)$; $a_i(t)$ – амплитуды форм колебаний возмущенной свободной поверхности жидкости ξ . Системы функций ψ_i и $\varphi_i = \psi_i \frac{\cosh \kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh \kappa_i H}$ являются решением порождающей линейной спектральной задачи [3] и имеют вид

$$\psi_n(r, \theta) = \frac{J_n\left(\frac{\kappa_n^{(m)}}{R} r\right)}{J_n(\kappa_n^{(m)})} \sin n\theta \quad (n=0, 1, 2, \dots; m=1, 2, \dots),$$

где $\kappa_n^{(m)}$ – корень кратности n уравнения $J_n'(\kappa_n^{(m)}) = 0$.

В работе [3] разработан метод исключения кинематических граничных условий на свободной поверхности жидкости, позволяющий получить дискретную модель механической системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» минимальной размерности. На основе разработанного метода, вариационных методов математической физики и асимптотических методов нелинейной механики построена математическая модель, позволяющая исследовать поступательные и угловые (наклонные) движения механической системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» при различных видах кинематического возмущения и динамического (силового и моментного) возбуждения. Разрешающая система уравнений представляет собой нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно независимых параметров a_i – коэффициентов разложений в ряд возмущений свободной поверхности жидкости ξ по формам колебаний свободной поверхности ψ_i и ε_i – компонент вектора перемещений резервуара относительно некоторой неподвижной системы отсчета

$$\begin{aligned} \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} + \ddot{\vec{e}} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijk}^q - 2\delta_{rijk}^q) - \frac{1}{2} g \alpha_r^s - g N_r a_r + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i (\vec{B}_{ir}^2 - \vec{B}_{ri}^2) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(\vec{B}_{ijr}^3 - \vec{B}_{rij}^3) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(\vec{B}_{ijk}^4 - \vec{B}_{rijk}^4) \right\} - \\
& - \frac{\sigma}{\rho} \alpha_r^k - \frac{\sigma}{\rho} \sum_i a_i 2\beta_i^k - \frac{\sigma}{\rho} \sum_{i,j} a_i a_j (\gamma_{ijr}^k + 2\gamma_{irj}^k) - \frac{\sigma}{\rho} \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k 2(\delta_{rij}^k + \delta_{ijk}^k) - \frac{\sigma}{\rho} \cos \theta_1 \lambda_r; \quad (2) \\
& \rho \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right] \right\} + (M_T + M_F) \ddot{\vec{\varepsilon}} = \\
& = \vec{F} - (M_T + M_F) g \vec{k} - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2\vec{B}_{ijk}^3 \right\}. \quad (3)
\end{aligned}$$

Система (2) – (3) включает в себя $N + 3$ уравнений (N – число рассматриваемых форм колебаний жидкости) и описывает динамику совместного движения резервуара и жидкости при различных видах кинематического возмущения и динамического возбуждения. Уравнения (2) описывают динамику амплитуд форм колебаний свободной поверхности жидкости, а уравнения (3) – динамику резервуара, однако эти уравнения взаимозависимы и включают силы взаимодействия между компонентами механической системы. Модель реализована аналитически для произвольного числа форм колебаний свободной поверхности жидкости.

Совокупность коэффициентов, входящих в уравнения (2) – (3), определяет свойства рассматриваемой механической системы и особенности проявления в ней внутренних линейных и нелинейных связей. Эти коэффициенты определяются через квадратуры от решения краевой задачи по определению форм колебаний свободной поверхности жидкости. При этом коэффициенты $\beta_{ir}^q, \gamma_{ijr}^q, \delta_{ijk}^q, \alpha_r^s, N_r, \beta_{ir}^k, \gamma_{ijr}^k, \delta_{ijk}^k, \lambda_r$ соответствуют случаю движения жидкости в неподвижном резервуаре, а коэффициенты $\vec{B}_r^1, \vec{B}_{ri}^2, \vec{B}_{rij}^3, \vec{B}_{rijk}^4$ отражают взаимосвязь движения жидкости и поступательного движения резервуара.

Полный вывод системы уравнений (2) – (3) и формулы для вычисления коэффициентов для общего случая совместного движения (поступательного и углового) цилиндрического резервуара и жидкости со свободной поверхностью представлены в работе [3], для случая поступательного движения резервуара, частично заполненного жидкостью.

2. Определение собственных частот колебаний механической системы.

Для анализа резонансных свойств системы в ее совместном движении определим низшую собственную частоту механической системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью». Заметим, что в этом случае собственные частоты системы будут отличаться от парциальных частот. Для определения частоты в соответствии с теорией механических колебаний запишем уравнения (2) – (3) только для первой антисимметричной формы a_1 с возможностью горизонтального движения по координате ε_y в виде

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + g N_1 a_1 = 0; \quad \frac{\rho B_1^{1y}}{M_T + M_F} \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0,$$

и, с учетом обозначений: $\lambda_1 = \frac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $\lambda_2 = \frac{\rho B_1^{1y}}{M_T + M_F}$, $\omega_1^2 = \frac{g N_1}{\beta_{11}^q}$, представим далее эту систему в каноническом виде

$$\ddot{a}_1 + \lambda_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0; \quad (4)$$

$$\lambda_2 \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0. \quad (5)$$

Периодические решения системы уравнений (4) – (5) примем в форме

$$a_1 = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t; \quad \varepsilon_y = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t;$$

для этого запишем уравнения для амплитуд A_1 и A_2 в матричном виде

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & -\lambda_1 \omega^2 \\ -\lambda_2 \omega^2 & -\omega^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Записанное характеристическое уравнение имеет нетривиальное решение, если определитель матрицы коэффициентов равен нулю. Приравнявая этот определитель нулю и решая биквадратное уравнение, получим формулу для определения собственной частоты колебаний жидкости со свободной поверхностью т.е. $\omega_e = \omega_1 / \sqrt{1 - \lambda_1 \lambda_2}$. Как видно из определения ω_e , собственная частота системы при увеличении массы резервуара (т.е. при уменьшении λ_2 при постоянном λ_1) будет приближаться к собственной частоте ω_1 первой антисимметричной формы ψ_1 . Этим подтверждается известная теорема из механики о том, что при освобождении от связи собственная частота в системе должна понизиться. В данном случае при увеличении массы резервуара связь ослабевает, поскольку колебания жидкости все меньше и меньше влияют на характер колебаний резервуара. Заметим, что $\lambda_1 \lambda_2 < 1$, т.к. B_1^{ly} представляет собой смещение центра масс жидкости при возбуждении формы колебаний с амплитудой, равной единице. Максимальное смещение центра масс не может превышать радиуса, умноженного на амплитуду возбуждения формы колебаний (в нелинейной теории обычно максимальные амплитуды принимаются порядка 0,3 радиуса свободной поверхности). Произведение этих смещений на плотность дает массу цилиндра единичной высоты, что значительно меньше массы жидкости, что и обосновывает $\lambda_1 \lambda_2 < 1$.

Пусть резервуар радиусом $R = 1$ м и массы M_T частично заполнен жидкостью (водой) массы M_F до глубины $H = R$. Зависимость собственной частоты системы ω_e от соотношения масс резервуара и жидкости приведена на рис. 1. При этом рис. 1, а соответствует $0 \leq M_T / M_F \leq 1$, а рис. 1, б – $0 \leq M_T / M_F \leq 100$.

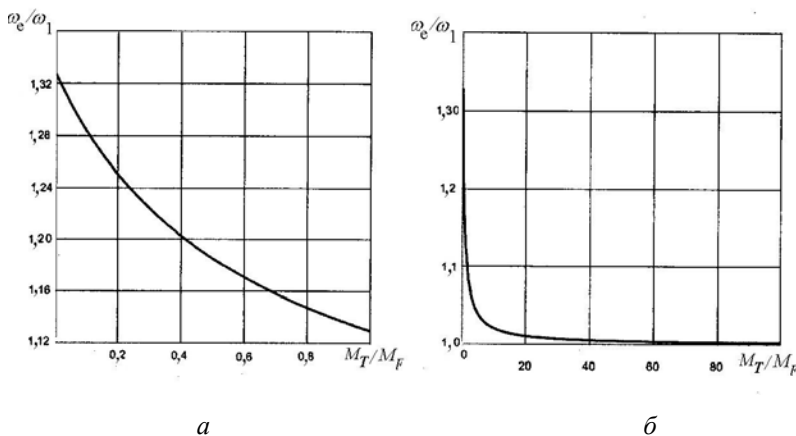


Рис. 1

Приведенные на графиках значения ω_e совпадают со значениями, полученными в результате частотного анализа колебаний свободной поверхности жидкости на стенке резервуара для нелинейной многочастотной модели системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» (которые приведены ниже).

3. Анализ поведения системы «резервуар – жидкость» при отсутствии обобщенной диссипации и сил поверхностного натяжения при гармоническом возбуждении.

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов для цилиндрического резервуара, параметры которого приведены выше. К резервуару в горизонтальном направлении приложена сила, изменяющаяся по гармоническому закону $F = F_y \cos pt$; начальное возмущение свободной поверхности жидкости отсутствует $a_i(0) = \dot{a}_i(0) = 0$. Во всех далее рассмотренных случаях амплитуда внешней горизонтальной силы, приложенной к резервуару, подбирается такой, чтобы колебания свободной поверхности жидкости попадали в нелинейный диапазон изменения амплитуд волн, т.е. возмущения свободной поверхности на стенке резервуара достигали величин $(0, 2, \dots, 0, 25)R$.

Система уравнений (2) – (3) линейна относительно вторых производных, что дает возможность при практической реализации на каждом шаге численного интегрирования численно приводить систему к нормальной форме Коши, а затем численно интегрировать по времени с помощью стандартного метода Рунге – Кутты. При этом на этапе преобразования к нормальной форме Коши порядок входящих в уравнение производных понижался путем введения обобщенных скоростей \dot{a}_i как равноправных независимых переменных (наряду с a_i). При исследовании динамики системы «резервуар – жидкость» использовано $N = 12$ форм колебаний, при этом $n_1 = 12$ форм колебаний свободной поверхности жидкости удерживалось с точностью до линейных членов, а $n_2 = n_3 = 6$ форм – до кубических членов [2, 3].

Шаг численного интегрирования задачи Коши для системы уравнений (2) – (3) выбирался на основе периода высшей формы колебаний a_{12} и для рассмотренной системы принимался равным $\Delta t = 0,02$ с. При анализе результатов и выводе графиков амплитуды ξ приводились к безразмерному виду относительно характерного размера системы – радиуса R резервуара, время и частота – относительно периода $2\pi / \omega_1$ и частоты колебаний первой антисимметричной формы. Поскольку в данной задаче сила, приложенная к стенке резервуара, действует в одном направлении Oy , в последующем изложении на всех графиках амплитуды возмущения свободной поверхности жидкости $\xi(r, \theta, t)$ приведены для характерной точки на стенке резервуара $r = R, \theta = \pi / 2$. Зависимость от времени амплитуды возмущения свободной поверхности подвергается дискретному преобразованию Фурье, а полученный в результате частотный спектр $A = [A(\omega / \omega_1)]$ анализировался на наличие гармоник, равных или кратных собственным, комбинационным или вынужденным частотам.

Рассмотрим нелинейные колебания свободной поверхности жидкости в резервуаре, когда соотношение масс резервуара и жидкости $M_T = 0,1M_F$, а частота внешней возбуждающей силы F лежит в дорезонансном диапазоне, т.е. $p = 0,7\omega_1$, где $\omega_1 = 4,144$ Гц – частота первой антисимметричной формы ψ_1 . Резонансная (собственная) частота системы при данном соотношении масс равна $\omega_e = 1,2834\omega_1$. На рис. 2 показано возмущение свободной поверхности жидкости на стенке резервуара, на рис. 3 – частотный спектр амплитуды возмущения свободной поверхности жидкости.

Как видно из рис. 2, колебания свободной поверхности происходят с заметной амплитудной модуляцией при наличии изменяющегося во времени среднего значения.

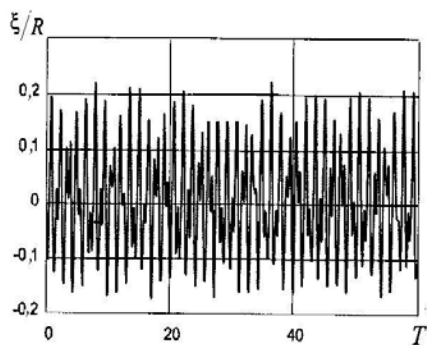


Рис. 2

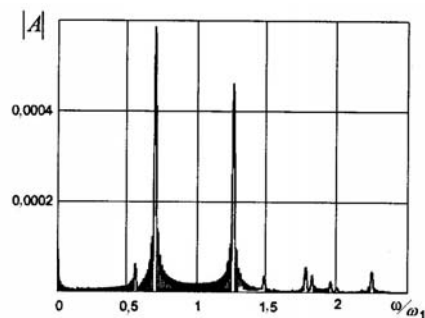


Рис. 3

Наличие амплитудной модуляции объясняется присутствием в частотном спектре (рис. 3) возмущения свободной поверхности двух доминирующих пиков практически равной амплитуды на частотах $p = 0,7 \omega_1$ (внешней) и $p = 1,2834 \omega_1$ (собственной частоты системы). Наличие изменяющегося во времени среднего значения можно объяснить присутствием в частотном спектре (рис. 3) гармоник на нулевой и низких частотах ($\omega \leq 0,3 \omega_1$), а также тем фактом, что верхняя и нижняя огибающие кривой ξ не являются зеркальным отражением друг друга, отличаясь максимумом амплитуды на всем интервале наблюдения не менее, чем на 30%, что является отражением систематического дрейфа среднего значения колебаний, обусловленного известной несимметричностью профилей волн на свободной поверхности.

Из частотного спектра (рис. 3) видно наличие высших спектральных гармоник как на собственных, так и на комбинационных частотах на всем интервале наблюдения. Наблюдаемый для возмущения свободной поверхности ξ процесс является квазипериодическим, однако наличие изменяющегося во времени среднего значения и гармоник с частотами, не кратными частоте внешнего возбуждения, позволяют сделать вывод об отсутствии в системе установившихся колебаний.

Далее рассмотрим нелинейные колебания свободной поверхности жидкости в резервуаре, когда частота внешней возбуждающей силы также расположена в дорезонансном диапазоне при соотношении масс резервуара и жидкости $M_T = M_F$ (рис. 4, 5) и $M_T = 10M_F$ (рис. 6, 7). Частота внешнего возбуждения остается прежней $p = 0,7 \omega_1$, а собственные частоты системы равны: $\omega_e = 1,1295 \omega_1$ и $\omega_e = 1,0202 \omega_1$, соответственно. Аналогично соотношению масс $M_T = 0,1M_F$, в системе в обоих случаях наблюдаются колебания с ярко выраженной амплитудной модуляцией и изменяющимся во времени средним значением. Анализ частотного спектра (рис. 5, 7) показывает, что увеличение массы системы приводит к перераспределению частот высших гармоник, а сами высшие формы колебаний существенно влияют на динамику

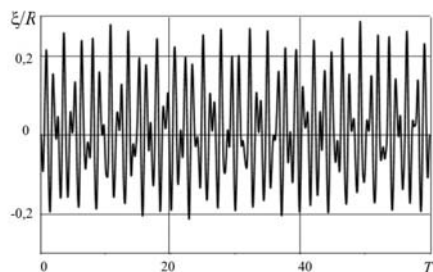


Рис. 4

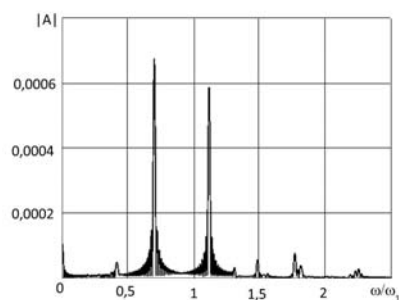


Рис. 5

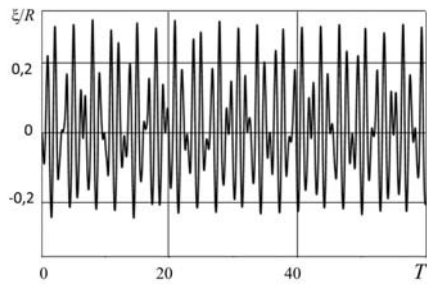


Рис. 6

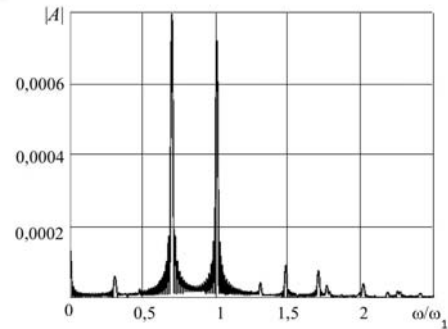


Рис. 7

процесса, проявляясь на графике (рис. 4, 6) в виде изломов и двугорбых пиков. Аналогично случаю резервуара малой массы, колебания свободной поверхности жидкости в тяжелом резервуаре при возбуждении движения в дорезонансном диапазоне частот не выходят на установившийся режим.

Покажем характерные особенности развития **нелинейных колебаний свободной поверхности жидкости в резервуаре**, когда частота внешней возбуждающей силы F расположена в резонансном диапазоне, т.е. для $p = 1,25\omega_1$, соотношение масс резервуара и жидкости также полагаем $M_T = 0,1M_F$ (рис. 8, 9). Из рис. 8 видно, что колебания свободной поверхности характеризуются ярко выраженной амплитудной модуляцией и сильно изменяющемся во времени средним значением. Это подтверждает также и структура частотного спектра (рис. 9): все доминирующие гармоники группируются вблизи частоты внешнего возбуждения, а гармоники на низких частотах ($\omega \leq 0,3\omega_1$) характеризуются амплитудами одного порядка с амплитудами доминирующих гармоник. Несимметричность изменения возмущений свободной поверхности жидкости подтверждается опытными данными для нелинейного волнообразования: высота гребня волны превышает глубину впадины.

Увеличение массы резервуара приводит к тому, что частоты доминирующих гармоник начинают заметно отличаться, так что период огибающей амплитудной модуляции увеличивается (рис. 10 – 13). При этом вклад гармоник на низких частотах ($\omega \leq 0,3\omega_1$) постепенно снижается, однако для всех трех случаев соотношения масс остается существенным (15 – 30% от полной энергии системы). Проявление высших форм колебаний для всех трех случаев соотношения масс практически отсутствует; как видно из частотных спектров (рис. 9, 11, 13), вклад амплитуд высших гармоник составляет не более 3 – 5%, а на графиках колебаний свободной поверхности (рис. 8, 10, 12) отсутствуют характерные для высших форм изломы и двугорбые пики.

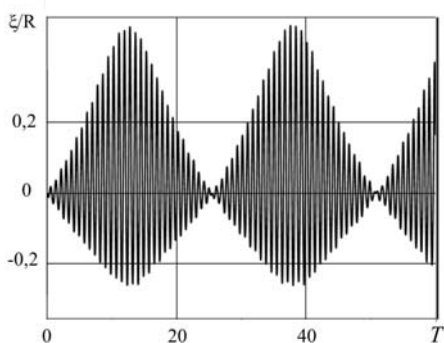


Рис. 8

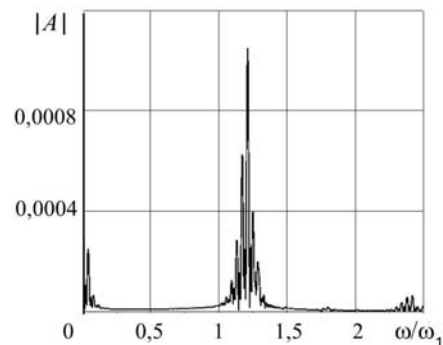


Рис. 9

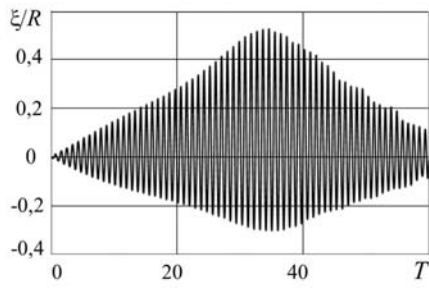


Рис. 10

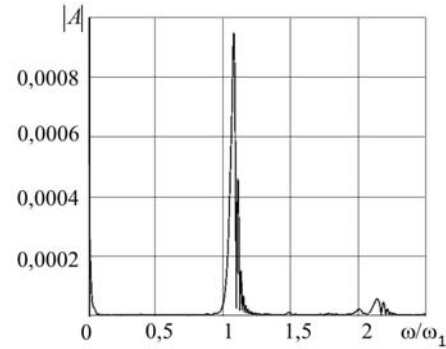


Рис. 11

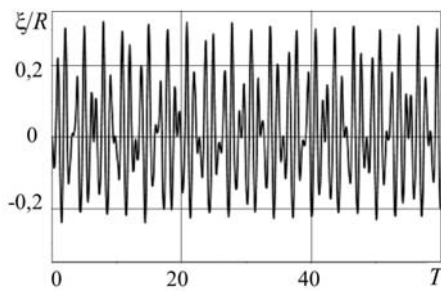


Рис. 12

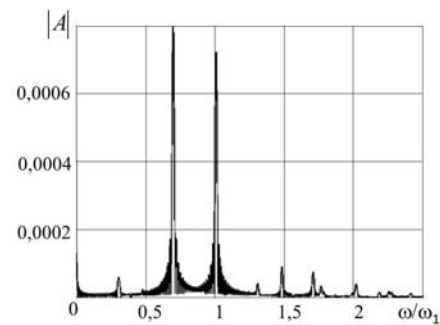


Рис. 13

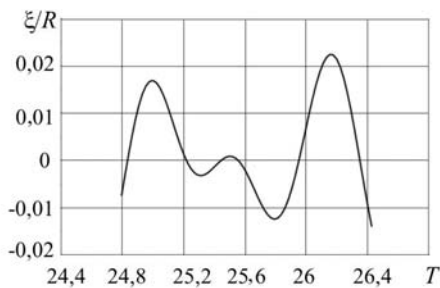


Рис. 14

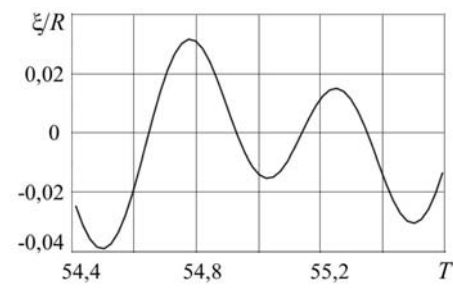


Рис. 15

Таким образом, в случае возбуждения системы в резонансном диапазоне частот выход на установившийся режим в классическом смысле также не происходит, однако можно говорить о выходе на условно установившийся режим колебаний, для которого характерны наличие двух-трех доминирующих частот, ярко выраженная амплитудная модуляция и пренебрежимо малый вклад высших форм колебаний. Однако важно отметить, что проявление резонанса будет на частотах, которые отличаются от парциальных частот, взятых за основу в работах [5, 7, 10, 13, 15].

Для резервуара большой массы характерно явление антирезонанса (показано на рис. 14, 15 для разных промежутков времени) – амплитуда возмущения свободной поверхности на некотором интервале времени падает до уровня $\xi = (0,01, \dots, 0,03)R$, т.е. значение амплитуды падает почти на порядок (примерно в 5 – 10 раз) и держится в течение 3 периодов колебаний по первой антисимметричной форме.

Изучим теперь нелинейные колебания свободной поверхности жидкости в резервуаре, когда частота внешней возбуждающей силы F расположена в зарезонансном диапазоне, т.е. $p = 2\omega_1$, соотношение масс резервуара и жидкости также полагаем

$M_T = 0,1M_F$ (рис. 16, 17). Из рис. 16 видно, что колебания свободной поверхности характеризуются ярко выраженной амплитудной модуляцией и сильно изменяющимся во времени средним значением. Это подтверждает также и структура частотного спектра (рис. 17): в спектре доминируют несколько гармоник – на внешней частоте, на собственной частоте системы, на комбинационной частоте ($\omega = 1,8\omega_1$) и на низких частотах ($\omega \leq 0,3\omega_1$). Наличие гармоник на низких частотах объясняет изменение во времени среднего значения. Поведение системы в зарезонансной области имеет некоторые признаки выхода на условно установившийся режим, когда наблюдается сильно модулированный режим почти повторяющихся пакетов колебаний.

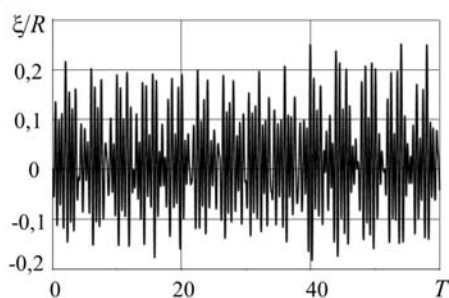


Рис. 16

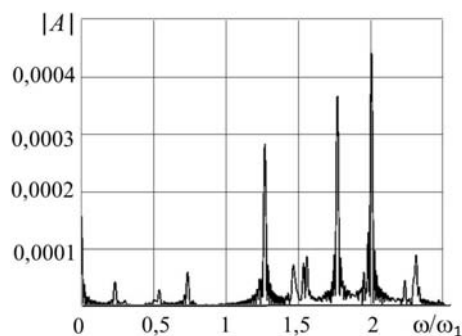


Рис. 17

Поведение системы аналогично поведению при возбуждении в дорезонансной области – на колебания свободной поверхности существенно влияют высшие формы колебаний, и увеличение массы резервуара не подавляет высшие гармоники спектра, а только перераспределяет их энергетический вклад.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что в рассмотренном частотном диапазоне выход колебаний свободной поверхности жидкости на установившийся режим в классическом смысле также не происходит. Анализ поведения системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» позволяет выделить три частотных диапазона внешнего возбуждения колебаний: резонансный, дорезонансный и зарезонансный. Во всех этих трех режимах наблюдаются эффекты, которые позволяют характеризовать процесс колебаний свободной поверхности как существенно неустойчивый. Поведение системы «резервуар – жидкость» при действии горизонтального силового возбуждения приводит к проявлению таких нелинейных эффектов: амплитудная модуляция (для всех диапазонов); существенное влияние высших гармоник (для дорезонансного и зарезонансного диапазонов); дрейф среднего значения амплитуд колебаний системы (для всех диапазонов). Установлено также, что увеличение массы жидкости по отношению к массе резервуара не способствует выходу системы на условно установившийся режим колебаний. Полученные результаты качественно согласуются с результатами новых теоретических [4] и экспериментальных [10, 13, 16] работ. На качественном уровне общий результат описанных вычислительных и натурных экспериментов можно сформулировать следующим образом: выход колебаний свободной поверхности жидкости на установившийся режим в классическом смысле не происходит в до-, около- и зарезонансных частотных диапазонах, при разных соотношениях массы резервуара и жидкости, колебания свободной поверхности жидкости и резервуара носят неустойчивый характер и представляют собой последовательность переходных процессов.

Выводы.

В работе исследована нелинейная динамика совместного движения свободной поверхности жидкости и цилиндрического резервуара при действии на резервуар горизонтальной гармонической силы. Для трех диапазонов изменения частоты внешнего силового возбуждения (резонансная, дорезонансная и зарезонансная частоты) произведен анализ поведения системы и изучена возможность выхода системы на режим установившихся колебаний.

При исследовании совместного движения компонент системы показано как на развитие колебательных процессов влияет соотношения масс жидкости и резервуара. Отмечено, что для таких процессов существенным являются эффекты модуляции колебаний, наличие дрейфа среднего значения и вклад высших гармоник спектра. В частности, установлено, что для режимов, характеризующихся большим периодом амплитудной модуляции, наблюдается описанное на основе экспериментов явление антирезонанса.

В целом проведенное исследование показало, что классический выход системы на установившийся режим колебаний вообще не происходит. Показано также, что в отличие от большинства работ по исследованию резонансных явлений при заданном движении несущего тела, существенные отличия в развитии резонансных процессов проявляются при изменении частоты возбуждения в дорезонансной, околорезонансной и зарезонансной зонах.

Анализ математического моделирования динамических процессов в системе резервуар – жидкость показал, что главными причинами расхождения описанных в работе результатов от полученных ранее являются: отказ от гипотезы о возможности пренебрежения колебаниями на собственных частотах системы (что особенно важно для случая многомодовых моделей); учет совместного характера движения системы «резервуар – жидкость» и включение в модель высших гармоник спектра. Полученные результаты согласуются с результатами новых теоретических [4] и экспериментальных [11, 13, 15] работ.

РЕЗЮМЕ. Досліджено нелінійні коливання механічної системи «циліндричний резервуар — рідина з вільною поверхнею» під дією горизонтальної гармонічної сили. Процес утворення хвиль на вільній поверхні вивчається на основі нелінійної багатомодової (12 форм коливань) моделі, яка описує сумісний рух резервуару та рідини під дією активних зовнішніх сил. На основі проведених досліджень показано, що вихід системи в класичному сенсі на усталений режим коливань взагалі не відбувається, що підтверджується експериментальними результатами. Моделювання на основі більш повної моделі показує наявність багаточастотного динамічного процесу, вплив високочастотних форм коливань, зміщення частот антисиметричних форм коливань.

1. Колесников К.С. Динамика ракет. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
2. Лимарченко О.С. Исследование нелинейного волнообразования жидкости в подвижном цилиндрическом резервуаре // Мат. физика и нелинейная механика, 1987. – № 8. – С. 12 – 19.
3. Лимарченко О.С., Ясинский В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – К.: НТТУ КПИ, 1997. – 338 с.
4. Лимарченко О.С., Губська В.В. Задача про вимушені нелінійні коливання резервуару у формі усіченого конуса, частково заповненого рідиною // Вісник Київськ. націон. ун-ту імені Тараса Шевченка. – 2012. – 1, № 4. – С. 73 – 76.
5. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. – К.: Наук. думка, 1990. – 295 с.
6. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. – М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.
7. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.
8. Abramson H. (Ed.) The dynamic behavior of liquid in moving container – Washington: NASA SP-106, 1966. – 467 p.

9. Akbarzade M., Farshidianfar A. Application of the Amplitude-Frequency Formulation to a Nonlinear Vibration System Typified by a Mass Attached to a Stretched Wire // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N. 4. – P. 476 – 482.
10. Faltinsen O.M., Rognebakke O.M., Timokha A.N. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth // *Physics of Fluids.* – 2006. – **1**, N 18. – P. 1 – 14.
11. Ibrahim R.A. *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications.* – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 950 p.
12. Koval'chuk P.S., Kruk L.A., Pelykh V.A. Stability of Composite Cylindrical Shells with Added Mass Interacting with the Internal Fluid Flow // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 5. – P. 566 – 574.
13. La Rocca M., Sciortino G., Adduce C., Boniforti M. A. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // *Physics of Fluids.* – 2005. – **17**, 062101. – P. 1 – 17.
14. Limarchenko O.S., Tkachenko R.V. Influence of Spring Attachment on the Dynamics of a Fluid-Filled Cylindrical Tank on a Moving Platform // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **50**, N 3. – P. 289 – 294.
15. Miles J. Nonlinear surface waves in closed basins // *J. Fluid. Mech.* – 1976. – **75**, N 3. – P. 419 – 448.
16. Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study // *Int. J. of Recent Trends in Engineering.* – 2009. – **1**, N 6. – P. 1 – 5.

Поступила 28.12.2015

Утверждена в печать 05.07.2016

