UDK 517.9

©2017. **С. М. Чуйко, О. С. Чуйко, В. О. Чечетенко**

ОПЕРАТОР ГРІНА МАТРИЧНОЇ ІНТЕГРАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Знайдені умови розв'язку, а також конструкція узагальненого оператора Гріна лінійної крайової задачі для матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром. Актуальність вивчення теорії крайових задач для лінійних інтегрально-диференціальних рівнянь пов'язана з численними застосуваннями в задачах механіки, аеродинаміки, відновлення параметрів, а також теорії коливань. Для розв'язання матричної інтегрально-диференціальної крайової задачі застосовані оригінальні умови розв'язності, а також конструкція загального розв'язку матричного рівняння типу Сильвестра.

У роботі суттєво використовується апарат псевдообернення (за Муром–Пенроузом) матриць [1], конструкції узагальнених операторів Гріна, побудовані в роботах А. М. Самойленка і О. А. Бойчука [1] та методи розв'язання матричних рівнянь Ляпунова та Сильвестра, побудовані в роботах О. А. Бойчука, С. А. Кривошеї [6] та С. М. Чуйка [7, 12].

Запропоновані умови розв'язку, а також конструкція узагальненого оператора Гріна крайової задачі для матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром узагальнюють умови розв'язку і конструкцію узагальненого оператора Гріна інтегрально-диференціальної крайової задачі [2, 8], а також матричної крайової задачі [9]. Крім того, аналогічні умови розв'язку, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром можуть бути отримані для аналогічної крайової задачі в абстрактних просторах [1, 10]. Запропонована схема дослідження крайових задач матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1) аналогічно [8] може бути перенесена на нелінійні інтегрально-диференціальні системи типу Фредгольма з виродженим ядром, а також аналогічно [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] – на матричні крайові задачі для інтегрально-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром, що містять диференціально-алгебраїчний оператор. З іншого боку, у разі нерозв'зності матричні крайові задачі для інтегрально-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром можуть бути регуляризовані аналогічно [18, 19].

MSC: 34B15.

Ключові слова: *оператор Гріна, матрична інтегрально-диференціальна система, крайова задача.*

1. Постановка задачі.

Досліджуємо задачу про побудову розв'язку [1, 2]

$$Z(t) \in \mathbb{D}^2_{\alpha\times\beta}[a;b] := \mathbb{D}^2[a;b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \ Z'(t) \in \mathbb{L}^2_{\alpha\times\beta}[a;b] := \mathbb{L}^2[a;b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з вирожденим ядром

$$Z'(t) = \Phi(t) \int_a^b \Big[A(s)Z(s) + B(s)Z'(s)\Big]\Psi(t)\, ds + F(t), \tag{1}$$

Роботу виконано за фінансової підтримки МОН України (номер державної реєстрації 0115U003182).

підпорядкованої крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \ \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{2}$$

Тут

$$\Phi(t) \in \mathbb{L}^2_{\alpha\times\gamma}[a;b], \ A(t), B(t) \in \mathbb{L}^2_{\gamma\times\alpha}[a;b], \ \Psi(t) \in \mathbb{L}^2_{\beta\times\beta}[a;b], \ F(t) \in \mathbb{L}^2_{\alpha\times\beta}[a;b];$$

$\mathcal{L}Z(\cdot)$ – лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) : \ \mathbb{D}^2_{\alpha\times\beta}[a;b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}.$$

Взагалі кажучи, припускаємо $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ – довільні натуральні числа. Матрична крайова задача (1), (2) узагальнює традиційні постановки задач для інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма [1, 2]. Розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи (1) представимо у вигляді

$$Z(t) = \int_a^t \Phi(s)\, C_0\, \Psi(s)\, ds + C_1 + \mathcal{F}(t), \ \mathcal{F}(t) := \int_a^t F(s)\, ds,$$

де

$$C_0 := \int_a^b \Big[A(s)Z(s) + B(s)Z'(s)\Big]\, ds \in \mathbb{R}^{\gamma\times\beta}, \ C_1 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

– невідомі сталі матриці, для знаходження яких приходимо до матричного рівняння типу Сильвестра [3]

$$C_0 - \int_a^b A(t) \int_a^t \Phi(s) C_0 \Psi(s)\, ds\, dt - \int_a^b A(t) C_1\, dt - \int_a^b A(s)\Phi(s)C_0\Psi(s)\, ds = \mathcal{B}; \tag{3}$$

тут

$$\mathcal{B} := \int_a^b \Big[A(s)\mathcal{F}(s) + B(s)F(s)\Big]\, ds \in \mathbb{R}^{\gamma\times\beta}$$

– стала матриця.

2. Узагальнений оператор Гріна задачі Коші.

Визначимо оператор [3]

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}\mathcal{B} : \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n},$$

як оператор, який ставить у відповідність матриці $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-стовпець $\mathcal{M}\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, складений з n стовпців матриці $\mathcal{B}$, а також обернений оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\mathcal{A} : \ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицю $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Позначимо $\Theta^{(j)} \in \mathbb{R}^{\gamma\times\beta}, \ j = 1, 2, \ \dots\ , \ \beta\cdot\gamma$ – природний базис [4] простору $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$, а також

$$\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \ j = 1, 2, \ \dots\ , \ \alpha\cdot\beta$$

– природний базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при цьому задача про знаходженя розв'язку рівняння (1) приводить до задачі про знаходженя векторів $\xi \in \mathbb{R}^{\beta\gamma}$ и $\zeta \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}$, компоненти яких визначають розкладання матриць

$$C_0 = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Theta^{(j)}\xi_j, \; C_1 = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)}\zeta_j, \; \xi_j, \; \zeta_j \in \mathbb{R}^1, \; c := \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\beta+\beta\gamma}.$$

У нових позначеннях, рівняння (3) набуває вигляду

$$\mathcal{D}c = \mathcal{M}\mathcal{B}, \; \mathcal{D} := [\ \mathcal{D}_0; \ \mathcal{D}_1\ ], \tag{4}$$

де

$$\mathcal{D}_0 := \left[\mathcal{D}_0^{(j)}\right]_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma\times\beta\cdot\gamma}, \; \mathcal{D}_0^{(j)} := \mathcal{M}\Theta^{(j)} - \int_a^b A(s)\Phi(s)\Theta^{(j)}\Psi(s)\,ds -$$

$$-\mathcal{M}\int_a^b A(t)\int_a^t \Phi(s)\Theta^{(j)}\Psi(s)\,ds\,dt,$$

а також

$$\mathcal{D}_0 := \left[\mathcal{D}_0^{(j)}\right]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\beta\cdot\gamma\times\alpha\cdot\beta}, \; \mathcal{D}_1^{(j)} := -\mathcal{M}\int_a^b A(t)\Xi^{(j)}\,dt$$

– сталі матриці. Позначимо $P_{\mathcal{D}^*} \in \mathbb{R}^{\beta\gamma\times\beta\gamma}$ і $P_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{(\alpha+\gamma)\beta\times(\alpha+\gamma)\beta}$ матриці-ортопроектори:

$$P_{\mathcal{D}^*} : \mathbb{R}^{\beta\gamma} \to \mathbb{N}(\mathcal{D}^*), \; P_{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^{\alpha\beta+\beta\gamma} \to \mathbb{N}(\mathcal{D}^*).$$

За умови [1, 3, 14]

$$P_{\mathcal{D}^*}\mathcal{M}\mathcal{B} = 0 \tag{5}$$

загальний розв'язок рівняння (4)

$$c = \mathcal{D}^+\mathcal{M}\mathcal{B} + P_{\mathcal{D}_\rho}c_\rho, \; c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

визначає загальний розв'язок

$$C_0 = C_0(\mathcal{B}) + C_0(c_\rho), \; C_0(\mathcal{B}) := \mathcal{M}^{-1}\Big[\xi(\mathcal{B})\Big], \; C_0(c_\rho) := \mathcal{M}^{-1}\Big[\xi(c_\rho)\Big],$$

$$C_1 = C_1(\mathcal{B}) + C_1(c_\rho), \; C_1(\mathcal{B}) := \mathcal{M}^{-1}\Big[\zeta(\mathcal{B})\Big], \; C_1(c_\rho) := \mathcal{M}^{-1}\Big[\zeta(c_\rho)\Big]$$

матричного рівняння типу Сильвестра (3); тут

$$\xi(\mathcal{B}) := \begin{pmatrix} I_{\beta\gamma} & O \end{pmatrix}\mathcal{D}^+\mathcal{M}\mathcal{B}, \; \xi(c_\rho) := \begin{pmatrix} I_{\beta\gamma} & O \end{pmatrix}P_{\mathcal{D}_\rho}c_\rho,$$

$$\zeta(\mathcal{B}) := \begin{pmatrix} O & I_{\alpha\beta} \end{pmatrix}\mathcal{D}^+\mathcal{M}\mathcal{B}, \; \zeta(c_\rho) := \begin{pmatrix} O & I_{\alpha\beta} \end{pmatrix}P_{\mathcal{D}_\rho}c_\rho;$$

матриця $P_{\mathcal{D}_\rho} \in \mathbb{R}^{(\alpha+\gamma)\beta\times\rho}$ складена з ρ лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{D}}$.

Лемма. *За умови (5) загальний розв'язок*

$$Z(t, c_\rho) = W(t, c_\rho) + \mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t), \ c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

задачі Коші $Z(a) = C_1(c_\rho)$ для рівняння (1) визначає узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші

$$\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t) := \int_a^t \Phi(s)C_0(\mathcal{B})\Psi(s)\,ds + C_1(\mathcal{B}) + \mathcal{F}(t);$$

тут

$$W(t, c_\rho) := C_1(c_\rho) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho)\Psi(s)\,ds, \ c_\rho \in \mathbb{R}^\rho$$

– загальний розв'язок задачі Коші $Z(a) = 0$ для однорідної частини рівняння (1).

3. Узагальнений оператор Гріна інтегрально-диференціальної крайової задачі.

Позначимо

$$\Theta_\rho^{(j)} \in \mathbb{R}^\rho, \ j = 1, \ 2, \ \dots\ , \ \rho$$

– природний базис простору $\mathbb{R}^\rho$. Підставляючи розв'язок рівняння (1) у крайову умову (2), приходимо до задачі про знаходження розв'язку

$$c_\rho = \sum_{j=1}^{\rho} \Theta_\rho^{(j)}\xi_j \in \mathbb{R}^\rho, \ \xi_j \in \mathbb{R}^1, \ j = 1, 2, \ \dots\ , \ \rho$$

матричного рівняння типу Сильвестра [3, 6, 7]

$$LW(\cdot, c_\rho) + L\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{6}$$

В критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) за умови (5) і [3, 7]

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - L\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0 \tag{7}$$

розв'язок матричного рівняння (5) визначає вектор $c_\rho = c_\rho(c_r) + c_\rho(\mathcal{A}, F)$, де

$$c_\rho(\mathcal{A}, F) := \mathcal{Q}^+\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A} - L\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\}, \ c_\rho(c_r) := P_{\mathcal{Q}_r}c_r, \ c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Тут $P_{\mathcal{Q}^*}-$ $(\mu \cdot \nu \times \mu \cdot \nu)-$ матриця-ортопроектор $P_{\mathcal{Q}^*}: \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu} \to N(\mathcal{Q}^*)$, де

$$\mathcal{Q} := \Big[\mathcal{Q}_i\Big]_{j=1}^{\rho} \in \mathbb{R}^{\mu \cdot \nu \times \rho},\ \mathcal{Q}_j := \mathcal{M}\Bigg\{L\mathcal{M}^{-1}\Big[W(\cdot, \Theta_\rho^{(j)})\Big]\Bigg\},\ j = 1, 2,\ \dots\ ,\ \rho;$$

матриця $P_{\mathcal{Q}_r}$ складена з r лінійно-незалежних стовпців $(\rho \times \rho)-$ матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$; матриця $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ складена з d лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$. Таким чином, в критичному випадку, за умови (5) і (7) розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), що задовольняє крайовій умові (2)

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G\Big[F(s); \mathfrak{A}\Big](t),\ c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[F(s); \mathfrak{A}\Big](t) := W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t)$$

і загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (1), (2)

$$W(t, c_r) := C_1(c_\rho(c_r)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho(c_r))\Psi(s)\, ds;$$

тут

$$W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) := C_1(c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho(\mathcal{A}, F))\Psi(s)\, ds.$$

Таким чином, доведена наступна достатня умова розв'язності матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), що задовольняє крайовій умові (2).

Теорема. *В критичному випадку* ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) *за умови (5) і (7), розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), який задовольняє крайовій умові (2)*

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G\Big[F(s); \mathfrak{A}\Big](t),\ c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[F(s); \mathfrak{A}\Big](t) := W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t)$$

і загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (1), (2)

$$W(t, c_r) := C_1(c_\rho(c_r)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho)\Psi(s)\, ds;$$

тут

$$W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) := C_1(c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho(\mathcal{A}, F))\Psi(s)\, ds,$$

– загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (1), (2) та

$$\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t) := \int_a^t \Phi(s)C_0(\mathcal{B})\Psi(s)\, ds + C_1(\mathcal{B}) + \mathcal{F}(t);$$

– узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для лінійної матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1).

Знайдені умови розв'язності (5) і (7), а також конструкція узагальненого оператора Гріна крайової задачі для матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), (2) узагальнюють традиційні результати для нетерових крайових задач [1, 2].

Приклад 1. *Вимогам доведеної теореми задовольняє задача про побудову 2π-періодичних розв'язків матричної інтегрально-диференціальної системи*

$$Z'(t) = \Phi(t)\int_a^b \Big[A(s)Z(s) + B(s)Z'(s)\Big]\Psi(t)\, ds + F(t), \tag{8}$$

де

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Phi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Psi(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$B(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \end{pmatrix},\ F(t) := \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \\ 0 & \cos t \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{3\times 2}$, а також

$$\Theta_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Theta_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ \Theta_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{2\times 2}$; при цьому

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & \pi & -\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi & 0 & 1 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_{\mathcal{D}^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

крім того

$$P_{\mathcal{D}}=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} P_{\mathcal{D}_\rho}=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\mathcal{D}^*}=0$, то умова (5) виконана. Матриці

$$C_0(\mathcal{B})=\begin{pmatrix} 0&\pi\\ \pi&0 \end{pmatrix},\ C_0(c_\rho)=\begin{pmatrix} 0&0\\ 0&0 \end{pmatrix},$$

$$C_1(\mathcal{B})=\begin{pmatrix} 0&0\\ 0&0\\ 0&0 \end{pmatrix},\ C_1(c_\rho)=\begin{pmatrix} c_1&c_4\\ c_2&c_5\\ c_3&c_6 \end{pmatrix}$$

визначають загальний розв'язок

$$W(t,c_\rho)=C_1(c_\rho),\ c_\rho\in\mathbb{R}^6$$

задачі Коші $Z(0)=0$ для однорідної частини рівняння (8), а також узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші

$$\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t)=\begin{pmatrix} 1-\cos t-\pi\sin^2 t & \pi\cos t\sin t\\ (1+\pi\cos t)\sin t & 1-\cos t+\pi\sin^2 t\\ 0 & \sin t \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\mathcal{Q}=0$, $\mathcal{A}=0$ і $L\mathcal{K}[F(s)](\cdot)=0$, то умова (7) виконана, при цьому розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром, який задовольняє крайовій умові (8)

$$Z(t,c_r)=W(t,c_r)+G\Big[F(s);\mathfrak{A}\Big](t),\ c_r\in\mathbb{R}^6$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[F(s);\mathfrak{A}\Big](t)=\mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t)$$

і загальний розв'язок $W(t,c_r)=C_1(c_\rho)$ однорідної частини крайової задачі (8).

У некритичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) умова (7) виконується для будь-яких неоднорідностей крайової задачі (1), (2), при цьому розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), який задовольняє крайовій умові (2) визначає наступне твердження.

Наслідок. *У некритичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} = 0$) за умови (5) розв'язок матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1), який задовольняє крайовій умові (2)*

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G\Big[F(s); \mathfrak{A}\Big](t), \;\; c_r \in \mathbb{R}^r$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[F(s); \mathfrak{A}\Big](t) := W(t, c_\rho(\mathcal{A}, F)) + \mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t)$$

та загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (1), (2)

$$W(t, c_r) := C_1(c_\rho(c_r)) + \int_a^t A(s)\Phi(s)C_0(c_\rho)\Psi(s)\, ds.$$

Приклад 2. *Вимогам доведеного наслідку задовольняє задача про побудову антиперіодичних розв'язків матричної інтегрально-диференціальної системи (8).*

Загальний розв'язок $W(t, c_\rho), \;\; c_\rho \in \mathbb{R}^6$ задачі Коші $Z(0) = 0$ для однорідної частини рівняння (8), а також узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $\mathcal{K}[F(s)](t)$ були знайдені в прикладі 1. Оскільки $\mathcal{Q} = 2\,I_6$, $\mathcal{A} = 0$ і $L\mathcal{K}[F(s)](\cdot) = 0$, то єдиний розв'язок

$$Z(t) = G\Big[F(s); \mathfrak{A}\Big](t)$$

матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром, який задовольняє крайовій умові $Z(0) + Z(2\pi) = 0$, визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[F(s); \mathfrak{A}\Big](t) = \mathcal{K}\Big[F(s)\Big](t)$$

антиперіодичної крайової задачі (8).

Запропоновані умови розв'язку, а також конструкція узагальненого оператора Гріна крайової задачі (1), (2) для матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1) узагальнюють умови розв'язку і конструкцію узагальненого оператора Гріна інтегрально-диференціальної крайової задачі [2, 8], а також матричної крайової задачі [9]. Крім того, аналогічні умови розв'язку, а також конструкція узагальненого оператора Гріна матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1) можуть бути отримані для аналогічної крайової задачі в абстрактних просторах [1, 10]. Запропонована схема дослідження крайових задач матричної інтегрально-диференціальної системи типу Фредгольма з виродженим ядром (1) аналогічно [8] може бути перенесена на нелінійні інтегрально-диференціальні системи типу Фредгольма з виродженим ядром, а також аналогічно [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] — на матричні крайові задачі для інтегрально-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром, що містять диференціально-алгебраїчний оператор. З іншого боку, у разі нерозв'зності матричні крайові задачі для інтегрально-диференціальних систем типу Фредгольма з виродженим ядром можуть бути регуляризовані аналогічно [18, 19].

Цитована література

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). – Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. – 298 p.
2. *Самойленко А.М., Бойчук О.А., Кривошея С.А.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Фредгольма з виродженим ядром // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, № 11. – С. 1576–1579.
3. *Чуйко С.М.* О решении линейных матричных уравнений // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iменi В.Н. Каразiна. Серiя: Математика, прикладна математика i механiка. – 2015. – 29. – С. 27–33.
4. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука. – 1984. – 318 с.
5. *Chuiko S.M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – 210, № 1. – P. 9–21.
6. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – 50, № 8. – P. 1162–1169.
7. *Чуйко С.М.* О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышевский сборник. – 2015. – 16, вып. 1. – С. 52–66.
8. *Boichuk A.A., Holovats'ka I.A.* Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – 203, № 3. – P. 306–321.
9. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation // Differential Equations. – 2001. – 37, № 4. – P. 464–471.
10. *Chuiko S.M.* On solvability of linear matrix boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – 230, № 5. – P. 799–801.
11. *Campbell S.L.* Singular Systems of differential equations. – San Francisco–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. – 1980. – 178 p.
12. *Chuiko S.M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal. – 2015. — 56, № 4. – P. 752–760.
13. *Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2013. – **53**, № 6. – P. 777–788.
14. *Chuiko S.M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – 210, № 1. – P. 9–21.
15. *Chuiko S.M.* Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation // Russian Mathematics. – 2016. – 60, № 8. – P. 64–73.
16. *Chuiko S.M.* Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – 38 (2). – P. 236–244.
17. *Chuiko S.M.* On the solvability of a matrix boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – 232, № 5. – P. 794–798.
18. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

19. *Chuiko S.M.* On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – 220, № 5. – P. 591–602.

References

1. *Boichuk, A. A., Samoilenko, A. M.* (2016). Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). Berlin; Boston: De Gruyter.
2. *Samoylenko, A.M., Boychuk, O.A., Krivosheya, S.A.* (1996). Krayovi zadachi dlya sistem liniynih integro-diferentsialnih rivnyan tipu Fredgolma z virodzhenim yadrom. Ukr. mat. zhurn., 48, No. 11, pp. 1576–1579 (in Ukrainian).
3. *Chuiko, S.M.* (2015). O reshenii lineynyih matrichnyih uravneniy // Visnik Harkivskogo natsionalnogo universitetu imeni V.N. Karazina. Seriya: Matematika, prikladna matematika i mehanika, 29, pp. 27–33 (in Russian).
4. *Voevodin, V.V., Kuznetsov, Yu.A.* (1984). Matritsyi i vyichisleniya. Moscow: Nauka (in Russian).
5. *Chuiko, S.M.* (2015). A generalized matrix differential-algebraic equation. Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), 210, No. 1, pp. 9–21.
6. *Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A.* (1998). Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type. Ukrainian Mathematical Journal, 50, No. 8, pp. 1162–1169.
7. *Chuiko, S.M.* (2015). O reshenii obobschennogo matrichnogo uravneniya Silvestra. Chebyishevskiy sbornik, 16, No. 1. pp. 52–66 (in Russian).
8. *Boichuk, A.A., Holovats'ka, I.A.* (2014). Boundary-value problems for systems of integrodifferential equations. Journal of Mathematical Sciences. 203, No. 3, pp. 306–321.
9. *Boichuk, A.A., Krivosheya, S.A.* (2001). A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. Differential Equations. 37, No. 4, pp. 464–471.
10. *Chuiko, S.M.* (2018). On solvability of linear matrix boundary-value problem. Journal of Mathematical Sciences. 230, No. 5, pp. 799–801.
11. *Campbell, S.L.* (1980). Singular Systems of differential equations. San Francisco, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program.
12. *Chuiko, S.M.* (2015). The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem. Siberian Mathematical Journal. 56, No. 4. pp. 752–760.
13. *Boichuk, A.A., Pokutnyi, A.A., Chistyakov, V.F.* (2013). Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 53, No. 6, pp. 777–788.
14. *Chuiko, S.M.* (2015). A generalized matrix differential-algebraic equation. Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). 210, No. 1, pp. 9–21.
15. *Chuiko, S.M.* (2016). Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation. Russian Mathematics. 60, No. 8. pp. 64–73.
16. *Chuiko, S.M.* (2017). Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem. Lobachevskii Journal of Mathematics. 38 (2), pp. 236–244.
17. *Chuiko, S.M.* (2018). On the solvability of a matrix boundary-value problem. Journal of Mathematical Sciences, 232, No. 5, pp. 794–798.
18. *Tihonov, A.N., Arsenin, V.Ya.* (1986). Metodyi resheniya nekorrektnyih zadach. Moscow: Nauka (in Russian).
19. *Chuiko, S.M.* (2017). On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem. Journal of Mathematical Sciences. 220, No. 5, pp. 591–602.

S. M. Chuiko, O. S. Chuiko, V. O. Chechetenko

Green's operator of a matrix integral-differential boundary value problem.

The conditions of solvability and construction of the generalized Green operator of the linear boundary value problem for a matrix integral-differential system of the Fredholm type with a degenerate kernel were found. The current interest of studying the theory of boundary value problems for linear integral-differential equations is associated with numerous applications in problems of mechanics, aerodynamics, recovery of parameters, and also the theory of oscillations. The original solvability conditions and construction of a general solution of the Sylvester type matrix equation were used to solve the matrix integral-differential boundary value problem. In this work a pseudo-inversion apparatus (by Moore–Penrose) of the matrix [1], the construction of generalized Green operators constructed in the works of A. M. Samoilenko and O. A. Boichuck [1] and methods for solving the Lyapunov and Sylvester matrix equations constructed in the work of O. A. Boichuk, S. A. Krivosheya [6] and S. M. Chuiko [7, 12] are basically used. The proposed conditions of solvability and construction of a generalized Green operator of the boundary value problem for the matrix integral-differential system of the Fredholm type with a degenerate kernel, generalize the conditions of solvability and construction of a generalized Green operator of the integral-differential boundary value problem [2, 8], and of the matrix boundary value problem [9]. In addition, similar conditions of solvability, and construction of a generalized Green operator of a matrix integral differential system of the Fredholm type with a degenerate kernel, can be obtained for a similar boundary value problem in abstract spaces [1, 10]. The proposed scheme of studying the boundary value problems of the matrix integral differential system of the Fredholm type with a degenerate kernel (1) [8] can be transferred analogously to nonlinear integral-differential systems of the Fredholm type degenerate kernel, and similarly [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] can be transferred on matrix boundary value problems for integral-differential systems of the Fredholm type with degenerate kernel containing differential-algebraic operator. On the other hand, in case of unsolvability of matrix boundary value problems for integral-differential systems of the Fredholm type with a degenerate kernel can be analogously regularized [18, 19].

Keywords: *Green's operator, matrix integral-differential system, boundary value problem.*

С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, В. А. Чечетенко

Оператор Грина матричной интегрально-дифференциальной задачи.

Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной краевой задачи для матричной интегрально-дифференциальной системы типа Фредгольма с вырожденным ядром. Актуальность изучения теории краевых задач для линейных интегрально-дифференциальных уравнений связана с многочисленными приложениями в задачах механики, аэродинамики, восстановление параметров, а также теории колебаний. Для решения матричной интегрально-дифференциальной краевой задачи применены оригинальные условия разрешимости, а также конструкция общего решения матричного уравнения типа Сильвестра. В работе существенно используется аппарат псевдообращения (по Муру–Пенроузу) матриц [1], конструкции обобщенных операторов Грина, построенные в работах А. М. Самойленко и А. А. Бойчука [1] и методы решения матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра, построенные в работах А. А. Бойчука, С. А. Кривошеи [6] и С. М. Чуйко [7, 12]. Предложенные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина краевой задачи для матричной интегрально-дифференциальной системы типа Фредгольма с вырожденным ядром обобщают условия разрешимости и конструкцию обобщенного оператора Грина интегрально-дифференциальной краевой задачи [2, 8], а также матричной краевой задачи [9]. Кроме того, аналогичные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина матричной интегрально-

дифференциальной системы типа Фредгольма с вырожденным ядром могут быть получены для аналогичной краевой задачи в абстрактных пространствах [1, 10]. Предложенная схема исследования краевых задач матричной интегрально-дифференциальной системы типа Фредгольма с вырожденным ядром (1) аналогично [8] может быть перенесена на нелинейные интегрально-дифференциальные системы типа Фредгольма с вырожденным ядром, а также аналогично [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] – на матричные краевые задачи для интегрально-дифференциальных систем типа Фредгольма с вырожденным ядром, содержащие дифференциально-алгебраический оператор. С другой стороны, в случае неразрешимости матричные краевые задачи для интегрально-дифференциальных систем типа Фредгольма с вырожденным ядром могут быть регуляризованы аналогично [18, 19].

Ключевые слова: *оператор Грина, матричная интегрально-дифференциальная система, краевая задача.*

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ
chujko-slav@inbox.ru

Отримано 19.12.17