

УДК 531.36, 517.977

©2017. В. В. Грушкова

## БЕЗГРАДИЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ С ОБХОДОМ ПРЕПЯТСТВИЙ

В работе исследуется задача поиска экстремума выпуклой функции при наличии ограничений в пространстве состояний системы. Предполагается, что аналитическое выражение функции, а также расположение и форма препятствий могут быть частично или полностью неизвестны. Основным результатом работы является новый класс функций управления для системы с динамикой интегратора. Полученные управления реализуют движение системы в окрестности градиентного потока соответствующей навигационной функции, используя только ее значения (но не производные), и таким образом обеспечивают свободное от столкновений с препятствиями движение системы к точке экстремума функции качества. Представленный класс управлений обобщает некоторые известные результаты и позволяет генерировать новые управления с разнообразными свойствами. Также показано, что использование безградиентных алгоритмов управления в задачах планирования движения с обходом препятствий позволяет избежать проблемы притяжения траекторий системы к нежелательному положению равновесия. Полученные результаты проиллюстрированы на нескольких примерах.

MSC: 34Н15; 93С40; 93С41; 70Q05.

*Ключевые слова:* безградиентные алгоритмы управления; задача обхода препятствий; планирование движения; поиск экстремума; навигационная функция; аппроксимация со скобками Ли.

### 1. Введение.

Задачи поиска экстремума, целью которых является стабилизация управляемой системы в точке минимума или максимума некоторой функции, возникают во многих областях науки и имеют разнообразные практические применения [9]. Классические подходы к решению таких задач используют градиентные методы синтеза управлений, для которых требуется вычисление производных функции качества. Однако такие подходы не применимы в случаях частично или полностью неизвестного аналитического выражения функции качества и неизвестной точки экстремума, то есть в ситуациях, когда градиент функции качества не может быть явно вычислен. В связи с этим важной проблемой является получение безградиентных алгоритмов управления, использующих только значения функции качества. Существуют различные подходы к решению этой задачи (см., например, [18, 6]). В частности, эффективным подходом является использование метода аппроксимаций со скобками Ли, с помощью которого получено несколько типов управлений [3, 14, 15] для задач поиска экстремума. В работах [6, 5] получено описание общего класса функций управления, который как включает результаты, полученные в вышеуказанных работах, так и позволяет генерировать новые управления

---

Автор выражает благодарность профессору А. Л. Зуеву за содержательные обсуждения.

с различными свойствами. В данной статье такие управления будут применены к задаче поиска экстремума в областях с препятствиями для широкого класса функций качества. Отметим, что большинство методов стабилизации и планирования движения с обходом препятствий основаны на использовании градиентных алгоритмов управления, как, например, в работах [1, 4, 7, 8, 13, 17, 20, 19, 23] и др. Задача поиска экстремума при наличии препятствий рассмотрена только для частного случая функции качества, заданной как квадрат расстояния до искомой точки [2, 12].

Статья построена следующим образом. В разделе 2 описана постановка задачи и приведены некоторые вспомогательные результаты. В разделе 3 представлен класс функций управления, решающих поставленную задачу. Полученные результаты проиллюстрированы на нескольких примерах в разделе 4.

## 2. Постановка задачи и вспомогательные результаты.

В данной статье рассматривается система управления, описываемая уравнением интегратора. Будет представлен новый класс функций управления, которые решают задачу поиска экстремума функции  $J$  при наличии ограничений (препятствий). Введем следующие обозначения:

$\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{\beta}_0 \leq 0\}$  – рабочее пространство с границей, заданной функцией  $\beta_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\partial\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{\beta}_0 = 0\}$ ;

$\mathcal{O}_j = \{x \in \mathcal{W} : \beta_j \leq 0\}$  – препятствие, функции  $\beta_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  определяют границы препятствий:  $\partial\mathcal{O}_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \beta_j = 0\}$ ,  $j = \overline{1, N}$ ,  $N \geq 1$ ;

$D = \mathcal{W} \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{O}_j$  – свободное от препятствий пространство (см. [8]).

Предположим, что функция  $J$  является строго выпуклой, и пусть  $x^* \in \mathcal{W}$  удовлетворяет свойствам

$$J(x) > J^* = J(x^*) \text{ для всех } x \neq x^*, \beta_j(x^*) > 0, \quad j = \overline{0, N},$$

где  $\beta_0(x) = -\tilde{\beta}_0(x)$ .

Необходимо *построить такое управление*  $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ , *что траектории*  $x(t)$  *системы*  $\dot{x} = u$  *с начальными значениями*  $x(0) = x^0$  ( $\beta_j(x^0) > 0$ ) *удовлетворяют следующим условиям:*

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow x^* \text{ при } t \rightarrow +\infty, \\ \beta_j(x(t)) &> 0 \text{ для всех } t \in [0, +\infty), j = \overline{0, N}. \end{aligned} \tag{1}$$

Отметим, что аналитические выражения функций  $J, \beta_j$  и значения  $x^*, J^*$  могут быть неизвестны, но известны значения функций  $J(x), \beta_j(x)$  для каждого  $x \in \mathbb{R}^n$ . Таким образом, необходимо построить управление  $u = u(t, J(x), \beta_0(x), \dots, \beta_N(x))$ , использующее только значения функций  $J(x), \beta_j(x)$ , с которым траектории системы стремились бы к точке минимума функции  $J(x)$ , оставаясь при этом в свободном от препятствий пространстве.

Будем рассматривать сферическое рабочее пространство и препятствия:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{\beta}_0(x) = \|x\|^2 - r_0^2 \leq 0\}, \\ \mathcal{O}_j &= \{x \in \mathbb{R}^n : \beta_j(x) = \|x - x_o^j\|^2 - r_j^2 \leq 0\}, \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $r_0, r_j > 0$  обозначают радиусы соответствующих сфер,  $x_o^j \in \mathbb{R}^n$  – центр  $j$ -го препятствия. Предполагается, что препятствия не пересекаются,  $\overline{\mathcal{O}_i} \subset \text{int } \mathcal{W}$ ,  $\overline{\mathcal{O}_i} \cap \overline{\mathcal{O}_j} = \emptyset$  для всех  $i \neq j$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ , то есть

$$\|x_o^j\| + r_j < r_0, \quad \|x_o^j - x_o^l\| > r_j + r_l, \quad j, l = \overline{1, N}, \quad (3)$$

Для обеспечения движения системы в свободном от препятствий пространстве будет использован метод навигационных функций.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ [8].** Пусть  $D \subset \mathbb{R}^n$  является компактным связным аналитическим многообразием с краем. Отображение  $\varphi_\mu : D \rightarrow [0, 1]$  называется *навигационной функцией* в  $D$ , если оно обладает следующими свойствами:

- дифференцируемость:  $\varphi_\mu \in C^2(D; [0, 1])$ ;
- полярность в  $x^*$ :  $\varphi_\mu$  имеет единственный минимум в  $x^* \in \text{int } D$ ;
- морсовость в  $D$ : все критические точки  $\varphi_\mu$  в  $D$  являются невырожденными;
- допустимость:  $\partial D = \varphi_\mu^{-1}(1)$ .

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.1 [13].** Пусть пространство  $\mathcal{W}$  и множества  $\mathcal{O}_j$  имеют вид (2), выполнено условие (3),  $D$  является свободным от препятствий пространством, то есть  $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \beta(x) = \prod_{j=0}^N \beta_j(x) \geq 0\}$ , и пусть функция  $\varphi_\mu : D \rightarrow [0, 1]$  определены следующим образом:

$$\varphi_\mu(x) = \frac{J(x)}{(J^\mu(x) + \beta(x))^{1/\mu}}, \quad \mu > 0. \quad (4)$$

Предположим, что  $J \in C^2(D; \mathbb{R}^n)$  является строго выпуклой функцией, собственные значения матрицы  $\left(\frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$  содержатся в интервале  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  ( $\lambda_{\min} > 0$ ),  $x^* = \arg \min_x J(x) \in \text{int } D$ ,  $J(x^*) \geq 0$ . Предположим также, что

$$\lambda_{\max}/\lambda_{\min} < 1 + \min_{i=\overline{1, N}} \frac{1}{r_i} \|x_o^i - x^*\|.$$

Тогда для любого  $\Delta > 0$  существует такая константа  $\bar{\mu}(\Delta)$ , что для всех  $\mu > \bar{\mu}(\Delta)$  функция  $\varphi_\mu$  является навигационной функцией с минимумом в точке  $\bar{x}$ , где  $\|\bar{x} - x^*\| < \Delta$ . Кроме того, если  $J(x^*) = 0$  или  $\nabla \beta(x^*) = 0$ , то  $\bar{x} = x^*$ .

Таким образом, можно показать (см. например [13]), что если функция  $\varphi_\mu(x)$  удовлетворяет условиям теоремы с достаточно большим  $\mu > 0$ , то траектории системы

$$\dot{x}(t) = -\nabla \varphi_\mu(x(t)), \quad 0 \leq t < t^* \leq +\infty \quad (5)$$

при почти всех начальных условиях  $x(0) = x^0 \in \text{int } D$  стремятся асимптотически к бесконечно малой окрестности точки минимума функции  $J(x)$ , оставаясь при этом в свободном от препятствий пространстве  $D$ . Однако аналитические выражения функций  $J, \beta_j$  могут быть неизвестными, поэтому важной задачей является построение управляющих алгоритмов, которые зависят только от значений этих функций и не используют их производные (и, соответственно, производные навигационной функции  $\varphi_\mu$ ). В этой статье будет представлен класс *безградиентных* управляющих алгоритмов, решающих такую задачу путем аппроксимации траекторий системы (5).

Одним из основных подходов к решению задачи поиска экстремума является метод аппроксимаций со скобками Ли (см., например, [3]). В статьях [5, 6] предложено развитие этого подхода на основании методов стабилизации и планирования движения неголономных систем, используемых, например, в [21, 22, 24]. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{\ell} f_i(x) u_i(t), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f_i : D \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Обозначим производную Ли как  $L_{f_j} f_i(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f_i(x + s f_j(x)) - f_i(x)}{s}$ .

**Лемма 2.1 [6].** *Предположим, что векторные  $f_i$  удовлетворяют условию Липшица в области  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  и  $f_i \in C^2(D \setminus \Xi; \mathbb{R})$ , где  $\Xi = \{x \in D : f_i(x) = 0 \text{ для всех } 1 \leq i \leq \ell\}$ . Предположим также, что  $L_{f_j} f_i, L_{f_l} L_{f_j} f_i \in C(D; \mathbb{R}^n)$ , для всех  $i, j, l = \overline{1, \ell}$ . Если  $x(t) \in D, t \in [0, \tau]$ , является решением системы (6) с  $u \in C([0, \tau]; \mathbb{R}^m)$  и  $x(0) = x^0 \in D$ , то  $x(t)$  представимо в виде ряда Вольтерры следующим образом:*

$$x(t) = x^0 + \sum_{i=1}^{\ell} f_i(x^0) \int_0^t u_i(v) dv + \sum_{i,j=1}^{\ell} L_{f_j} f_i(x^0) \int_0^t \int_0^v u_i(v) u_j(s) ds dv + R(t), \quad t \in [0, \tau], \quad (7)$$

где

$$R(t) = \sum_{i,j,l=1}^{\ell} \int_0^t \int_0^v \int_0^s L_{f_l} L_{f_j} f_i(x(p)) u_i(v) u_j(s) u_l(p) dp ds dv$$

является остаточным членом ряда Вольтерры.

Отметим, что в отличие от других работ, использующих ряды Вольтерры (например, [10, 21]), лемма 2.1 позволяет разложить в ряд Вольтерры решения системы, векторные поля которой могут не являться непрерывно дифференцируемыми. Будем использовать также следующий результат.

**Лемма 2.2 [6, 21].** *Пусть  $D \subseteq \mathbb{R}^n, x^* \in D$ , и пусть  $x(t) \in D, 0 \leq t \leq \tau$ , является решением системы (6). Предположим, что существует такие константы  $M, L > 0$ , что*

$$\|f_i(x)\| \leq M, \quad \|f_i(x) - f_i(y)\| \leq L \|x - y\|,$$

для всех  $x, y \in D$ ,  $i = \overline{1, \ell}$ . Тогда

$$\|x(t) - x(0)\| \leq \frac{1}{L} \max_{1 \leq i \leq n} f_i(x(0))(e^{\nu Lt} - 1) \leq \frac{M}{L}(e^{\nu Lt} - 1), \quad t \in [0, \tau], \quad (8)$$

$$c \nu = \max_{t \in [0, \tau]} \sum_{i=1}^{\ell} |u_i(t)|.$$

### 3. Основные результаты.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{2n} (g_i \circ \varphi_\mu)(x) u_i^\varepsilon(t) e_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (9)$$

где  $e_i$  – единичный вектор в  $\mathbb{R}^n$  с ненулевой  $i$ -ой компонентой при  $i \leq n$ , и ненулевой  $(i - n)$ -ой компонентой при  $n + 1 \leq i \leq 2n$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $k_i \in \mathbb{N}$ ,  $k_i \neq k_j$  для всех  $i \neq j$ ,

$$u_i^\varepsilon(t) = \begin{cases} 2\sqrt{\pi k_i \varepsilon^{-1}} \cos(2\pi k_i t \varepsilon^{-1}), & \text{для всех } i = \overline{1, n}, \\ 2\sqrt{\pi k_{i-n} \varepsilon^{-1}} \sin(2\pi k_{i-n} t \varepsilon^{-1}), & \text{для всех } i = \overline{n+1, 2n}, \end{cases} \quad (10)$$

и функция  $\varphi_\mu$  задана формулой (4). В следующей теореме сформулированы условия, при которых траектории системы (9) обладают свойствами (1).

**Теорема 3.1.** *Предположим, что функция  $J \in C^2(D; \mathbb{R})$  удовлетворяет условиям теоремы 2.1 с  $x^* \in \text{int} D$ ,  $J(x^*) = 0$ , и пусть дана такая константа  $\mu > 0$ , что функция  $\varphi_\mu$ , заданная формулой (4), является навигационной функцией с минимумом в  $x^* \in \text{int} D$ . Пусть функции  $g_i$  связаны соотношениями*

$$g_{i+n}(z) = -\alpha g_i(z) \int \frac{dz}{g_i(z)^2}, \quad \alpha > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

и выполнены следующие условия:

C1.1 функции  $g_i \circ \varphi_\mu \in C^2(D \setminus x^*; \mathbb{R})$ , функции  $L_{g_j} g_i \circ \varphi_\mu$ ,  $L_{g_l} L_{g_j} g_i \circ \varphi_\mu \in C(D; \mathbb{R})$ , для всех  $i, j, l = \overline{1, 2n}$ ;

C1.2 функции  $g_i \circ \varphi_\mu$  удовлетворяют условию Липшица на любом компакте  $\chi \subset D$ , и  $g_i \circ \varphi_\mu(x) = 0 \iff x = x^*$ ;

C1.3 существует такое  $H \geq 0$ , что  $\sum_{i,j,l=1}^{2n} \|L_{g_l} L_{g_j} g_i \circ \varphi_\mu(x)\| \leq H \|\nabla \varphi_\mu(x)\|$  для всех  $x \in D$ .

Тогда существует такое  $\varepsilon > 0$ , что все решения системы (9) с функциями  $u_i^\varepsilon(t)$ , заданными формулой (10), и начальными условиями  $x(0) = x^0 \in \text{int} D$  корректно определены для всех  $t \in [0, +\infty)$  и обладают свойствами (1):

$$\begin{aligned} x(t) &\in \text{int} D \quad \text{для всех } t \geq 0, \\ x(t) &\rightarrow x^* \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Пусть  $x^0 \in \text{int } D$ . Определим  $\varepsilon_0 > 0$  таким образом, чтобы соответствующие решения  $x(t)$  системы (9) с функциями  $u_i^\varepsilon(t)$ , заданными формулой (10), были корректно определены для всех  $t \in [0, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ . Обозначим  $D_0 = \mathcal{L}_{\varphi_\mu(x^0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_\mu(x) \leq \varphi_\mu(x^0)\} \subset D$ ,  $d_0 = \rho(D_0, \partial D) > 0$ ,  $d_1 \in (0, d_0)$ ,  $M_g = \sup_{\substack{x \in D \\ 1 \leq i \leq 2n}} |g_i \circ \varphi_\mu(x)|$ ,

$$\nu = \max_t \sum_{i=1}^{2n} |u_i^\varepsilon(t)| = 2\sqrt{2\pi}\varepsilon^{-1/2} \sum_{i=1}^n \sqrt{k_i}, \quad (12)$$

и положим

$$0 < \varepsilon_0 < \left(2\sqrt{2\pi}L \sum_{i=1}^n \sqrt{k_i}\right)^{-2} \ln^2 \left(\frac{Ld_1}{M_g} + 1\right). \quad (13)$$

Тогда из леммы 2.2 следует, что  $\|x(t) - x^0\| < d_1$ , для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ,  $t \in [0, \varepsilon]$ , т.е.  $x(t) \in D$  для всех  $t \in [0, \varepsilon]$ .

Используя лемму 2.1, запишем разложение в ряд Вольтерры решений системы (9) с управлениями  $u_i^\varepsilon(t)$ , заданными формулой (10):

$$\begin{aligned} x(\varepsilon) &= x^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [g_i e_i, g_{i+n} e_i] \circ \varphi_\mu(x^0) \int_0^\varepsilon \int_0^\tau (u_{i+n}(\tau)u_i(\theta) - u_i(\tau)u_{i+n}(\theta)) d\theta d\tau + R(\varepsilon) \\ &= x^0 - \varepsilon \alpha \nabla \varphi_\mu(x^0) + R(\varepsilon), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $R(\varepsilon)$  – остаточный член ряда Вольтерры,

$$R(\varepsilon) = \sum_{i,j,l=1}^{2n} \int_0^\varepsilon \int_0^v \int_0^s L_{g_l} L_{g_j} g_i \circ \varphi_\mu(x(p)) u_i(v) u_j(s) u_l(p) dp ds dv. \quad (15)$$

Из условия C1.3 и оценки (12) следует, что

$$\|R(\varepsilon)\| \leq \frac{H\nu^3 \varepsilon^3}{6} \|\nabla \varphi_\mu(x)\| = H_R \varepsilon^{3/2} \|\nabla \varphi_\mu(x)\|, \quad (16)$$

с  $H_R = \frac{8}{3} H \pi \sqrt{2\pi} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{k_i}\right)^3$ . Применим к функции  $\varphi_\mu(x(\varepsilon))$  формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(x(\varepsilon)) &= \varphi_\mu(x^0) + \langle \nabla \varphi_\mu^T(x^0), x(\varepsilon) - x^0 \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x^2} \Big|_\theta (x(\varepsilon) - x^0), x(\varepsilon) - x^0 \right\rangle \\ &\leq \varphi_\mu(x^0) - \varepsilon \alpha \left(1 - \frac{m_\varphi \varepsilon \alpha}{2}\right) \|\nabla \varphi_\mu(x^0)\|^2 \\ &\quad + (1 + m_\varphi \varepsilon \alpha) \|\nabla \varphi_\mu(x^0)\| \cdot \|R(\varepsilon)\| + \frac{m_\varphi}{2} \|R(\varepsilon)\|^2, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\|\theta - x^0\| \leq \|x(\varepsilon) - x^0\|$ ,  $m_\varphi = \sup_{x \in D} \left\| \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x^2} \right\|$ . Покажем, что существует такое  $\varepsilon_1 > 0$ , что

$$\left( (1 + \alpha m_\varphi \varepsilon) \|\nabla \varphi_\mu(x^0)\| + \frac{m_\varphi}{2} \|R(\varepsilon)\| \right) \|R(\varepsilon)\| < \alpha \varepsilon \left( 1 - \frac{\alpha m_\varphi \varepsilon}{2} \right) \|\nabla \varphi_\mu(x^0)\|^2, \quad (18)$$

для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$  и  $x^0 \in D$ :  $\nabla \varphi_\mu(x^0) \neq 0$ . Тогда из неравенства (17) будет следовать, что

$$\varphi_\mu(x(\varepsilon)) < \varphi_\mu(x^0). \quad (19)$$

Действительно, из оценки (16) следует, что

$$\begin{aligned} & \left( (1 + \alpha m_\varphi \varepsilon) \|\nabla \varphi_\mu(x^0)\| + \frac{m_\varphi}{2} \|R(\varepsilon)\| \right) \|R(\varepsilon)\| \\ & \leq \left( (1 + \alpha m_\varphi \varepsilon) + \frac{m_\varphi}{2} H_R \varepsilon^{3/2} \right) H_R \varepsilon^{3/2} \|\nabla \varphi_\mu(x^0)\|^2. \end{aligned}$$

Определяя  $\varepsilon_1 > 0$  из условия  $\frac{m_\varphi H_R^2}{2\alpha} \varepsilon_1^2 + \frac{m_\varphi}{2} \varepsilon_1 + \left( \frac{1}{\alpha} + m_\varphi \varepsilon_1 \right) H_2 \sqrt{\varepsilon_1} < 1$ , имеем, что неравенство (18) выполнено для всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ .

Таким образом, доказано, что  $\varphi_\mu(x(\varepsilon)) < \varphi_\mu(x^0)$  при условии, что  $\nabla \varphi_\mu(x^0) \neq 0$ . Итерируя полученное неравенство для всех  $x^0 \in D_0$ , получаем

$$\varphi_\mu(x((j+1)\varepsilon)) \leq \varphi_\mu(x(j\varepsilon)) \quad \text{для } j = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

и кроме того,  $x((j+1)\varepsilon) \in D_0$  для всех  $j = 0, 1, 2, \dots$  по построению  $D_0$ . Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$x^j = h(x^{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

где отображение  $h : D_0 \rightarrow D_0$  ставит в соответствие точке  $\xi \in D_0$  решение  $x(t)$ ,  $t \in [0, \varepsilon]$ , системы (9) с начальным условием  $x|_{t=0} = \xi$  и управлениями  $u^\varepsilon(t)$  заданными формулой (10); предполагается, что  $h(\xi) = \xi$  если  $(g_i \circ \varphi_\mu)(\xi) = 0$ . Можно показать, что  $x^j = x(j\varepsilon)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Как показано ранее,  $x(t)$  корректно определено на каждом интервале  $I_j = [\varepsilon j, \varepsilon(j+1))$  и  $x(t) \in \text{int } D$  для всех  $t \geq 0$ .

Из принципа инвариантности [11, 16], свойств отображения  $h$  и (20) следует, что

$$x^j \rightarrow S_0 \quad \text{при } j \rightarrow +\infty, \quad (22)$$

где  $S_0$  является наибольшим инвариантным подмножеством множества  $S = \{x \in D_0 : \nabla \varphi_\mu(x) = 0\}$  динамической системы (21). Из условия C1.2,  $S_0 = x^*$ , то есть

$$x^j = x(j\varepsilon) \rightarrow x^* \quad \text{при } j \rightarrow +\infty. \quad (23)$$

Для произвольного  $t \geq 0$  обозначим целую часть  $\frac{t}{\varepsilon}$  как  $t_{in}^\varepsilon$ . Отметим, что  $0 \leq t - t_{in}^\varepsilon \varepsilon < \varepsilon$ . Используя неравенство треугольника и лемму 2.2, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|x(t) - x^*\| &= \|x(t) - x(t_{in}^\varepsilon \varepsilon) + x(t_{in}^\varepsilon \varepsilon) - x^*\| \leq \|x(t_{in}^\varepsilon \varepsilon) - x^*\| + \|x(t) - x(t_{in}^\varepsilon \varepsilon)\| \\ &\leq \|x(t_{in}^\varepsilon \varepsilon) - x^*\| + \frac{1}{L} \max_{1 \leq i \leq 2n} \|g_i \circ \varphi_\mu(x(t_{in}^\varepsilon \varepsilon))\| (e^{\nu L \varepsilon} - 1). \end{aligned}$$

Из С1.2 следует, что  $g_i \circ \varphi_\mu(x(t_{in}^\varepsilon)) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Принимая во внимание свойство (23), получаем  $x(t) \rightarrow x^*$  при  $t \rightarrow +\infty$ .  $\square$

Отметим, что для доказательства теоремы важными являются условия С1.2 и С1.3, которые, однако, сужают класс допустимых функций  $g_i$  и  $J$ . Подобно подходу статьи [6], при отсутствии этих условий можно показать, что траектории системы (9) с функциями  $u_i^\varepsilon(t)$ , заданными формулой (10), стремятся к некоторой окрестности множества критических точек  $S$ , радиус которой уменьшается с ростом  $\varepsilon$ . Этот результат сформулирован в следующей теореме.

**Теорема 3.2.** *Предположим, что функция  $J \in C^2(D; \mathbb{R})$  удовлетворяет условиям теоремы 2.1 с  $x^* \in \text{int}D$ , навигационная функция  $\varphi_\mu$  задана формулой (4) с некоторым  $\mu > 0$ . Пусть функции  $g_i$  связаны соотношениями (11) и удовлетворяют условию*

*С2.1 функции  $g_i \circ \varphi_\mu \in C^2(D \setminus S; \mathbb{R})$ , где  $S = \{x \in D_0 : \nabla \varphi_\mu(x) = 0\}$ ,  $D_0 = \mathcal{L}_{\varphi_\mu(x^0)} = \{x \in D : \varphi_\mu(x) \leq \varphi_\mu(x^0)\}$ , функции  $L_{g_j} g_i \circ \varphi_\mu$ ,  $L_{g_l} L_{g_j} g_i \circ \varphi_\mu \in C(D; \mathbb{R})$ , для всех  $i, j, l = \overline{1, 2n}$ ;*

*Тогда для каждого  $\eta > 0$  такого, что  $\mathcal{L}_\eta = \{x \in D_0 : \varphi_\mu(x) \leq \eta\} \supset S$  существуют такие  $\varepsilon, T > 0$ , что все решения системы (9) с функциями  $u_i^\varepsilon(t)$ , заданными формулой (10), и начальными условиями  $x^0 \in \text{int}D$  корректно определены для всех  $t \in [0, +\infty)$  и обладают следующими свойствами:*

$$x(t) \in \text{int}D \text{ для всех } t \geq 0, \quad x(t) \in \mathcal{L}_\eta \text{ для всех } t \geq T.$$

*Доказательство.* Пусть  $x^0 \in \text{int}D$ . Аналогично доказательству теоремы 3.1, определим  $\varepsilon_0 > 0$  так, чтобы соответствующие решения  $x(t)$  системы (9) с управлениями  $u^\varepsilon(t)$  (10) были корректно определены для всех  $t \in [0, \varepsilon]$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ . Пусть дано такое  $\eta > 0$ , что  $S \subset \mathcal{L}_\eta$ , и пусть  $x^0 \in \text{int}D \setminus \mathcal{L}_\eta$  (случай  $x^0 \in \mathcal{L}_\eta$  будет рассмотрен позднее). Зафиксируем  $\eta_0, \eta_{\min}$  так, чтобы  $S \subset \mathcal{L}_{\eta_{\min}/2} \subset \mathcal{L}_{\eta_{\min}} \subset \mathcal{L}_{\eta_0} \subset \mathcal{L}_\eta$ , и положим  $\tilde{d} = \min\{\rho(\mathcal{L}_{\eta_{\min}/2}, \mathcal{L}_{\eta_{\min}}), \rho(\mathcal{L}_{\eta_{\min}}, \mathcal{L}_{\eta_0}), \rho(\mathcal{L}_{\eta_0}, \mathcal{L}_\eta)\}$ ,

$$0 < \tilde{\varepsilon}_0 < \left(2\sqrt{2\pi}L \sum_{i=1}^n \sqrt{k_i}\right)^{-2} \ln^2 \left(\frac{L\tilde{d}_1}{M_g} + 1\right).$$

Тогда в силу леммы 2.2 справедливы следующие утверждения:

- P1) если  $x^0 \in \mathcal{L}_{\eta_0}$ , то  $x(t) \in \mathcal{L}_\eta$  для всех  $t \in [0, \varepsilon]$ ;
- P2) если  $x^0 \in D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}}$  то  $x^0 \in D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}/2}$  для всех  $t \in [0, \varepsilon]$ .
- P3) если  $x^0 \in \mathcal{L}_{\eta_{\min}}$  то  $x^0 \in \mathcal{L}_{\eta_0}$  для всех  $t \in [0, \varepsilon]$ .

Из С2.1, P2) и леммы 2.1 следует, что представление (14) справедливо для всех  $x^0 \in \text{int}D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}}$ . Кроме того, справедлива следующая оценка остаточного члена  $R(\varepsilon)$ :

$$\|R(\varepsilon)\| \leq \frac{H\nu^3\varepsilon^3}{6} \|\nabla \varphi_\mu(x)\| = \tilde{H}_R \varepsilon^{3/2},$$



с  $\tilde{H}_R = \frac{8}{3}H\pi\sqrt{2\pi}\left(\sum_{i=1}^n\sqrt{k_i}\right)^3 \sup_{x \in D} \|\nabla\varphi_\mu(x)\|$ . Аналогично (17), имеем

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(x(\varepsilon)) \leq & \varphi_\mu(x^0) - \varepsilon\alpha\left(1 - \frac{\alpha m_\varphi \varepsilon}{2}\right) \|\nabla\varphi_\mu(x^0)\|^2 \\ & - (1 + \alpha m_\varphi \varepsilon) \|\nabla\varphi_\mu(x^0)\| \tilde{H}_R \sqrt{\varepsilon} - \frac{m_\varphi}{2} \tilde{H}_R^2 \varepsilon^2. \end{aligned}$$

В силу непрерывности  $\nabla\varphi_\mu(x)$ , существуют такие  $\lambda_1, \lambda_2$ , что

$$0 < \lambda_1 \leq \|\nabla\varphi_\mu(x^0)\| \leq \lambda_2 \text{ для всех } x^0 \in \overline{D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}/2}}.$$

Тогда

$\varphi_\mu(x(\varepsilon)) \leq \varphi_\mu(x^0) - \varepsilon\alpha\left(\left(1 - \frac{\alpha m_\varphi \varepsilon}{2}\right)\lambda_1^2 - (1 + \alpha m_\varphi \varepsilon)\lambda_2\tilde{H}_R\sqrt{\varepsilon} - \frac{m_\varphi}{2}\tilde{H}_R^2\varepsilon^2\right)$ . Определяя  $\tilde{\varepsilon}_1 > 0$  из условия

$$\frac{m_\varphi}{2\alpha\lambda_1^2}\tilde{H}_R^2\tilde{\varepsilon}_1^2 + \frac{m_\varphi\tilde{\varepsilon}_1}{2} + \left(\frac{1}{\alpha} + m_\varphi\tilde{\varepsilon}_1\right)\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}\tilde{H}_R\sqrt{\tilde{\varepsilon}_1} < 1,$$

имеем, что для всех  $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_1]$  решения системы (9) с функциями  $u_i^\varepsilon$ , заданными формулой (10) и начальными условиями  $x^0 \in \text{int } D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}}$  обладают свойством  $\varphi_\mu(x(\varepsilon)) < \varphi_\mu(x^0)$ .

Итерируя полученное неравенство для  $x^0 \in \text{int } D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}}$ , в силу непрерывности функции  $\varphi_\mu$  получаем, что существует такое  $N \geq 0$ , что

$$x(j\varepsilon) \in D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}} \text{ для всех } j = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad x(N\varepsilon) \in \mathcal{L}_{\eta_{\min}}.$$

В силу P2,  $x(j\varepsilon) \in D \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}/2}$  для  $j = 0, 1, 2, \dots, N$ . Таким образом, представление (14) остается справедливым для всех  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Кроме того, в силу P3,  $x(t) \in \mathcal{L}_{\eta_0}$  для всех  $t \in [N\varepsilon; (N+1)\varepsilon]$ . Возможны два случая:

i)  $x((N+1)\varepsilon) \in \mathcal{L}_{\eta_0} \setminus \mathcal{L}_{\eta_{\min}}$ . Повторяя предыдущие рассуждения, приходим к выводу, что  $x(t) \in \mathcal{L}_\eta$  для всех  $t \in [(N+1)\varepsilon; (N+2)\varepsilon]$ . Кроме того,  $\varphi_\mu((N+2)\varepsilon) \leq \varphi_\mu((N+1)\varepsilon)$ , следовательно,  $x((N+2)\varepsilon) \in \mathcal{L}_{\eta_0}$ .

ii)  $x((N+1)\varepsilon) \in \mathcal{L}_{\eta_{\min}}$ . Тогда из P3 следует, что  $x(t) \in \mathcal{L}_{\eta_0}$  для всех  $t \in [(N+1)\varepsilon; (N+2)\varepsilon]$ .

Таким образом, в обоих случаях  $x(t) \in \mathcal{L}_\eta$  для всех  $t \in [(N+1)\varepsilon; (N+2)\varepsilon]$ , и  $x((N+2)\varepsilon) \in \mathcal{L}_{\eta_0}$ . Итерируя i), ii), приходим к выводу, что  $x(t) \in \mathcal{L}_\eta$  для всех  $t \geq (N+1)\varepsilon$ .  $\square$

#### 4. Примеры.

Пусть  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 3.5\}$ ,  $J(x) = (x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2$ ,  $x^* \in W$ . Тогда система (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2\sqrt{\pi k_1 \varepsilon^{-1}} \left( g_1 \circ \varphi_\mu(x) \cos(2\pi k_1 \varepsilon^{-1} t) + g_3 \circ \varphi_\mu(x) \sin(2\pi k_1 \varepsilon^{-1} t) \right), \\ \dot{x}_2 &= 2\sqrt{\pi k_2 \varepsilon^{-1}} \left( g_2 \circ \varphi_\mu(x) \cos(2\pi k_2 \varepsilon^{-1} t) + g_4 \circ \varphi_\mu(x) \sin(2\pi k_2 \varepsilon^{-1} t) \right). \end{aligned} \tag{24}$$

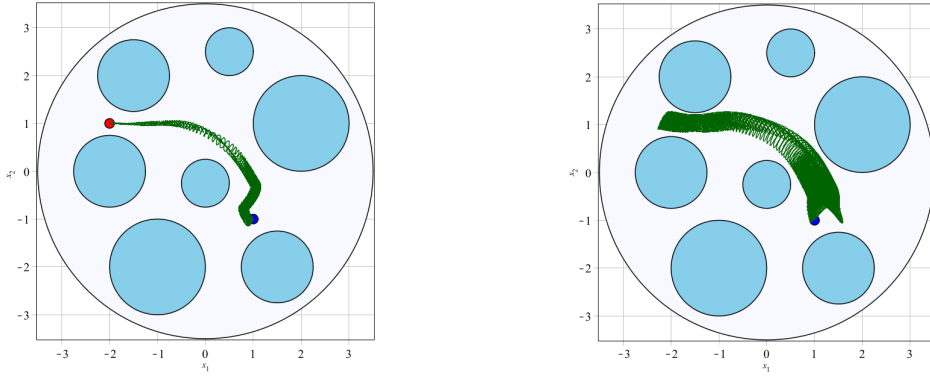


Рис. 1. Графики траекторий системы (24) с функциями  $g_i$  вида (25) (слева) и (26) (справа),  $x^0 = (1, 1)^T$ ,  $x^* = (-2, 1)^T$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\mu = 5$ .

Для всех примеров полагаем  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ . На рисунке 1 (слева) приведен график траектории системы (24) в пространстве с семью препятствиями, с функциями

$$\begin{aligned} g_1(z) = g_2(z) &= \sqrt{\frac{1-e^{-z}}{1+e^{z}}} \sin(e^{z} + 2 \ln(e^{z} - 1)), \\ g_3(z) = g_4(z) &= \sqrt{\frac{1-e^{-z}}{1+e^{z}}} \cos(e^{z} + 2 \ln(e^{z} - 1)). \end{aligned} \tag{25}$$

В рассмотренном случае функции  $g_i$  удовлетворяют условиям теоремы 3.1, что обеспечивает затухание колебаний траекторий системы при приближении к  $x^*$ . Для сравнения рассмотрим управления, аналогичные предложенным в [14], то есть возьмем

$$g_1(z) = g_2(z) = \sin(z), \quad g_3(z) = g_4(z) = \cos(z). \tag{26}$$

Поскольку  $g_1, g_2 \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x^*$ , такие управления обеспечивают притяжение траекторий системы только к некоторой окрестности  $x^*$ , см. рис. 1 (справа). Следует также отметить, что использование градиентных управлений позволяет избежать проблемы нежелательных положений равновесия, возникающих в следствии наличия отличных от  $x^*$  точек, в которых  $\nabla \phi_\mu(x) = 0$  при определенном расположении препятствий (например, в случае симметричного расположения препятствий относительно прямой, соединяющей  $x^0$  и  $x^*$ ). На рисунке 2 приведены графики траекторий системы (24) и системы (5) с градиентным алгоритмом управления, иллюстрирующие это свойство.

Теоремы 3.1–3.2 доказаны в предположении, что потенциальная функция удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Отметим, что, как описывается, например, в [13], не всегда возможно построить навигационную функцию вида (4). Кроме того, время, за которое траектории системы с управлением, использующим функции ви-

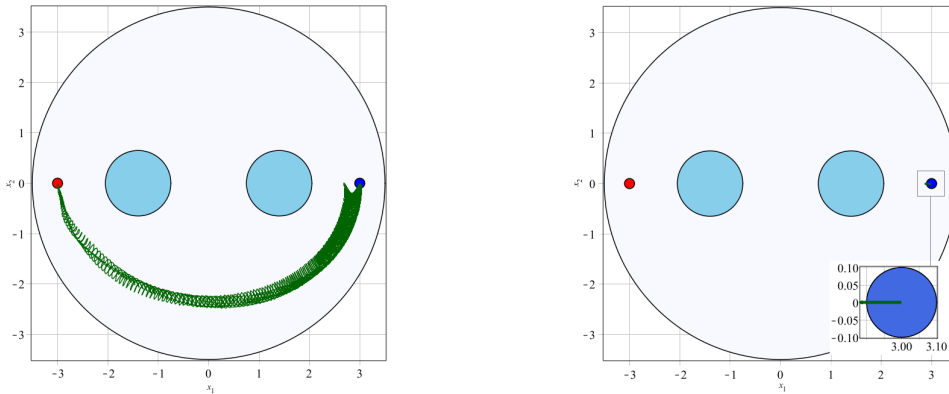


Рис. 2. Графики траекторий системы (24) с функциями  $g_i$  вида (25) (слева) и системы (5) (справа),  $x^0 = (3, 0)^T$ ,  $x^* = (-3, 0)^T$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 2$ .

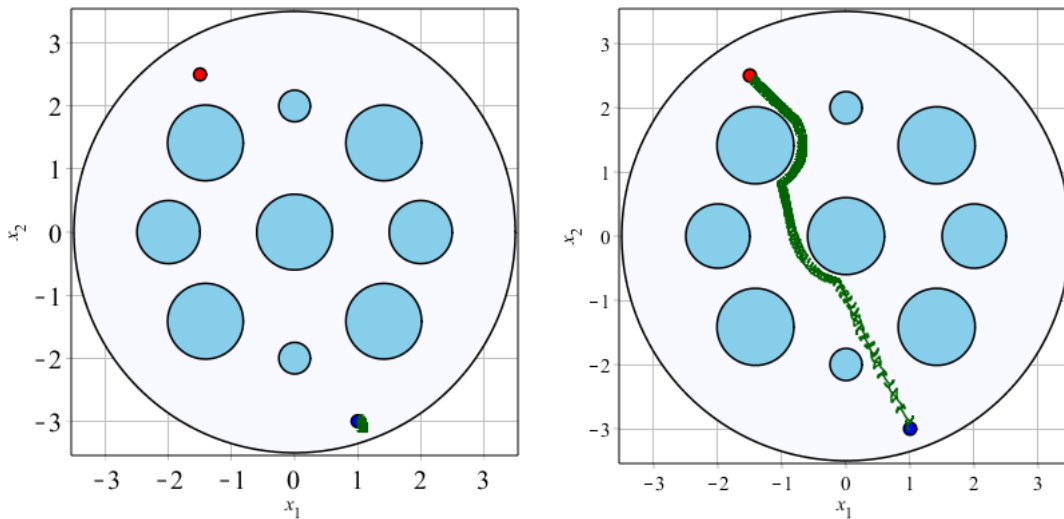


Рис. 3. Графики траекторий системы (24) функциями  $g_i$  вида (26),  $x^0 = (-3, 1)^T$ ,  $x^* = (-1.5, 2.5)^T$ ,  $\varepsilon = 0.025$ . Слева: с функциями  $g_i \circ \varphi_\mu$ ,  $\varphi_\mu$  задана формулой (4),  $\mu = 2$ ,  $t \in [0, 1000]$ ; справа: с функциями  $g_i \circ P_\alpha$ ,  $P_\alpha$  задана формулой (27),  $\alpha = 20$ ,  $t \in [0, 10]$ .

да (4), достигают заданной окрестности  $x^*$ , значительно возрастает с увеличением количества препятствий. В таких случаях целесообразным является использование других потенциальных функций, поэтому дальнейший интерес представляет обобщение предложенного в статье подхода на более широкие классы потенциальных функций. Для примера, на рис. 3 показаны графики траекторий системы (24)

в пространстве с девятью препятствиями при использовании навигационной функции вида (4) и потенциальной функции, предложенной в [7, 19]:

$$P_\alpha(x) = J(x) \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta(x)} \right), \alpha > 0. \quad (27)$$

## 5. Выводы.

В данной статье представлен новый класс безградиентных алгоритмов управления для задачи планирования движения с обходом препятствий. С одной стороны, полученные результаты позволяют гарантировать свободное от столкновений с препятствиями движение системы к точке экстремума для широкого класса функций качества. С другой стороны, использование безградиентных алгоритмов планирования движения системы с обходом препятствий позволяет получить более простые формулы для функций управления. Кроме того, такие управления используют только значения функции качества и расстояния до препятствий, и могут быть использованы в случаях неизвестного расположения и формы препятствий.

### Цитированная литература

1. *Dimarogonas D.V., Loizou S.G., Kyriakopoulos K.J., Zavlanos M.M.* A feedback stabilization and collision avoidance scheme for multiple independent non-point agents // *Automatica*. – 2005. – Vol. 42, No. 2. – P. 229–243.
2. *Dürr H.-B., Stanković M. S., Dimarogonas D.V., Ebenbauer C., Johansson K. H.* Obstacle avoidance for an extremum seeking system using a navigation function // *Proc. of 2013 American Control Conference*. – 2013. – P. 4062–4067.
3. *Dürr H.-B., Stanković M. S., Ebenbauer C., Johansson K. H.* Lie Bracket Approximation of Extremum Seeking Systems // *Automatica*. – 2013. – Vol. 49. – P. 1538–1552.
4. *Ge S.S., Cui Y.J.* Dynamic motion planning for mobile robots using potential field method // *Autonomous Robots*. – 2001. – Vol. 13, No. 3. – P. 207–222.
5. *Grushkovskaya V., Michalowsky S., Zuyev A., May M., Ebenbauer C.* A family of extremum seeking laws for a unicycle model with a moving target: theoretical and experimental studies // *Proc. of 17th annual European Control Conference*. – 2018. – 6 p. (to appear).
6. *Grushkovskaya V., Zuyev A., Ebenbauer C.* On a class of generating vector fields for the extremum seeking problem: Lie bracket approximation and stability properties // *Automatica*. – 2018. – Vol. 94. – P. 151–160.
7. *Khatib O.* Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots // *The International Journal of Robotics Research*. – 1986. – Vol. 5, No. 1. P. 90–98.
8. *Koditschek D.E., Rimon E.* Robot navigation functions on manifolds with boundary // *Advances in applied mathematic*. – 1990. – Vol. 11, No. 4. – P. 412–442.
9. *Krstić M., Ariyur K.B.* Real-Time optimization by Extremum Seeking Control. – Wiley-Interscience, 2003.
10. *Lamnabhi-Lagarigue F.* Volterra and Fliess series expansions for nonlinear systems. In W. S. Levine, editor, *The Control Handbook*. – 1995. – P. 879–888.
11. *LaSalle J.P.* The stability and control of discrete processes. – Springer Science & Business Media, 2012.
12. *Montenbruck J.M., Dürr H.-B., Ebenbauer C., Allgöwer F.* Extremum seeking and obstacle avoidance on the special orthogonal group // *IFAC Proceedings Volumes*. – 2014. – Vol. 47, No. 3. – P. 8229–8234.

13. *Paternain S., Koditschek D.E., Ribeiro A.* Navigation functions for convex potentials in a space with convex obstacles // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2017.
14. *Scheinker A., Krstić M.* Extremum seeking with bounded update rates // Systems & Control Letters. – 2014. – Vol. 63. – P. 25–31.
15. *Scheinker A., Krstić M.* Non-C2 Lie bracket averaging for nonsmooth extremum seekers // Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. – 2014. – Vol. 136, No. 1. – P. 011010-1–011010-10.
16. *Sundarapandian V.* An invariance principle for discrete-time nonlinear systems // Applied Mathematics Letters. – 2003. – Vol. 16, No. 1. – P. 85–91.
17. *Tanner H.G., Loizou S.G., Kyriakopoulos K.J.* Nonholonomic stabilization with collision avoidance for mobile robots // IROS. – 2001. – P. 1220–1225.
18. *Tan Y., Moase W.H., Manzie C., Nešić D, Mareels I.* Extremum seeking from 1922 to 2010 // Proc. 29th Chinese Control Conf. – 2010. – P. 14–26.
19. *Vanualailaia J., Bibhya S., Nakagiri S.* An asymptotically stable collision-avoidance system // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2008. – Vol. 43. – P. 925–932.
20. *Urakubo T.* Stability analysis and control of nonholonomic systems with potential fields // Journal of Intelligent & Robotic Systems. – 2018. – Vol. 89, No. 1–2. – P. 121–137.
21. *Zuyev A.* Exponential stabilization of nonholonomic systems by means of oscillating controls // SIAM J. on Control and Optimization. – 2016. – Vol. 54, No. 3. – P. 1678–1696.
22. *Zuyev A., Grushkovskaya V.* Motion planning for control-affine systems satisfying low-order controllability conditions // International Journal of Control. – 2017. – Vol. 90, No. 11. – P. 2517–2537.
23. *Zuyev A., Grushkovskaya V.* Obstacle Avoidance Problem for Driftless Nonlinear Systems with Oscillating Controls // SIFAC-PapersOnLine. – 2017. – Vol. 50, No. 1. – P. 10476–10481.
24. *Zuyev A., Grushkovskaya V., Benner P.* Time-varying stabilization of a class of driftless systems satisfying second-order controllability conditions // Proc. of European Control Conference 2016. – 2016. – P. 575–580.

## References

1. *Dimarogonas, D.V., Loizou, S.G., Kyriakopoulos, K.J., Zavlanos, M.M.* (2005). A feedback stabilization and collision avoidance scheme for multiple independent non-point agents. *Automatica*, 42, No. 2, pp. 229–243.
2. *Dürr, H.-B., Stanković, M.S., Dimarogonas, D.V., Ebenbauer, C., Johansson, K.H.* (2013). Obstacle avoidance for an extremum seeking system using a navigation function. *Proc. of 2013 American Control Conference*, pp. 4062–4067.
3. *Dürr, H.-B., Stanković, M.S., Ebenbauer, C., Johansson, K.H.* (2013). Lie Bracket Approximation of Extremum Seeking Systems. *Automatica*, 49, pp. 1538–1552.
4. *Ge, S.S., Cui, Y.J.* (2001). Dynamic motion planning for mobile robots using potential field method. *Autonomous Robots*, 13, No. 3, pp. 207–222.
5. *Grushkovskaya, V., Michalowsky, S., Zuyev, A., May, M., Ebenbauer, C.* (2018). A family of extremum seeking laws for a unicycle model with a moving target: theoretical and experimental studies. *Proc. of European Control Conference 2018*, 6 p. (to appear).
6. *Grushkovskaya, V., Zuyev, A., Ebenbauer, C.* (2018). On a class of generating vector fields for the extremum seeking problem: Lie bracket approximation and stability properties. *Automatica*, 94, pp. 151–160.
7. *Khatib, O.* (1986). Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *The International Journal of Robotics Research*, 5, No. 1, pp. 90–98.
8. *Koditschek, D.E., Rimon, E.* (1990). Robot navigation functions on manifolds with boundary. *Advances in applied mathematics*, 11, No. 4, pp. 412–442.
9. *Krstić, M., Ariyur, K.B.* (2003). *Real-Time optimization by Extremum Seeking Control*. Wiley-Interscience.
10. *Lamnabhi-Lagarrique, F.* (1995). Volterra and Fliess series expansions for nonlinear systems. In W. S. Levine, editor, *The Control Handbook*, pp. 879–888.

11. LaSalle, J.P. (2012). The stability and control of discrete processes. Springer Science & Business Media.
12. Montenbruck, J.M., Dürr, H.-B., Ebenbauer, C., Allgöwer, F. (2014). Extremum seeking and obstacle avoidance on the special orthogonal group. IFAC Proceedings Volumes, 47, No. 3, pp. 8229–8234.
13. Paternain, S., Koditschek, D.E., Ribeiro, A. (2017). Navigation functions for convex potentials in a space with convex obstacles. IEEE Transactions on Automatic Control.
14. Scheinker, A., Krstić, M. (2014). Extremum seeking with bounded update rates. Systems & Control Letters, 63, pp. 25–31.
15. Scheinker, A., Krstić, M. (2014). Non-C2 Lie bracket averaging for nonsmooth extremum seekers. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 136, No. 1, pp. 011010-1–011010-10.
16. Sundarapandian, V. (2003). An invariance principle for discrete-time nonlinear systems. Applied Mathematics Letters, 16, No. 1, pp. 85–91.
17. Tanner, H.G., Loizou, S.G., Kyriakopoulos, K.J. (2001). Nonholonomic stabilization with collision avoidance for mobile robots. IROS, pp. 1220–1225.
18. Tan, Y., Moase, W.H., Manzie, C., Nešić, D., Mareels, I. (2010). Extremum seeking from 1922 to 2010. Proc. 29th Chinese Control Conf., pp. 14–26.
19. Vanualailaia, J., Bibhya, S., Nakagiri, S. (2008). An asymptotically stable collision-avoidance system. International Journal of Non-Linear Mechanics, 43, pp. 925–932.
20. Urakubo, T. (2018). Stability analysis and control of nonholonomic systems with potential fields. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 89, No. 1–2, pp. 121–137.
21. Zuyev, A. (2016). Exponential stabilization of nonholonomic systems by means of oscillating controls. SIAM J. on Control and Optimization, 54, No. 3, pp. 1678–1696.
22. Zuyev, A., Grushkovskaya, V. (2017). Motion planning for control-affine systems satisfying low-order controllability conditions. International Journal of Control, 90, No. 11, pp. 2517–2537.
23. Zuyev, A., Grushkovskaya, V. (2017). Obstacle Avoidance Problem for Driftless Nonlinear Systems with Oscillating Controls. IFAC-PapersOnLine, 50, No. 1, pp. 10476–10481.
24. Zuyev, A., Grushkovskaya, V., Benner, P. (2016). Time-varying stabilization of a class of driftless systems satisfying second-order controllability conditions. Proc. of European Control Conference 2016, pp. 575–580.

## V. V. Grushkovskaya

### Gradient-free control algorithms for motion planning with obstacle avoidance.

The paper studies the extremum seeking problem under the presence of constraints in the state space of a system. It is assumed that the analytical expression of the function as well as the locations and shapes of the obstacles may be partially or completely unknown. The main result of the paper provides a novel class of control functions for a system with integrator dynamics. The obtained controls ensure the motion of the system in a neighbourhood of the gradient flow of the corresponding navigation function by using only the values of the navigation function (but not its derivatives), and thus realize collision-free motion of the system to the extremum point of the cost function. The presented class of controls generalizes some known results and allows to construct new controls with variable properties. It is also shown that the use of gradient-free control algorithms in obstacle avoidance problems allows to avoid the problem of attraction of the trajectories to an undesirable equilibrium. The obtained results are illustrated with several examples.

**Keywords:** *gradient-free control algorithms; obstacle avoidance problem; motion planning; extremum seeking; navigation function; Lie brackets approximation.*

**В. В. Грушковська**

**Безградиентні алгоритми керування для задач планування руху з уникненням перешкод.**

У роботі досліджується задача пошуку екстремуму опуклої функції за наявності обмежень у просторі станів системи. Припускається, що аналітичний вираз функції, а також розташування та форма перешкод можуть бути частково або повністю невідомими. Основним результатом роботи є новий клас функцій керування для системи з динамікою інтегратора. Отримані керування реалізують рух системи в околі градієнтного потоку відповідної навігаційної функції, використовуючи лише її значення (але не похідні), і таким чином забезпечують вільний від зіткнень з перешкодами рух системи до точки екстремуму функції якості. Представлений клас керувань узагальнює деякі відомі результати і дозволяє генерувати нові керування з різноманітними властивостями. Також показано, що використання безградієнтних алгоритмів керування в задачах планування руху з обходом перешкод дозволяє уникнути проблеми притягання траєкторій системи до небажаного стану рівноваги. Отримані результати проілюстровано на декількох прикладах.

**Ключові слова:** безградиентні алгоритми керування; задача уникнення перешкод; планування руху; пошук екстремуму; навігаційна функція; апроксимація з дужками Лі.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск,  
Institute for Systems Theory and Automatic Control, University of  
Stuttgart, Germany  
*vi.grushkovskaya@gmail.com*

Получено 26.02.18