Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 4, 570 – 598

Точные константы в неравенствах типа Джексона для наилучшей среднеквадратичной аппроксимации в $L_2(\mathbb{R})$ и точные значения средних ν-поперечников классов функций

Сергей Б. Вакарчук

(*Представлена Р. М. Тригубом*)

Аннотация. На классах функций $L_2^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{Z}_+$, для характеристик гладкости $\Lambda_k(f,t) = \{(1/t)\int\limits_0^t \|\Delta_h^k(f)\|^2 dh\}^{1/2}$, $t \in (0,\infty)$; $k \in \mathbb{N}$, получены точные константы в неравенствах типа Джексона в случае наилучшей среднеквадратичной аппроксимации целыми функциями экспоненциального типа в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Также вычислены точные значения средних ν-поперечников классов функций, определенных при помощи $\Lambda_k(f)$ и мажорант Ψ, удовлетворяющих определенным условиям.

2010 MSC. 41A35, 41A44, 42A38, 30D20.

Ключевые слова и фразы. Целая функция, наилучшее среднеквадратичное приближение, характеристика гладкости функции, мажоранта, средний ν-поперечник.

1. Введение

Теория аппроксимации функций различными агрегатами — полиномами, сплайнами, целыми функциями, всплесками, линейными операторами и т.д. является одним из наиболее успешно развивающихся направлений современной математики, имеющим важное значение в различных ее областях. Относительно приближения функций, заданных на всей вещественной оси, отметим, что начало исследованиям в этом направлении заложено С. Н. Бернштейном в работе [1].

Статья поступила в редакцию 25.08.2016

ISSN 1810 – 3200.

При этом средством приближения служили целые функции конечного экспоненциального типа. К указанному пространству С. Н. Бернштейн пришел с помощью определенного предельного процесса по алгебраическим полиномам. В дальнейшем различные аспекты теории аппроксимации функций на вещественной оси целыми функциями экспоненциального типа нашли свое отражение в работах Н. И. Ахиезера, А. Ф. Тимана, М. Ф. Тимана, С. М. Никольского, И. И. Ибрагимова, Ф. Г. Насибова, В. Ю. Попова, А. Г. Бабенко, В. В. Арестова, А. И.Степанца, С. Я.Янченко и многих других (см., например, [2]–[17]). Перечень некоторых окончательных результатов, связанных с вычислением точных констант в неравенствах Джексона в случае среднеквадратичной аппроксимации целыми функциями экспоненциального типа можно найти, например, в статьях [10, 14, 17]. Что же касается решения аналогичной задачи для иных характеристик гладкости, отличных от классического модуля непрерывности, то здесь следует отметить результаты, полученные в работах [12–14,16]. Отметим, что в этом случае уже говорят о неравенствах типа Джексона.

Данное сообщение продолжает указанную тематику для характеристик гладкости, полученных путем осреднения квадратов норм конечных разностей функций. Напомним, что в 2π-периодическом случае подобные характеристики гладкости рассматривались Ласло Лейндлером, Р. М. Тригубом, К. В. Руновским, Н. П. Пустовойтовым и другими (см., например, [18]– [24]) в ходе решения ряда задач теории аппроксимации функций.

Пусть $L_2(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R} := \{x : -\infty < x < \infty\}$, есть пространство всех измеримых на вещественной оси функций f, квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу на любом конечном промежутке, а норма $\|f\| := \{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\}^{1/2} < \infty$. Для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ почти всюду на $\mathbb{R}$ существует конечная разность k-го порядка $\Delta_h^k(f,x) := \sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+jh)$, где $h \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим следующую характеристику гладкости:

$$\Lambda_k(f,t) := \left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \|\Delta_h^k(f)\|^2 dh\right\}^{1/2}, \tag{1.1}$$

где $t > 0$. Из сравнения величины (1.1) с обычным модулем непрерывности k-го порядка $\omega_k(f,t) := \sup\{\|\Delta_h^k(f)\| : |h| \leqslant t\}$ следует, что $\Lambda_k(f,t) \leqslant \omega_k(f,t)$ для любого $t > 0$. Отметим, что в 2π-периодическом случае свойства $\Lambda_k(f)$ были рассмотрены в работе [24].

К характеристике гладкости (1.1) также можно прийти естественным путем, если рассмотреть в $L_2(\mathbb{R})$ τ-модули гладкости k-го порядка, введенные Каменом Ивановым в статьях [25, 26] при решении ряда задач теории аппроксимации функций в весовых пространствах $L_{p,w}[a,b]$. Действительно, полагая, что весовая функция $w \equiv 1$ и $p = p' = 2$, согласно [25, 26] в $L_2(\mathbb{R})$ имеем $\tau_k(f,1;\lambda(x))_{2,2} = \|\omega_k(f,\cdot;\lambda(\cdot))_2\|$, где $\lambda(x)$ есть произвольная положительная функция,

$$\omega_k(f,x;\lambda(x))_2 = \Big\{\frac{1}{2\lambda(x)} \int\limits_{-\lambda(x)}^{\lambda(x)} |\Delta_h^k(f,x)|^2 dh\Big\}^{1/2}.$$

Полагая $\lambda(x) \equiv t$, где t — произвольная положительная константа, получаем

$$\tau_k^2(f,1;t)_{2,2} = \frac{1}{2t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-t}^{t} |\Delta_h^k(f,x)|^2 dh = \frac{1}{2t}\int\limits_{-t}^{t} \|\Delta_h^k(f)\|^2 dh. \qquad (1.2)$$

Поскольку

$$\|\Delta_h^k(f)\|^2 = 2^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1-\cos(hu))^k |\mathcal{F}(f,u)|^2 du, \qquad (1.3)$$

где $\mathcal{F}(f)$ — преобразование Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ (см., например, [17]), то $\|\Delta_h^k(f)\| = \|\Delta_{-h}^k(f)\|, h > 0$. С учетом этого из (1.1)–(1.2) имеем $\tau_k(f,1;t)_{2,2} = \Lambda_k(f,t)$, где $t > 0$.

Характеристика гладкости (1.1) для функций из $L_2(\mathbb{R})$ может быть получена и исходя из иных соображений. Пусть $D := (a,b)$, где a и b могут принимать не только конечные, но и бесконечные значения $-\infty$ и ∞ соответственно, т.е. интервал (a,b) может быть как конечным, так и бесконечным. В монографии З. Дитциана и В. Тотика [27, стр. 26] для функций $f \in L_p(D)$, $1 \leqslant p < \infty$, была рассмотрена следующая характеристика гладкости:

$$\overline{\omega}_{\varphi}^{*k}(f,t)_p = \Big\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \int\limits_D |\overline{\Delta}_{h\varphi(x)}^k f(x)|^p dx dh\Big\}^{1/p}, \qquad (1.4)$$

где $t > 0$. Определенная на множестве D функция φ является положительной и удовлетворяет ряду требований, изложенных в пункте 1.2 из [27]; $\overline{\Delta}_{h\varphi(x)}^k f(x)$ есть прямая или обратная конечная разность

k-го порядка функции f, которая существует почти всюду на D, т.е.

$$\overline{\Delta}^k_{h\varphi(x)} f(x) := \overrightarrow{\Delta}^k_{h\varphi(x)} f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(x + (k-j)h\varphi(x))$$

или

$$\overline{\Delta}^k_{h\varphi(x)} f(x) := \overleftarrow{\Delta}^k_{h\varphi(x)} f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(x - jh\varphi(x)).$$

При этом полагают $\overrightarrow{\Delta}^k_{h\varphi(x)} f(x) = 0$ или $\overleftarrow{\Delta}^k_{h\varphi(x)} f(x) = 0$, если отрезок $[x, x + kh\varphi(x)]$ или отрезок $[x - kh\varphi(x), x]$ соответственно не принадлежит множеству D. Если, например, в формуле (1.4) $D = (-\infty, \infty)$; $\widetilde{\varphi}(x) \equiv 1$; $p = 2$; $\overline{\Delta}^k_{h\widetilde{\varphi}(x)} f(x) = \overrightarrow{\Delta}^k_{h\widetilde{\varphi}(x)} f(x) = \Delta^k_h(f, x)$, то из соотношений (1.1) и (1.4) для $f \in L_2(\mathbb{R})$ получаем $\overline{\omega}^{*k}_{\widetilde{\varphi}}(f, t)_2 = \Lambda_k(f, t)$, $t > 0$.

Приведенное выше, с нашей точки зрения, подтверждает самодостаточность характеристики гладкости (1.1), которая может быть использована для изучения поведения точных констант в неравенствах типа Джексона. Исходя из этого, в следующих разделах данной статьи будут получены точные неравенства типа Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ и вычислены точные значения ряда средних ν-поперечников классов функций, определенных при помощи $\Lambda_k(f)$.

2. Наилучшее среднеквадратичное приближение целыми функциями экспоненциального типа на всей вещественной оси

Символом $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, где $0 < \sigma < \infty$, обозначим множество сужений на $\mathbb{R}$ всех целых функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{R})$. Для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ величину $\mathcal{A}_\sigma(f) := \inf\{\|f - g\| : g \in \mathbb{B}_{\sigma,2}\}$ называют наилучшим приближением f элементами подпространства $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$. Для любого класса $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ полагают $\mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{M}) := \sup\{\mathcal{A}_\sigma(f) : f \in \mathfrak{M}\}$. Введем следующее обозначение

$$\eta_k(t; u) := \frac{1}{t} \int_0^t (1 - \cos(hu))^k dh, \tag{2.1}$$

где $k \in \mathbb{N}$; $t \in (0, \infty)$; $u \in \mathbb{R}$. Отметим, что $\lim\limits_{t \to 0+} \eta_k(t; u) = 0$, а $\eta_k(t; 1)$, как функция от переменной t, изменяющейся на множестве $(0, \pi]$, является возрастающей, поскольку

$$\frac{d\eta_k(t;1)}{dt}=\frac{d}{dt}\Big\{\frac{1}{t}\int\limits_0^t(1-\cos h)^k dh\Big\}=\frac{1}{t}\Big\{(1-\cos t)^k-\frac{1}{t}\int\limits_0^t(1-\cos h)^k dh\Big\}$$

$$>\frac{1}{t}\Big\{(1-\cos t)^k-(1-\cos t)^k\Big\}=0.$$

Поскольку (см., например, [28, пункт 1.320, формула 1])

$$2^k(1-\cos(hu))^k=\Big(2\sin\Big(\frac{hu}{2}\Big)\Big)^k$$

$$=\binom{2k}{k}+2\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{2k}{j}\cos((k-j)hu)$$

$$=\binom{2k}{k}-2\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\binom{2k}{k-j}\cos(jhu),$$

то полагая $\operatorname{sinc}(t):=\{\sin(t)/t,$ если $t\neq 0;\ 1,$ если $t=0\}$, а также считая, что $u:=1$, в силу формулы (2.1) и из последнего равенства имеем

$$2^k\eta_k(t;1)=\binom{2k}{k}-2\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\binom{2k}{k-j}\operatorname{sinc}(jt). \tag{2.2}$$

Теорема 1. *Пусть* $0<t\leqslant 3\pi/4$ *и* $0<\sigma<\infty$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2(\mathbb{R})}\frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda_1(f,t/\sigma)}=\frac{1}{\sqrt{2(1-\operatorname{sinc}(t))}}, \tag{2.3}$$

где верхняя грань в левой части соотношения (2.3) *вычисляется по всем функциям* f *из* $L_2(\mathbb{R})$, *которые не эквивалентны нулю.*

Доказательство. Хорошо известно [7], что для произвольной функции $f\in L_2(\mathbb{R})$ существует единственная функция $\mathcal{L}_\sigma(f)\in\mathbb{B}_{\sigma,2}$, которая наименее уклоняется от f в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$ и имеет вид

$$\mathcal{L}_\sigma(f,x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\mathcal{F}(f,u)e^{ixu}du, \tag{2.4}$$

где $\mathcal{F}(f)$ — преобразование Фурье функции f в $L_2(\mathbb{R})$. При этом

$$\mathcal{A}_\sigma^2(f)=\|f-\mathcal{L}_\sigma(f)\|^2=\int\limits_{|u|\geqslant\sigma}|\mathcal{F}(f,u)|^2du. \tag{2.5}$$

Согласно формулам (1.1), (1.3) и (2.1) получаем

$$\Lambda_1^2(f,\tau) = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta_1(\tau;u)|\mathcal{F}(f,u)|^2 du = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1-\operatorname{sinc}(\tau u))|\mathcal{F}(f,u)|^2 du. \tag{2.6}$$

Рассмотрим далее функцию $(1-\operatorname{sinc}(x))_0 := \{1-\operatorname{sinc}(x)$, если $0 < x \leqslant 3\pi/4$; $1-2\sqrt{2}/(3\pi)$, если $3\pi/4 \leqslant x < \infty\}$, для которой, исходя из геометрических соображений, связанных с поведением $\operatorname{sinc}(x)$, имеет место неравенство

$$(1-\operatorname{sinc}(ax))_0 \geqslant (1-\operatorname{sinc}(bx))_0, \tag{2.7}$$

где $|b| \leqslant |a| < \infty$ и $x \in \mathbb{R}$. Исходя из соотношений (2.5)–(2.7), имеем

$$\Lambda_1^2(f,\tau) \geqslant 2\int\limits_{|u|\geqslant\sigma} (1-\operatorname{sinc}(\tau u))|\mathcal{F}(f,u)|^2 du$$

$$\geqslant 2\int\limits_{|u|\geqslant\sigma} (1-\operatorname{sinc}(\tau u))_0|\mathcal{F}(f,u)|^2 du \geqslant 2\int\limits_{|u|\geqslant\sigma} (1-\operatorname{sinc}(\tau \sigma))_0|\mathcal{F}(f,u)|^2 du$$

$$= 2(1-\operatorname{sinc}(\tau\sigma))_0\mathcal{A}_\sigma^2(f). \tag{2.8}$$

Пусть $\tau = t/\sigma$, где $0 < t \leqslant 3\pi/4$. Тогда из формулы (2.8) следует неравенство

$$\sup_{f\in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda_1(f,t/\sigma)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2(1-\operatorname{sinc}(t))}}. \tag{2.9}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, записанной в левой части неравенства (2.9), рассмотрим, как и в работах [12]– [17], целую функцию $\lambda_\varepsilon(x) := \sqrt{2/\pi}(q_{\sigma+\varepsilon}(x) - q_\sigma(x))$ экспоненциального типа $\sigma+\varepsilon$, где $q_a(x) := a\operatorname{sinc}(ax)$, $a > 0$; $\varepsilon > 0$. При этом преобразование Фурье функции q_a имеет следующий вид: $\mathcal{F}(q_a,x) = \{\sqrt{\pi/2}$, если $|x| < a$; $\sqrt{\pi/8}$, если $|x| = a$; 0, если $|x| > a\}$. Тогда $\mathcal{F}(\lambda_\varepsilon,x) = \{1$, если $\sigma < |x| < \sigma+\varepsilon$; $1/2$, если $|x| = \sigma+\varepsilon$ или $|x| = \sigma$; 0, если $|x| > \sigma+\varepsilon$ или $|x| < \sigma\}$, т.е. $\lambda_\varepsilon \in L_2(\mathbb{R})$ и в силу формулы (2.4) получаем

$$\mathcal{A}_\sigma(\lambda_\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}. \tag{2.10}$$

Пусть

$$\eta_k^*(t;u) := \frac{1}{t}\int\limits_0^t (1-\cos(hu))_*^k dh, \tag{2.11}$$

где $(1-\cos u)_* := \{1-\cos u, \text{если } 0 \leqslant u \leqslant \pi;\ 2,\ \text{если } u \geqslant \pi\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Поскольку, как следует из соотношения (1.3), $\|\Delta_h^1(\lambda_\varepsilon)\|^2 \leqslant 4\varepsilon(1-\cos((\sigma+\varepsilon)h))_*$, то согласно формулам (1.1) и (2.11) отсюда имеем

$$\Lambda_1(\lambda_\varepsilon, t/\sigma) \leqslant 2\sqrt{\varepsilon\eta_1^*(t/\sigma;\sigma+\varepsilon)}. \tag{2.12}$$

С учетом (2.10) и (2.12) получаем

$$\sup_{f\in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda_1(f,t/\sigma)} \geqslant \frac{\mathcal{A}_\sigma(\lambda_\varepsilon)}{\Lambda_1(\lambda_\varepsilon,t/\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{2\eta_1^*(t/\sigma;\sigma+\varepsilon)}}. \tag{2.13}$$

Из (2.11) следует, что величина $\eta_1^*(t/\sigma;\sigma+\varepsilon)$ не возрастает при $\varepsilon \to 0+$ и постоянных значениях t и σ. Поскольку $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \eta_1^*(t/\sigma;\sigma+\varepsilon) = \eta_1(t/\sigma;\sigma) = 1-\operatorname{sinc}(t)$, где $0 < t \leqslant \pi$, то для любого сколь угодно малого числа $\delta > 0$ можно указать такое значение $\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(\delta) \in (0,\delta)$, для которого

$$\frac{1}{\eta_1^*(t/\sigma;\sigma+\widetilde{\varepsilon})} > \frac{1}{1-\operatorname{sinc}(t)} - \delta.$$

Используя определение верхней грани числового множества, отсюда получаем

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\widetilde{\sigma})} \frac{1}{\eta_1^*(t/\sigma;\sigma+\widetilde{\varepsilon})} = \frac{1}{1-\operatorname{sinc}(t)}, \tag{2.14}$$

где $\widetilde{\sigma} := \min(\sigma, 1/\sigma)$. Поскольку левая часть соотношения (2.13) не зависит от ε, то вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon \in (0,\widetilde{\sigma})$ от его правой части и учитывая равенство (2.14), имеем

$$\sup_{f\in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda_1(f,t/\sigma)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2(1-\operatorname{sinc}(t))}}. \tag{2.15}$$

Требуемое соотношение (2.3) следует из неравенств (2.9) и (2.15) при $0 < t \leqslant 3\pi/4$. Теорема 1 доказана. □

Через $L_2^r(\mathbb{R})$, где $r \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} \equiv f$) локально абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$. Отметим, что $L_2^r(\mathbb{R})$ является банаховым пространством с нормой $\|f\| + \|f^{(r)}\|$.

Теорема 2. *Пусть* $\sigma \in (0,\infty)$*;* $r, k \in \mathbb{N}$*;* $t \in (0,\pi]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda_k(f^{(r)},t/\sigma)} = \left\{\binom{2k}{k} - 2\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\binom{2k}{k-j}\operatorname{sinc}(jt)\right\}^{-1/2}. \tag{2.16}$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из класса $L_2^r(\mathbb{R})$. Поскольку почти всюду на $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f^{(r)},x)=(ix)^r\mathcal{F}(f,x), \tag{2.17}$$

то согласно формулам (1.3) и (2.17) запишем

$$\|\Delta_h^k(f^{(r)})\|^2=2^k\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1-\cos(hu))^k u^{2r}|\mathcal{F}(f,u)|^2du.$$

Используя соотношение (1.1) и обозначение (2.1), отсюда получаем

$$\Lambda_k^2(f^{(r)},\tau)=\frac{2^k}{\tau}\int\limits_0^{\tau}dh\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1-\cos(hu))^k u^{2r}|\mathcal{F}(f,u)|^2du$$

$$\geqslant 2^k\int\limits_{|u|\geqslant\sigma}u^{2r}\eta_k(\tau;u)|\mathcal{F}(f,u)|^2du. \tag{2.18}$$

Исходя из (2.18), рассмотрим вспомогательную функцию

$$G_k(\tau,u):=u^{2r}\eta_k(\tau;u)=\frac{u^{2r-1}}{\tau}\int\limits_0^{u\tau}(1-\cos h)^k dh, \tag{2.19}$$

где $u\in\mathbb{R}$, $\tau\in(0,\infty)$. Из формул (2.1) и (2.19) следует, что при любом фиксированном значении τ функция G_k, как функция переменной u, является неотрицательной и четной на вещественной оси $\mathbb{R}$ и монотонно возрастает на полуоси $\mathbb{R}_+:=\{x:0\leqslant x<\infty\}$. Следовательно

$$\inf\{G_k(\tau,u):|u|\geqslant\sigma\}=G_k(\tau,\sigma), \tag{2.20}$$

где $\tau\in(0,\infty)$ — произвольная константа. Используя соотношения (2.18)–(2.20) и (2.5), имеем

$$\Lambda_k^2(f^{(r)},\tau)\geqslant 2^k\int\limits_{|u|\geqslant\sigma}G_k(\tau,u)|\mathcal{F}(f,u)|^2du\geqslant 2^kG_k(\tau,\sigma)\mathcal{A}_\sigma^2(f)$$

$$=2^k\sigma^{2r}\eta_k(\tau;\sigma)\mathcal{A}_\sigma^2(f).$$

Полагая $\tau=t/\sigma$, где $t\in(0,\pi]$, отсюда получаем

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})}\frac{\sigma^r\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda_k(f^{(r)},t/\sigma)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2^k\eta_k(t/\sigma;\sigma)}}=\frac{1}{\sqrt{2^k\eta_k(t;1)}}. \tag{2.21}$$

Для вычисления оценки снизу экстремальной характеристики, расположенной в левой части соотношения (2.21), снова рассмотрим функцию $\lambda_\varepsilon \in L_2^r(\mathbb{R})$, где $\varepsilon > 0$, введенную в ходе доказательства теоремы 1. Используя формулу (2.17), имеем

$$\|\Delta_h^k(\lambda_\varepsilon^r)\|^2 = 2^{k+1} \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} u^{2r}(1-\cos(hu))^k du$$

$$\leqslant 2^{k+1}\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2r}(1-\cos(h(\sigma+\varepsilon)))_*^k.$$

Интегрируя данное соотношение по переменной h в пределах от 0 до t/σ и умножая полученный результат на величину σ/t, в силу (1.1) и (2.11) запишем

$$\Lambda_k(\lambda_\varepsilon^{(r)}, t/\sigma) \leqslant \sqrt{2\varepsilon}(\sigma+\varepsilon)^r\sqrt{2^k\eta_k^*(t/\sigma;\sigma+\varepsilon)}.$$

Следовательно,

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda_k(f^{(r)}, t/\sigma)} \geqslant \frac{\sigma^r\mathcal{A}_\sigma(\lambda_\varepsilon)}{\Lambda_k(\lambda_\varepsilon^{(r)}, t/\sigma)} \geqslant \frac{1}{(1+\varepsilon/\sigma)^r\sqrt{2^k\eta_k^*(t/\sigma;\sigma+\varepsilon)}}. \tag{2.22}$$

Исходя из (2.11), знаменатель правой части неравенства (2.22) является положительной монотонно убывающей функцией от $\varepsilon > 0$ при постоянных значениях σ, k, t. Используя определение верхней грани числового множества, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, а также учитывая формулу (2.1), имеем

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\widetilde{\sigma})} \frac{1}{(1+\varepsilon/\sigma)^r\sqrt{2^k\eta_k^*(t/\sigma;\sigma+\varepsilon)}} = \frac{1}{\sqrt{2^k\eta_k(t;1)}}, \tag{2.23}$$

где $\widetilde{\sigma} = \min(\sigma, 1/\sigma)$. Поскольку левая часть соотношения (2.22) не зависит от величины ε, то вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon \in (0,\widetilde{\sigma})$ от его правой части и используя равенство (2.23), запишем

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r\mathcal{A}_\sigma(f)}{\Lambda_k(f^{(r)}, t/\sigma)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2^k\eta_k(t;1)}}. \tag{2.24}$$

Требуемое равенство (2.16) следует из неравенств (2.21), (2.24) и соотношения (2.2), чем и завершается доказательство теоремы 2. $\square$

Полагаем

$$\gamma_{k,r,p,x}(\varphi, u) := u^{2r}\Big\{\int\limits_0^x \eta_k^{p/2}(t;u)\varphi(t)dt\Big\}^{2/p}. \tag{2.25}$$

Из (2.1) и (2.25) вытекает, что $\gamma_{k,r,p,x}(\varphi,u)$, как функция от u при фиксированных значениях остальных параметров, является положительной и четной.

Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть $k\in\mathbb{N}$; $r\in\mathbb{Z}_+$; $p\in(0,2]$; $\sigma\in(0,\infty)$; x — конечное положительное число; φ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,x]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})}\frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\{\int_0^x\Lambda_k^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\}^{1/p}}=2^{-k/2}\{\inf_{u\geqslant\sigma}\gamma_{k,r,p,x}(\varphi,u)\}^{-1/2}. \quad (2.26)$$

В случае $r=0$ полагаем $L_2^0(\mathbb{R})\equiv L_2(\mathbb{R})$ и верхнюю грань в соотношении (2.26) вычисляем по всем функциям $f\in L_2(\mathbb{R})$, которые не эквивалентны нулю.

Доказательство. Полагая

$$\mathcal{H}(f;t,u):=2^{kp/2}\ u^{rp}\ \eta_k^{p/2}(t;u)\ |\mathcal{F}(f,u)|^p\ \varphi(t)$$

и используя соотношения (2.18) и (2.5), обобщенное неравенство Минковского (см., например, [5, глава 1, п. 1.3]), а также учитывая обозначение (2.25), запишем

$$\Big\{\int\limits_0^x\Lambda_k^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\Big\}^{1/p}$$

$$\geqslant\Big\{\int\limits_0^x\Big[2^k\int\limits_{|u|\geqslant\sigma}u^{2r}\eta_k(t;u)|\mathcal{F}(f,u)|^2du\Big]^{p/2}\varphi(t)dt\Big\}^{1/p}$$

$$=\Big\{\int\limits_0^x\Big[\int\limits_{|u|\geqslant\sigma}\mathcal{H}^{2/p}(f;t,u)du\Big]^{p/2}dt\Big\}^{1/p}$$

$$\geqslant\Big\{\int\limits_{|u|\geqslant\sigma}\Big[\int\limits_0^x\mathcal{H}(f;t,u)dt\Big]^{2/p}du\Big\}^{\frac{p}{2}\cdot\frac{1}{p}}$$

$$=2^{k/2}\Big\{\int\limits_{|u|\geqslant\sigma}|\mathcal{F}(f,u)|^2\Big[u^{rp}\int\limits_0^x\eta_k^{p/2}(t,u)\varphi(t)dt\Big]^{2/p}du\Big\}^{1/2}$$

$$= 2^{k/2}\Big\{ \int\limits_{|u|\geqslant\sigma} |\mathcal{F}(f,u)|^2\gamma_{k,r,p,x}(\varphi,u)du\Big\}^{1/2}$$

$$\geqslant 2^{k/2}\mathcal{A}_\sigma(f)\Big\{\inf_{u\geqslant\sigma}\gamma_{k,r,p,x}(\varphi,u)\Big\}^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})}\frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\big\{\int_0^x \Lambda_k^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\big\}^{1/p}} \leqslant 2^{-k/2}\Big\{\inf_{u\geqslant\sigma}\gamma_{k,r,p,x}(\varphi,u)\Big\}^{-1/2}. \tag{2.27}$$

Получим оценку снизу экстремальной характеристики, расположенной в левой части неравенства (2.27). Пусть $u\in\mathbb{R}$ есть произвольное число, удовлетворяющее условию $|u|\geqslant\sigma$. Рассмотрим функцию $\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,u}(x) := \sqrt{2/\pi}\,\big(q_{|u|+\varepsilon}(x)-q_{|u|}(x)\big)$, где $\varepsilon\in(0,\widetilde{u})$, $\widetilde{u}:=\min(|u|,1/|u|)$; $q_a(x) := a\ \mathrm{sinc}\,(ax)$, $a>0$, являющуюся целой экспоненциального типа $|u|+\varepsilon$. Поскольку для преобразования Фурье функции $\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,u}$ имеем $\mathcal{F}(\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,u};x) = \{1$, если $|u|<|x|<|u|+\varepsilon$; $1/2$, если $|x|=|u|$ или $|x|=|u|+\varepsilon$; 0, если $|x|<|u|$ или $|x|>|u|+\varepsilon\}$, то в силу формулы (2.17) и равенства $\|\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,u}^{(r)}(\cdot)\| = \|(\cdot)^r\mathcal{F}(\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,u};\cdot)\|$ получаем $\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,u}\in L_2^r(\mathbb{R})$ при любом $u\in\mathbb{R}$, $|u|\geqslant\sigma$. Поскольку

$$\|\Delta_h^k(\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,u}^{(r)})\|^2 = 2^{k+1}\int\limits_{|u|}^{|u|+\varepsilon}(1-\cos(hv))^k v^{2r}dv$$

$$\leqslant 2^{k+1}\varepsilon(|u|+\varepsilon)^{2r}\big(1-\cos(h(|u|+\varepsilon))\big)_*^k,$$

то после интегрирования данного соотношения по h в пределах от 0 до t, умножения полученного таким образом неравенства на величину $1/t$ и использования формул (1.1) и (2.11), имеем

$$\Lambda_k\big(\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,u}^{(r)};t\big)\leqslant 2^{k/2}\ \sqrt{2\varepsilon}\ (|u|+\varepsilon)^r\sqrt{\eta_k^*(t;|u|+\varepsilon)}. \tag{2.28}$$

Возводя обе части неравенства (2.28) в степень $p\in(0,2]$, затем умножая их на функцию $\varphi(t)$ и интегрируя по переменной t в пределах от 0 до x, а также учитывая, что в силу (2.5) $\mathcal{A}_\sigma(\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,u})=\sqrt{2\varepsilon}$, запишем

$$\int\limits_0^x \Lambda_k^p\big(\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,u}^{(r)};t\big)\varphi(t)dt$$

$$\leqslant 2^{pk/2}\mathcal{A}_\sigma^p(\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,u})(|u|+\varepsilon)^{pr}\int\limits_0^x\big(\eta_k^*(t;|u|+\varepsilon)\big)^{p/2}\varphi(t)dt. \tag{2.29}$$

Используя (2.29), получаем

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})}\frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^x \Lambda_k^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}\geqslant\frac{\mathcal{A}_\sigma(\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,u})}{\left\{\int_0^x \Lambda_k^p(\widetilde{\lambda}_{\varepsilon,u}^{(r)};t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}$$

$$\geqslant 2^{-k/2}(|u|+\varepsilon)^{-r}\Big\{\int\limits_0^x\big(\eta_k^*(t;|u|+\varepsilon)\big)^{p/2}\varphi(t)dt\Big\}^{-1/p}. \tag{2.30}$$

Поскольку

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\widetilde{u})}(|u|+\varepsilon)^{-r}\Big\{\int\limits_0^x\big(\eta_k^*(t;|u|+\varepsilon)\big)^{p/2}\varphi(t)dt\Big\}^{-1/p}=\big\{\gamma_{k,r,p,x}(\varphi,u)\big\}^{-1/2},$$

то после вычисления верхней грани по $\varepsilon\in(0,\widetilde{u})$ от правой части соотношения (2.30) имеем

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})}\frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^x \Lambda_k^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}\geqslant 2^{-k/2}\big\{\gamma_{k,r,p,x}(\varphi,u)\big\}^{-1/2},$$

где $u\geqslant\sigma$. Используя определения и свойства точных верхней и нижней граней числового множества, получаем

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})}\frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^x \Lambda_k^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}$$

$$\geqslant 2^{-k/2}\sup_{u\geqslant\sigma}\big\{\gamma_{k,r,p,x}(\varphi,u)\big\}^{-1/2}\geqslant 2^{-k/2}\Big\{\inf_{u\geqslant\sigma}\gamma_{k,r,p,x}(\varphi,u)\Big\}^{-1/2}. \tag{2.31}$$

Требуемое равенство (2.26) следует из соотношений (2.27) и (2.31). Теорема 3 доказана. □

Полагая, например, в условиях теоремы 3 величину $k=1$, из равенства (2.26) получаем

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})}\frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^x \Lambda_1^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\Big\{\inf\limits_{u\geqslant\sigma}u^r\Big[\int_0^x(1-\operatorname{sinc}(ut))^{p/2}\varphi(t)dt\Big]^{1/p}\Big\}}. \tag{2.32}$$

3. Некоторые следствия из теоремы 3

В первую очередь рассмотрим, при каких условиях удается вычислить нижнюю грань в правой части равенства (2.32).

Следствие 1. *Пусть* $\sigma \in (0, \infty)$*;* $r \in \mathbb{Z}_+$*;* $p \in (0, 2]$*;* $x \in (0, 3\pi/(4\sigma)]$*;* φ *— неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0, x]$ *функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{ \int_0^x \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt \right\}^{1/p}} = \frac{1}{\sqrt{2}\left\{ \int_0^x (1 - \mathrm{sinc}\,(\sigma t))^{p/2}\varphi(t)dt \right\}^{1/p}}. \tag{3.1}$$

В случае $r = 0$ *верхняя грань в* (3.1) *вычисляется по всем функциям* $f \in L_2(\mathbb{R})$*, которые не эквивалентны нулю.*

Доказательство. Учитывая поведение функции $\mathrm{sinc}\,(t)$ (см., например, [29, с. 129, 132]), для произвольных значений $v \in [1, \infty)$ и $z \in (0, 3\pi/4]$ имеем $\mathrm{sinc}\,(z) \geqslant \mathrm{sinc}\,(vz)$. Следовательно, имеет место неравенство

$$v^\nu (1 - \mathrm{sinc}\,(vz))^\alpha \geqslant (1 - \mathrm{sinc}\,(z))^\alpha, \tag{3.2}$$

где $\nu, \alpha \in [0, \infty)$ — произвольные числа. Полагая $v := u/\sigma$, где $u \in [\sigma, \infty)$; $z := \sigma t$, где $t \in (0, x]$; $\nu := rp$; $\alpha := p/2$, из (3.2) получаем

$$u^{rp}(1 - \mathrm{sinc}\,(ut))^{p/2} \geqslant \sigma^{rp}(1 - \mathrm{sinc}\,(\sigma t))^{p/2}.$$

Умножая обе части данного неравенства на функцию $\varphi(t)$ и затем интегрируя их по переменной t в пределах от 0 до x, имеем

$$u^{rp} \int_0^x (1 - \mathrm{sinc}\,(ut))^{p/2}\varphi(t)dt \geqslant \sigma^{rp} \int_0^x (1 - \mathrm{sinc}\,(\sigma t))^{p/2}\varphi(t)dt, \tag{3.3}$$

где $u \in [\sigma, \infty)$ — произвольное число. Поскольку из (3.3) следует соотношение

$$\inf_{u \geqslant \sigma} u^r \left\{ \int_0^x (1 - \mathrm{sinc}\,(ut))^{p/2}\varphi(t)dt \right\}^{1/p}$$

$$= \sigma^r \left\{ \int_0^x (1 - \mathrm{sinc}\,(\sigma t))^{p/2}\varphi(t)dt \right\}^{1/p},$$

то отсюда с учетом формулы (2.32) получаем требуемое равенство (3.1). Следствие 1 доказано. □

Полагая, например, $p = 2$; $\varphi(t) \equiv 1$; $h = \sigma x$, где $h \in (0, 3\pi/4]$, из равенства (3.1) имеем

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{r-1/2}\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^{h/\sigma} \Lambda_1^2(f^{(r)}, t)dt\right\}^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2(h - Si(h))}}, \tag{3.4}$$

где $Si(x) := \int_0^x \operatorname{sinc}(t)dt$ — интегральный синус. В случае $r = 0$ из (3.4), в частности, получаем

$$\sup_{f\in L_2(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\sigma\int_0^{h/\sigma} \Lambda_1^2(f, t)dt\right\}^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2(h - Si(h))}}.$$

Следствие 2. *Пусть* $\sigma \in (0, \infty)$*;* $r, k \in \mathbb{N}$*;* $p \in [1/r, 2]$*;* x *— конечное положительное число;* φ *— неотрицательная дифференцируемая почти всюду на интервале* $(0, x)$ *функция, которая не эквивалентна нулю и почти для всех* $t \in (0, x)$ *удовлетворяет условию*

$$\varphi(t)(pr - 1) - t\varphi'(t) \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r\mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^x \Lambda_k^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}$$

$$= \left\{\int_0^x \left[\binom{2k}{k} - 2\sum_{j=1}^k (-1)^{j+1}\binom{2k}{k-j}\operatorname{sinc}(j\sigma t)\right]^{p/2}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$Z(u) := \gamma_{k,r,p,x}^{p/2}(\varphi, u) = u^{pr}\int_0^x \eta_k^{p/2}(t; u)\varphi(t)dt, \tag{3.7}$$

где $u \geqslant \sigma$, и вычислим ее производную первого порядка

$$Z'(u) = pru^{pr-1}\int_0^x \eta_k^{p/2}(t; u)\varphi(t)dt + u^{pr}\int_0^x \varphi(t)\frac{\partial}{\partial u}\big(\eta_k^{p/2}(t; u)\big)dt. \tag{3.8}$$

Поскольку, как вытекает из (2.1),

$$\eta_k(t; u) = \eta_k(tu; 1), \tag{3.9}$$

то, полагая $\lambda(x) := \eta_k^{p/2}(x; 1)$, можно убедиться в том, что

$$\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial u}(\lambda(tu)) = \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}(\lambda(tu)),$$

где t и u принимают отличные от нуля значения. С учетом (3.9) отсюда имеем

$$\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial u}(\eta_k^{p/2}(t;u))=\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}(\eta_k^{p/2}(t;u)). \tag{3.10}$$

Используя соотношение (3.10) в ходе интегрирования по частям второго интеграла в формуле (3.8), запишем

$$Z'(u)=u^{pr-1}\Big\{pr\int\limits_0^x\eta_k^{p/2}(t;u)\varphi(t)dt+\int\limits_0^x t\varphi(t)\frac{\partial}{\partial t}\big(\eta_k^{p/2}(t;u)\big)dt\Big\}$$

$$=u^{pr-1}\Big\{x\varphi(x)\eta_k^{p/2}(x;u)+\int\limits_0^x\eta_k^{p/2}(t;u)\big[\varphi(t)(pr-1)-t\varphi'(t)\big]dt\Big\}. \tag{3.11}$$

С учетом формулы (3.5) из (3.11) для всех $u\geqslant\sigma$ имеем $Z'(u)\geqslant 0$. Следовательно, функция Z является неубывающей на множестве $[\sigma,\infty)$. Учитывая (3.7), (3.9) и (2.25), отсюда получаем

$$\inf_{\sigma\leqslant u<\infty}\gamma_{k,r,p,x}(\varphi,u)=\gamma_{k,r,p,x}(\varphi,\sigma)=\sigma^{2r}\Big\{\int\limits_0^x\eta_k^{p/2}(t\sigma;1)\varphi(t)dt\Big\}^{2/p}. \tag{3.12}$$

Требуемое равенство (3.6) следует из соотношений (2.26), (3.12) и (2.2). Следствие 2 доказано. □

Сравнивая результаты следствий 1 и 2 в случае $k=1$ отметим, что соотношение (3.6) из следствия 2 имеет место, когда $r\in\mathbb{N}$; $p\in[1/r,2]$ и функция φ удовлетворяет ограничению (3.5). При этом x — произвольное положительное число. Что же касается следствия 1, то в отличие от следствия 2 величина r может принимать и нулевое значение при $p\in(0,2]$, а функция φ подчиняется более слабым условиям. Однако положительное число x уже ограничено сверху числом $3\pi/(4\sigma)$.

Полагая, например, $p=2$; $\varphi(t)\equiv 1$ и учитывая, что неравенство (3.5) в этом случае выполняется автоматически, из формулы (3.6) получаем

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})}\frac{\sigma^r\mathcal{A}_\sigma(f)}{\big\{\int_0^x\Lambda_k^2(f^{(r)},t)dt\big\}^{1/2}}$$

$$=\Big\{x\Big[\binom{2k}{k}-2\sum_{j=1}^k(-1)^{j+1}\binom{2k}{k-j}\frac{Si(j\sigma x)}{j\sigma x}\Big]\Big\}^{-1/2}. \tag{3.13}$$

Отметим, что при $k=1$ и $r\in\mathbb{N}$ правые и левые части равенств (3.4) и (3.13) совпадают, если в (3.13) полагать $x=h/\sigma$, где $0<h\leqslant 3\pi/4$.

Пусть теперь $\varphi(t) := t^m$, где $m \in (0, \infty)$ — произвольное число. Тогда соотношение (3.5) приобретает следующий вид: $p \geqslant (1+m)/r$. Поскольку, согласно условию следствия 3, имеем $p \in (0, 2]$, то получаем двойное неравенство $(1+m)/r \leqslant p \leqslant 2$, которому должна удовлетворять величина p. При этом для чисел $r \in \mathbb{N}$ должно выполняться ограничение снизу $r \geqslant (1+m)/2$. В случае выполнения указанных ограничений на p и r, из формулы (3.6) получаем

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^x \Lambda_k^p(f^{(r)}, t) t^m dt\right\}^{1/p}}$$

$$= \left\{ \int\limits_0^x \left[\binom{2k}{k} - 2 \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{2k}{k-j} \operatorname{sinc}(j\sigma t) \right]^{p/2} t^m dt \right\}^{-1/p}.$$

Полагая, например, в данной формуле $k = 1$; $m = 1$; $p = 2$, для любого $r \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^x \Lambda_1^2(f^{(r)}, t) t dt\right\}^{1/2}} = \frac{1}{x\sqrt{1 - \operatorname{sinc}^2(\sigma x/2)}},$$

где $x \in (0, \infty)$ — произвольное число.

Пусть в формуле (2.26) $x := x_* = \alpha/\sigma$, где $\alpha \in (0, \infty)$ и $\varphi(t) := \varphi_*(t) = \psi(\sigma t)$. Полагая

$$\theta_{k,r,p,\alpha}(\psi, v) := v^{2r} \left\{ \int\limits_0^\alpha \eta_k^{p/2}(vt; 1) \psi(t) dt \right\}^{2/p} \tag{3.14}$$

и учитывая соотношение (3.9), запишем

$$\gamma_{k,r,p,x_*}(\varphi_*, u) = \left\{ u^{rp} \int\limits_0^{\alpha/\sigma} \eta_k^{p/2}(ut; 1) \psi(\sigma t) dt \right\}^{2/p}$$

$$= \sigma^{2(r-1/p)} \left\{ \left(\frac{u}{\sigma}\right)^{rp} \int\limits_0^\alpha \eta_k^{p/2}\big(ut/\sigma; 1\big) \psi(t) dt \right\}^{2/p},$$

где $u \geqslant \sigma$. Используя обозначение (3.14), отсюда получаем

$$\sigma^{2(r-1/p)} \inf_{1 \leqslant v < \infty} \theta_{k,r,p,\alpha}(\psi, v) \leqslant \inf_{\sigma \leqslant u < \infty} \gamma_{k,r,p,x_*}(\varphi_*, u)$$

$$\leqslant \gamma_{k,r,p,x_*}(\varphi_*, \sigma) = \sigma^{2(r-1/p)}\ \theta_{k,r,p,\alpha}(\psi, 1). \tag{3.15}$$

Из теоремы 3 и соотношения (3.15) вытекает

Следствие 3. *Пусть $k, r \in \mathbb{N}$; $p \in (0, 2]$; $\sigma, \alpha \in (0, \infty)$; ψ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0, \alpha]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда имеет место следующее двойное неравенство:*

$$2^{-k/2}\big\{\theta_{k,r,p,\alpha}(\psi, 1)\big\}^{-1/2} \leqslant \sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)}{\big\{\int_0^\alpha \Lambda_k^p(f^{(r)}, t/\sigma)\psi(t)dt\big\}^{1/p}}$$

$$\leqslant 2^{-k/2}\big\{\inf_{1 \leqslant v < \infty} \theta_{k,r,p,\alpha}(\psi, v)\big\}^{-1/2}.$$

Если же функция ψ удовлетворяет условию

$$\inf_{1 \leqslant v < \infty} \theta_{k,r,p,\alpha}(\psi, v) = \theta_{k,r,p,\alpha}(\psi, 1), \tag{3.16}$$

то справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)}{\big\{\int_0^\alpha \Lambda_k^p(f^{(r)}, t/\sigma)\psi(t)dt\big\}^{1/p}} = 2^{-k/2}\big\{\theta_{k,r,p,\alpha}(\psi, 1)\big\}^{-1/2}. \tag{3.17}$$

Следующее утверждение посвящено изучению вопроса, при каких условиях будет выполнено равенство (3.16).

Следствие 4. *Пусть выполнены все условия следствия 3 и функция $\psi(t) := \widetilde{\psi}(t) = t^{rp-1}\widetilde{\psi}_1(t)$, где $\widetilde{\psi}_1$ — неотрицательная невозрастающая определенная и суммируемая на отрезке $[0, \alpha]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда для определенной указанным образом функции ψ выполнено равенство* (3.16), *а значит имеет место соотношение* (3.17).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\widetilde{\psi}_*(t) := \{\widetilde{\psi}_1(t)$, если $0 \leqslant t \leqslant \alpha$; $\widetilde{\psi}_1(\alpha)$, если $\alpha \leqslant t < \infty\}$. Тогда на основании (3.14) для произвольного значения $v \in [1, \infty)$ запишем

$$\theta_{k,r,p,\alpha}(\widetilde{\psi}, v) = v^{2r}\Big\{\int_0^\alpha \eta_k^{p/2}(vt; 1)t^{rp-1}\widetilde{\psi}_1(t)dt\Big\}^{2/p}$$

$$= \Big\{\int_0^{\alpha v} \eta_k^{p/2}(t; 1)t^{rp-1}\widetilde{\psi}_*(t/\sigma)dt\Big\}^{2/p} \geqslant \Big\{\int_0^{\alpha v} \eta_k^{p/2}(t; 1)t^{rp-1}\widetilde{\psi}_*(t)dt\Big\}^{2/p}$$

$$\geqslant \Big\{\int_0^\alpha \eta_k^{p/2}(t; 1)t^{rp-1}\widetilde{\psi}_1(t)dt\Big\}^{2/p} = \theta_{k,r,p,\alpha}(\widetilde{\psi}, 1).$$

Следовательно, условие (3.16) имеет место, а это означает, в силу следствия 3, справедливость равенства (3.17) для функции $\widetilde{\psi}$. Тогда, с учетом формул (3.14) и (2.2), получаем

$$\sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^r \mathcal{A}_\sigma(f)}{\left\{\int_0^\alpha \Lambda_k^p(f^{(r)}, t/\sigma) t^{rp-1}\widetilde{\psi}_1(t)dt\right\}^{1/p}} = 2^{-k/2}\left\{\theta_{k,r,p,\alpha}(\widetilde{\psi},1)\right\}^{-1/2}$$

$$= \left\{\int\limits_0^\alpha \left[\binom{2k}{k} - 2\sum_{j=1}^k (-1)^{j+1}\binom{2k}{k-j}\mathrm{sinc}\,(jt)\right]^{p/2} t^{rp-1}\widetilde{\psi}_1(t)dt\right\}^{-1/2}.$$

Следствие 4 доказано. □

4. Точные значения средних ν-поперечников классов функций, определенных при помощи характеристики гладкости Λ_k в пространстве $L_2(\mathbb{R})$

В работах [30, 31] Г. Г. Магарил-Ильяевым было введено определение средней размерности, которое является некоторой модификацией соответствующего понятия, приведенного ранее В. М. Тихомировым [32]. Это позволило определить асимптотические экстремальные характеристики, подобные поперечникам, где роль размерности выполняла средняя размерность. В результате этого стало возможным сравнение аппроксимативных свойств подпространств $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, где $\sigma \in (0,\infty)$, с аналогичными свойствами иных подпространств из $L_2(\mathbb{R})$, имеющих ту же среднюю размерность, и решение в $L_2(\mathbb{R})$ целого ряда экстремальные задачи теории аппроксимации функций оптимизационного содержания.

Напомним необходимые далее понятия и определения, приведенные в [30, 31]. Пусть $BL_2(\mathbb{R})$ есть единичный шар в $L_2(\mathbb{R})$; $Lin(L_2(\mathbb{R}))$ является совокупностью всех линейных подпространств в $L_2(\mathbb{R})$;

$$Lin_n(L_2(\mathbb{R})) := \{\mathcal{L} \in Lin(L_2(\mathbb{R})) : dim\mathcal{L} \leqslant n\},\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$d(\mathfrak{M}, A, L_2(\mathbb{R})) := \sup\{\inf\{\|x-y\| : y \in A\} : x \in \mathfrak{M}\}$$

есть наилучшее приближение множества $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ множеством $A \subset L_2(\mathbb{R})$. Под A_T, где $T > 0$, понимаем сужение множества $A \subset L_2(\mathbb{R})$ на отрезок $[-T,T]$, а через $Lin_C L_2(\mathbb{R})$ обозначим совокупность таких подпространств $\mathcal{L} \in Lin(L_2(\mathbb{R}))$, для которых множество $(\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T$ предкомпактно в $L_2([-T,T])$ при любом $T > 0$.

Если $\mathcal{L} \in Lin_C(L_2(\mathbb{R}))$ и $T, \varepsilon > 0$, то существуют такие $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathcal{M} \in Lin_n(L_2(\mathbb{R}))$, для которых $d((\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T, \mathcal{M}, L_2([-T,T])) < \varepsilon$. Пусть

$$D_\varepsilon(T, \mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) := \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : \exists \mathcal{M} \in Lin_n(L_2([-T,T])),$$

$$d((\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T, \mathcal{M}, L_2([-T,T])) < \varepsilon\}.$$

Данная величина не убывает по T и не возрастает по ε. Величину

$$\overline{dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) := \lim\{\liminf\{D_\varepsilon(T, \mathcal{L}, L_2(\mathbb{R}))/(2T) : T \to \infty\} : \varepsilon \to 0\},$$

где $\mathcal{L} \in Lin_C(L_2(\mathbb{R}))$, называют средней размерностью подпространства $\mathcal{L}$ в $L_2(\mathbb{R})$. В [30] было показано, что

$$\overline{dim}(\mathbb{B}_{\sigma,2}; L_2(\mathbb{R})) = \sigma/\pi. \tag{4.1}$$

Пусть $\mathfrak{M}$ есть центрально-симметричное подмножество из $L_2(\mathbb{R})$ и $\nu > 0$ является произвольным конечным числом. Тогда под средним ν-поперечником по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в $L_2(\mathbb{R})$ понимают величину

$$\overline{d}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) := \inf\{\sup\{\inf\{\|f - \varphi\| : \varphi \in \mathcal{L}\} : f \in \mathfrak{M}\}$$

$$: \mathcal{L} \in Lin_C(L_2(\mathbb{R})), \overline{dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \nu\}.$$

Подпространство, на котором достигается внешняя нижняя грань, называется экстремальным.

Средним линейным ν-поперечником множества $\mathfrak{M}$ в $L_2(\mathbb{R})$ называют величину

$$\overline{\delta}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) := \inf\{\sup\{\|f - V(f)\| : f \in \mathfrak{M}\} : (X, V)\},$$

где нижняя грань берется по всем парам (X, V) таким, что X есть нормированное пространство, непосредственно вложенное в $L_2(\mathbb{R})$, а $V : X \to L_2(\mathbb{R})$ является непрерывным линейным оператором, для которого $ImV \subset Lin_C(L_2(\mathbb{R}))$ и выполнено неравенство $\overline{dim}(ImV, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \nu$; $\mathfrak{M} \subset X$. Здесь ImV есть образ оператора V. Пару, на которой достигается нижняя грань, называют экстремальной.

Величину

$$\overline{b}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) := \sup\{\sup\{\rho > 0 : \mathcal{L} \cap \rho BL_2(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}\}$$

$$: \mathcal{L} \in Lin_C(L_2(\mathbb{R})), \overline{dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) > \nu, \overline{d}_\nu(\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1\}$$

называют средним ν-поперечником по Бернштейну множества $\mathfrak{M}$ в $L_2(\mathbb{R})$. Последнее условие, налагаемое на $\mathcal{L}$ при вычислении внешней верхней грани, означает, что рассматриваются только те подпространства, для которых справедлив аналог теоремы В. М. Тихомирова о поперечнике шара. Этому требованию удовлетворяет, например, подпространство $\mathbb{B}_{\sigma,2}$, если $\sigma > \nu\pi$, т.е. $\overline{d}_\nu(\mathbb{B}_{\sigma,2} \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1$.

Для множества $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ между перечисленными выше его экстремальными характеристиками имеют место следующие неравенства:

$$\overline{b}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \overline{d}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) \leqslant \overline{\delta}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})). \tag{4.2}$$

Отметим, что точные значения средних ν-поперечников некоторых классов функций впервые были получены Г. Г. Магарил–Ильяевым [30,31]. В последующем данная тематика была продолжена в работах других авторов (см., например, [12,13,15–17]). Краткий обзор, касающийся вычисления точных значений указанных экстремальных характеристик, можно найти в работе [33].

Воспользуемся характеристикой гладкости (1.1) для определения классов функций в $L_2(\mathbb{R})$. Пусть $\Psi(t)$, где $t \in [0,\infty)$, есть непрерывная возрастающая функция, такая, что $\Psi(0) = 0$, которую далее будем называть мажорантой. Через $\mathcal{W}(\Lambda_1, \Psi)$ обозначим класс функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, для каждой из которых при любом $t \in (0,\infty)$ выполняется неравенство $\Lambda_1(f,t) \leqslant \Psi(t)$. Символом t_* обозначим значение аргумента функции $\operatorname{sinc}(t)$, при котором она достигает наименьшего значения на множестве $0 < t < \infty$. Отметим (см., например, [12,13,33]), что t_* является наименьшим положительным корнем уравнения $t = \operatorname{tg} t$ и $4,49 < t_* < 4,51$. Далее полагаем $(1 - \operatorname{sinc}(t))_* := \{1 - \operatorname{sinc}(t)$, если $0 < t \leqslant t_*$; $1 - \operatorname{sinc}(t_*)$, если $t_* \leqslant t < \infty\}$.

Теорема 4. *Пусть $\nu \in (0,\infty)$ — произвольное число; Ψ — мажоранта, которая удовлетворяет условию*

$$\frac{\Psi^2(t)}{\Psi^2(\pi/(2\sigma))} \geqslant \frac{\pi}{\pi-2}\big(1 - \operatorname{sinc}(\sigma t)\big)_* \tag{4.3}$$

для любых значений $t \in (0,\infty)$ и $\sigma \in (\nu\pi,\infty)$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_\nu(\mathcal{W}(\Lambda_1,\Psi); L_2(\mathbb{R})) &= \mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathcal{W}(\Lambda_1,\Psi)) \\ &= \sup\{\|f - \mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\| : f \in \mathcal{W}(\Lambda_1,\Psi)\} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}}\ \Psi\Big(\frac{1}{2\nu}\Big), \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ *— любой из рассмотренных выше средних* ν*-поперечников, оператор* $\mathcal{L}_{\nu\pi}$ *определяется формулой* (2.3) *при* $\sigma = \nu\pi$*. При этом пара [4]* $(L_2(\mathbb{R}), \mathcal{L}_{\nu\pi})$ *будет экстремальной для среднего линейного* ν*-поперечника* $\overline{\delta}_\nu(\mathcal{W}(\Lambda_1, \Psi); L_2(\mathbb{R}))$*, а подпространство* $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ *является экстремальным для среднего* ν*-поперечника по Колмогорову* $\overline{d}_\nu(\mathcal{W}(\Lambda_1, \Psi); L_2(\mathbb{R}))$*. Множество мажорант, удовлетворяющих условию* (4.3)*, не пусто.*

Доказательство. Используя соотношение (2.3), в котором полагаем $t = \pi/2$, для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ получаем

$$\mathcal{A}_\sigma(f) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}}\ \Lambda_1\Big(f, \frac{\pi}{2\sigma}\Big). \tag{4.5}$$

Пусть $\sigma = \nu\pi$. Тогда в силу формулы (4.1) для средней размерности подпространства $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ имеем $\overline{dim}\ \mathbb{B}_{\nu\pi,2} = \nu$. Учитывая этот факт и определение класса функций $\mathcal{W}(\Lambda_1, \Psi)$, из соотношений (2.4)–(2.5), (4.2) и (4.5) имеем оценки сверху

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}_\nu(\mathcal{W}(\Lambda_1, \Psi); L_2(\mathbb{R})) &\leqslant \overline{\delta}_\nu(\mathcal{W}(\Lambda_1, \Psi); L_2(\mathbb{R}))\\ &\leqslant \sup\{\|f - \mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\| : f \in \mathcal{W}(\Lambda_1, \Psi)\}\\ &= \mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathcal{W}(\Lambda_1, \Psi)) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}}\ \Psi\Big(\frac{1}{2\nu}\Big).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Для получения оценок снизу исследуемых средних ν-поперечников необходимо, согласно формуле (4.2), дать оценку снизу среднего бернштейновского ν-поперечника $\overline{b}_\nu(\mathcal{W}(\Lambda_1, \Psi); L_2(\mathbb{R}))$. Для этого полагаем $\widehat{\sigma} := \nu\pi(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0, \widetilde{\nu})$ — произвольное число, а $\widetilde{\nu} := \min(\nu, 1/\nu)$. Согласно (4.1) $\overline{dim}\ \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} = \nu(1+\varepsilon)$ и $\overline{d}_\nu(\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} \cap BL_2(\mathbb{R}); L_2(\mathbb{R})) = 1$ поскольку $\widehat{\sigma} > \nu\pi$. Поэтому далее можем рассматривать подпространство $\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$ как одну из реализаций подпространства $\mathcal{L} \in Lin_C(L_2(\mathbb{R}))$, участвующего в определении величины $\overline{b}_\nu(\cdot)$. В связи с этим рассмотрим множество целых функций $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon) := \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} \cap \rho_\varepsilon BL_2(\mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} : \|g\| \leqslant \rho_\varepsilon\}$, где

$$\rho_\varepsilon := \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}}\ \Psi\Big(\frac{1}{2\nu(1+\varepsilon)}\Big). \tag{4.7}$$

Покажем, что $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon) \subset \mathcal{W}(\Lambda_1, \Psi)$. Напомним, что согласно фундаментальной теореме, установленной Винером и Палей (см., например, [3, глава 4, пункт 4.6]), произвольный элемент $g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$ можно представить в следующем виде:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} e^{ixu} \mu(u) du, \tag{4.8}$$

где μ — некоторая функция с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля на отрезке $[-\widehat{\sigma}, \widehat{\sigma}]$. Поскольку для преобразования Фурье функции g имеем $\mathcal{F}(g, x) = \{\mu(x)$, если $|x| \leqslant \widehat{\sigma}$; 0, если $|x| > \widehat{\sigma}\}$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} |\mu(u)|^2 du, \tag{4.9}$$

то на основании формулы (2.6) запишем

$$\Lambda_1^2(g, t) = 2 \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} (1 - \operatorname{sinc}(tu)) |\mu(u)|^2 du \leqslant (1 - \operatorname{sinc}(t\widehat{\sigma}))_* \|g\|^2. \tag{4.10}$$

Используя соотношения (4.7)–(4.10) и учитывая условие (4.3) для мажоранты Ψ, в котором полагаем $\sigma := \widehat{\sigma}$, для произвольной функции $g \in \mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon)$ и любого $t \in (0, \infty)$ получаем

$$\Lambda_1(g, t) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{\pi - 2}\ (1 - \operatorname{sinc}(t\widehat{\sigma}))_*}\ \Psi\Big(\frac{1}{2\nu(1+\varepsilon)}\Big) \leqslant \Psi(t).$$

Следовательно $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon) \subset \mathcal{W}(\Lambda_1, \Psi)$. Учитывая этот факт и определение среднего бернштейновского ν-поперечника, запишем

$$\overline{b}_\nu(\mathcal{W}(\Lambda_1, \Psi); L_2(\mathbb{R})) \geqslant \overline{b}_\nu(\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon); L_2(\mathbb{R})) \geqslant \rho_\varepsilon.$$

Из данного соотношения и формул (4.2) и (4.7) получаем

$$\overline{\Pi}_\nu(\mathcal{W}(\Lambda_1, \Psi); L_2(\mathbb{R})) \geqslant \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}}\ \Psi\Big(\frac{1}{2\nu(1+\varepsilon)}\Big). \tag{4.11}$$

Поскольку левая часть неравенства (4.11) не зависит от величины ε, то вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon \in (0, \widetilde{\nu})$ от его правой части, имеем

$$\overline{\Pi}_\nu(\mathcal{W}(\Lambda_1, \Psi); L_2(\mathbb{R})) \geqslant \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}}\ \Psi\Big(\frac{1}{2\nu}\Big). \tag{4.12}$$

Требуемые равенства (4.4) следуют из соотношений (4.6) и (4.12). Убедимся далее в том, что множество мажорант, удовлетворяющих условию (4.3), не пусто. Для этого рассмотрим мажоранту $\widetilde{\Psi}(t) := t^{\beta/2}$, для которой соотношение (4.3) примет следующий вид:

$$(t\sigma)^\beta \geqslant \frac{\pi^{1+\beta}}{2^\beta(\pi - 2)} (1 - \operatorname{sinc}(t\sigma))_*, \tag{4.13}$$

где $t \in (0, \infty)$. Используя ход рассуждений, примененный при доказательстве основной теоремы из работы [34], можно убедиться в том, что неравенство (4.13) будет выполнено при $\beta = 2/(\pi - 2)$. Следовательно, мажоранта $\widetilde{\Psi}(t) = t^{1/(\pi-2)}$ удовлетворяет условию (4.3). Теорема 4 доказана. $\square$

Через $\mathcal{W}^r(\Lambda_k, \Psi)$, где $r, k \in \mathbb{N}$, а функция Ψ есть мажоранта, обозначим класс функций $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, для каждой из которых при любом $t \in (0, \infty)$ выполняется неравенство $\Lambda_k(f^{(r)}, t) \leqslant \Psi(t)$.

Теорема 5. *Пусть $r, k \in \mathbb{N}$; $\nu \in (0, \infty)$ — произвольное число; Ψ — мажоранта, удовлетворяющая условию*

$$\frac{\Psi^2(t)}{\Psi^2(\pi/\sigma)} \geqslant \frac{2^k}{C_{2k}^k \sigma t} \int\limits_0^{\sigma t} (1 - \cos h)^k dh \tag{4.14}$$

для любых значениях $t \in (0, \infty)$ и $\sigma \in (\nu\pi, \infty)$. Тогда имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_\nu(\mathcal{W}^r(\Lambda_k, \Psi); L_2(\mathbb{R})) &= \mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathcal{W}^r(\Lambda_k, \Psi)) \\ &= \sup\{\|f - \mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\| : f \in \mathcal{W}^r(\Lambda_k, \Psi)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{C_{2k}^k}\ \pi^r \nu^r}\ \Psi\Big(\frac{1}{\nu}\Big), \end{aligned} \tag{4.15}$$

где $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ — любой из средних ν-поперечников, рассмотренных ранее. При этом пара $(L_2^r(\mathbb{R}), \mathcal{L}_{\nu\pi})$ является экстремальной для среднего линейного ν-поперечника $\overline{\delta}_\nu(\mathcal{W}^r(\Lambda_k, \Psi); L_2(\mathbb{R}))$, а подпространство $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ будет экстремальным для среднего колмогоровского ν-поперечника $\overline{d}_\nu(\mathcal{W}^r(\Lambda_k, \Psi); L_2(\mathbb{R}))$. Множество мажорант, удовлетворяющих условию (4.14) не пусто.

Доказательство. Используя формулу (2.16), в которой полагаем $\sigma = \nu\pi$ и $t = \pi$, для произвольной функции $f \in L_2^r(\mathbb{R})$ запишем

$$\mathcal{A}_{\nu\pi}(f) \leqslant \frac{1}{\sqrt{C_{2k}^k}\ \pi^r \nu^r}\ \Lambda_k\Big(f^{(r)}, \frac{1}{\nu}\Big). \tag{4.16}$$

Из соотношений (4.2) и (4.16), а также в силу определения класса $\mathcal{W}^r(\Lambda_k, \Psi)$ получаем следующие оценки сверху:

$$\overline{\Pi}_\nu(\mathcal{W}^r(\Lambda_k, \Psi); L_2(\mathbb{R})) \leqslant \overline{\delta}_\nu(\mathcal{W}^r(\Lambda_k, \Psi); L_2(\mathbb{R})) \leqslant \sup\{\|f - \mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\|$$

$$: f \in \mathcal{W}^r(\Lambda_k, \Psi)\} = \mathcal{A}_{\nu\pi}(\mathcal{W}^r(\Lambda_k, \Psi)) \leqslant \frac{1}{\sqrt{C_{2k}^k}\ \pi^r \nu^r}\ \Psi\Big(\frac{1}{\nu}\Big). \qquad (4.17)$$

Для получения оценок снизу рассматриваемых экстремальных характеристик класса $\mathcal{W}^r(\Lambda_k, \Psi)$ полагаем $\widehat{\sigma} := \nu\pi(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0, \widetilde{\nu})$, $\widetilde{\nu} := \min(\nu, 1/\nu)$, и рассмотрим множество функций $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\widetilde{\rho}_\varepsilon) := \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} \cap \widetilde{\rho}_\varepsilon BL_2(\mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} : \|g\| \leqslant \widetilde{\rho}_\varepsilon\}$. Здесь

$$\widetilde{\rho}_\varepsilon := \frac{1}{\sqrt{C_{2k}^k}\ (\widehat{\sigma})^r}\ \Psi\Big(\frac{1}{\nu(1+\varepsilon)}\Big). \qquad (4.18)$$

Используя формулы (2.18)–(2.19) и (4.8), для произвольного элемента $g \in \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$ запишем

$$\Lambda_k^2(g^{(r)}, t) = \frac{2^k}{t} \int\limits_0^t dh \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} (1 - \cos(hu))^k u^{2r} |\mu(u)|^2 du$$

$$= 2^k \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} |\mu(u)|^2 \Big\{ \frac{u^{2r-1}}{t} \int\limits_0^{ut} (1 - \cos h)^k dh \Big\} du = 2^k \int\limits_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} |\mu(u)|^2 G_k(t, u) du. \qquad (4.19)$$

Поскольку, как отмечалось ранее в ходе доказательства теоремы 2, функция G_k, как функция от u, при любом фиксированном значении $t \in (0, \infty)$ является четной и неотрицательной на $\mathbb{R}$, а также монотонно возрастающей на множестве $\mathbb{R}_+$, то из (4.19) с учетом формулы (4.9) получаем

$$\Lambda_k^2(g^{(r)}, t) \leqslant 2^k G_k(t, \widehat{\sigma}) \|g\|^2. \qquad (4.20)$$

Учитывая формулу (2.19) для функции G_k, а также используя условие (4.14) для мажоранты Ψ, для произвольного элемента $g \in \mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\widetilde{\rho}_\varepsilon)$ из неравенства (4.20) имеем

$$\Lambda_k^2(g^{(r)}, t) \leqslant 2^k (\widehat{\sigma})^{2r} \frac{\|g\|^2}{\widehat{\sigma} t} \int\limits_0^{\widehat{\sigma} t} (1 - \cos h)^k dh$$

$$\leqslant \frac{2^k}{C_{2k}^k \widehat{\sigma} t} \Big\{ \int\limits_0^{\widehat{\sigma} t} (1 - \cos h)^k dh \Big\} \Psi^2\Big(\frac{\pi}{\widehat{\sigma}}\Big) \leqslant \Psi^2(t),$$

где $t \in (0, \infty)$. Следовательно, $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\widetilde{\rho}_\varepsilon) \subset \mathcal{W}^r(\Lambda_k, \Psi)$. Поскольку

$$\overline{b}_\nu(\mathcal{W}^r(\Lambda_k, \Psi); L_2(\mathbb{R})) \geqslant \overline{b}_\nu(\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\widetilde{\rho}_\varepsilon), L_2(\mathbb{R})) \geqslant \widetilde{\rho}_\varepsilon,$$

то с учетом формул (4.18) и (4.2) отсюда получаем

$$\overline{\Pi}_\nu(\mathcal{W}^r(\Lambda_k,\Psi);L_2(\mathbb{R}))\geqslant\frac{1}{\sqrt{C_{2k}^k(\pi\nu(1+\varepsilon))^r}}\;\Psi\Big(\frac{1}{\nu(1+\varepsilon)}\Big).\qquad(4.21)$$

Поскольку левая часть неравенства (4.21) не зависит от ε, то вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon\in(0,\widetilde{\nu})$ от его правой части, имеем

$$\overline{\Pi}_\nu(\mathcal{W}^r(\Lambda_k,\Psi);L_2(\mathbb{R}))\geqslant\frac{1}{\sqrt{C_{2k}^k\;\pi^r\nu^r}}\;\Psi\Big(\frac{1}{\nu}\Big).\qquad(4.22)$$

Требуемые равенства (4.15) вытекают из соотношений (4.17) и (4.22). В заключение убедимся в том, что множество мажорант, удовлетворяющих условию (4.14), не пусто. Воспользовавшись для этого практически дословно рассуждениями, проведенными в конце доказательства теоремы 5 из работы [24], можно показать, что для мажоранты $\widehat{\Psi}(t):=t^\xi$, где $\xi=2^{2k}/C_{2k}^k-1$, соотношение (4.14) будет выполнено. Теорема 5 доказана. $\square$

Через $\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi)$, где $r\in\mathbb{N}$; $p\in(0,2]$; Ψ — мажоранта, обозначим класс функций $f\in L_2^r(\mathbb{R})$, для производных r-го порядка $f^{(r)}$ которых выполняется условие $\int_0^x\Lambda_1^p(f^{(r)},t)dt\leqslant\Psi^p(x)$ для любого $x\in(0,\infty)$.

Теорема 6. *Пусть $r\in\mathbb{N}$; $\nu\in(0,\infty)$ — произвольное число; $p\in[1/r,2]$; Ψ — мажоранта, удовлетворяющая условию*

$$\frac{\Psi^p(x)}{\Psi^p(\pi/\sigma)}\geqslant\frac{\int_0^{\sigma x}(1-\mathrm{sinc}\,(t))^{p/2}dt}{\int_0^{\pi}(1-\mathrm{sinc}\,(t))^{p/2}dt}\qquad(4.23)$$

для произвольных значений $x\in(0,\infty)$ и $\sigma\in(\nu\pi,\infty)$. Тогда имеют место следующие равенства:

$$\overline{\Pi}_\nu(\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi);L_2(\mathbb{R}))=\mathcal{A}_{\nu\pi}(\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi))$$

$$=\sup\{\|f-\mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\|:f\in\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi)\}$$

$$=\frac{(\nu\pi)^{1/p-r}}{\sqrt{2}}\Big\{\int_0^\pi(1-\mathrm{sinc}\,(t))^{p/2}dt\Big\}^{-1/p}\;\Psi\Big(\frac{1}{\nu}\Big),\qquad(4.24)$$

где $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ — любой из рассмотренных ранее средних ν-поперечников. При этом пара $(L_2^r(\mathbb{R}),\mathcal{L}_{\nu\pi})$ будет экстремальной для $\overline{\delta}_\nu(\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi);L_2(\mathbb{R}))$, подпространство $\mathbb{B}_{\nu\pi,2}$ есть экстремальным для $\overline{d}_\nu(\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi);L_2(\mathbb{R}))$, а множество мажорант, удовлетворяющих условию (4.23), не пусто.

Доказательство. Полагая, как и в двух предшествующих теоремах $\sigma = \nu\pi$ и используя следствие 2, в котором считаем, что $\varphi \equiv 1$; $x = 1/\nu$; $k = 1$, получаем

$$\mathcal{A}_{\nu\pi}(f) \leqslant \frac{(\nu\pi)^{1/p-r}}{\sqrt{2}}\Big\{\int\limits_0^\pi (1-\operatorname{sinc}(t))^{p/2}dt\Big\}^{-1/p}\Big\{\int\limits_0^{1/\nu} \Lambda_1^p(f^{(r)},t)dt\Big\}^{1/p}.$$

Из данного неравенства, определения класса $\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi)$ и из соотношения (4.2) следуют оценки сверху

$$\overline{\Pi}_\nu(\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi);L_2(\mathbb{R})) \leqslant \overline{\delta}_\nu(\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi);L_2(\mathbb{R}))$$

$$\leqslant \sup\{\|f-\mathcal{L}_{\nu\pi}(f)\| : f\in \widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi)\} = \mathcal{A}_{\nu\pi}(\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi))$$

$$\leqslant \frac{(\nu\pi)^{1/p-r}}{\sqrt{2}}\Big\{\int\limits_0^\pi (1-\operatorname{sinc}(t))^{p/2}dt\Big\}^{-1/p}\ \Psi\Big(\frac{1}{\nu}\Big). \tag{4.25}$$

Для получения оценок снизу исследуемых экстремальных характеристик класса $\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi)$ по аналогии с рассуждениями, проведенными при доказательстве теорем 4 и 5, рассмотрим множество целых функций
$\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon^*) := \mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}\cap \rho_\varepsilon^* BL_2(\mathbb{R}) = \{g\in\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2} : \|g\|\leqslant \rho_\varepsilon^*\}$, где $\widehat{\sigma} := \nu\pi(1+\varepsilon)$,

$$\rho_\varepsilon^* := \frac{(\widehat{\sigma})^{1/p-r}}{\sqrt{2}}\Big\{\int\limits_0^\pi (1-\operatorname{sinc}(t))^{p/2}dt\Big\}^{-1/p}\ \Psi\Big(\frac{1}{\nu(1+\varepsilon)}\Big), \tag{4.26}$$

$\varepsilon\in(0,\widetilde{\nu})$; $\widetilde{\nu} := \min(\nu,1/\nu)$. Учитывая вид функции G_k, приведенный в формуле (2.19), при $k=1$, и возводя обе части неравенства (4.20) в степень $p/2$, для произвольной функции $g\in\mathbb{B}_{\widehat{\sigma},2}$ имеем:

$$\Lambda_1^p(g^{(r)},t) \leqslant 2^{p/2}(\widehat{\sigma})^{rp}(1-\operatorname{sinc}(\widehat{\sigma}t)^{p/2}\|g\|^p.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по переменной t в пределах от 0 до x, где $x\in(0,\infty)$ — произвольное число, в силу ограничения (4.23) и соотношения (4.26) для любого элемента $g\in\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon^*)$ получаем

$$\int\limits_0^x \Lambda_1^p(g^{(r)},t)dt \leqslant \frac{\int_0^{\widehat{\sigma}x}(1-\operatorname{sinc}(t))^{p/2}dt}{\int_0^\pi(1-\operatorname{sinc}(t))^{p/2}dt}\ \Psi^p\Big(\frac{\pi}{\widehat{\sigma}}\Big) \leqslant \Psi^p(x).$$

Следовательно, $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon^*)\subset\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi)$. Используя определение среднего бернштейновского ν-поперечника, запишем $\overline{b}_\nu(\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1,\Psi);L_2(\mathbb{R}))\geqslant$

$\overline{b}_\nu(\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon^*), L_2(\mathbb{R})) \geqslant \rho_\varepsilon^*$. Используя формулы (4.2) и (4.26), отсюда имеем

$$\overline{\Pi}_\nu(\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1, \Psi); L_2(\mathbb{R}))$$
$$\geqslant \frac{(\nu\pi(1+\varepsilon))^{1/p-r}}{\sqrt{2}} \Big\{ \int\limits_0^\pi (1-\operatorname{sinc}(t))^{p/2} dt \Big\}^{-1/p} \Psi\Big(\frac{1}{\nu(1+\varepsilon)}\Big). \tag{4.27}$$

После вычисления верхней грани по $\varepsilon \in (0, \widetilde{\nu})$ от правой части неравенства (4.27) получаем

$$\overline{\Pi}_\nu(\widehat{\mathcal{W}}_p^r(\Lambda_1, \Psi); L_2(\mathbb{R})) \geqslant \frac{(\nu\pi)^{1/p-r}}{\sqrt{2}} \Big\{ \int\limits_0^\pi (1-\operatorname{sinc}(t))^{p/2} dt \Big\}^{-1/p} \Psi\Big(\frac{1}{\nu}\Big). \tag{4.28}$$

Требуемые равенства (4.24) следуют из соотношений (4.25) и (4.28).

Практически аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 6 из работы [24], можно показать, что мажоранта $\Psi^*(x) := x^\xi$, где $\xi = \pi\big/\big(p\int_0^\pi (1-\operatorname{sinc}(t))^{p/2} dt\big)$ будет удовлетворять условию (4.23), чем и завершается доказательство теоремы 6. □

В заключение отметим, что результаты теорем 2, 3 и 5, 6 были анонсированы без доказательств в Трудах Международной летней математической школы-конференции С. Б. Стечкина [35].

Литература

[1] С. Н. Бернштейн, *О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени (1912)*, Собр. сочинений, Т.2, М., АН СССР, 1952, 371–375.

[2] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, М.-Л., Гостехиздат, 1947.

[3] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960.

[4] М. Ф. Тиман, *Приближение функций, заданных на всей вещественной оси, целыми функциями экспоненциального типа* // Изв. вузов. Матем., (1968), No. 2, 89–101.

[5] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, М., Наука, 1977.

[6] И. И. Ибрагимов, *Теория приближения целыми функциями*, Баку, Элм, 1979.

[7] И. И. Ибрагимов, Ф. Г. Насибов, *Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени* // Докл. АН СССР, **194** (1970), No. 5, 1013–1016.

[8] В. Ю. Попов, *О наилучших среднеквадратичных приближениях целыми функциями экспоненциального типа* // Изв. вузов. Матем., (1972), No. 6, 65–73.

[9] А. Г. Бабенко, *Точное неравенство Джексона-Стечкина в пространстве* $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН, (1998), No. 5, 3–7.

[10] V. V. Arestov, *On Jackson inequalities for approxination in L^2 of periodic functions by trigonometric polynomials and of functions on the line by entire functions*, Approxim. Theory, Sofia : M. Drinov Acad. Publ. House, 2004, 1–19.

[11] А. А. Лигун, В. Г. Доронин, *Точные константы в неравенствах типа Джексона для L_2-аппроксимации на прямой* // Укр. матем. журн., **61** (2009), No. 1, 92–98.

[12] S. B. Vakarchuk, *Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2-approximatiuon on the line and exact values of mean widths of functional classes* // East J. Approxim., **10** (2044), No. 1–2, 27–39.

[13] С. Б. Вакарчук, В. Г. Доронин, *Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями конечной степени на прямой и точные значения средних поперечников функциональных классов* // Укр. матем. журн., **62** (2010), No. 8, 1032–1043.

[14] S. B. Vakarchuk, *On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. I.* // J. Math. Sci., **188** (2013), No. 2, 146–166.

[15] С. Б. Вакарчук, М. Ш. Шабозов, М. Р. Лангаршоев, *О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа в $L_2(\mathbb{R})$ и средних ν-поперечниках некоторых функциональных классов* // Изв. вузов. Матем., (2014), No. 7, 1–19.

[16] С. Б. Вакарчук, *Неравенства типа Джексона для специальных модулей непрерывности на всей вещественной оси и точные значения средних ν-поперечников классов функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$* // Укр. матем. журн., **66** (2014), No. 6, 740–766.

[17] С. Б. Вакарчук, *Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями экспоненциального типа и средние ν-поперечники классов функций на прямой* // Матем. заметки, **96** (2014), No. 6, 827–848.

[18] L. Leindler, *Uber strukturbedingungen fur fourierreihen* // Math. Zeitschr., **88** (1965), 418–431.

[19] Р. М. Тригуб, *Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе* // Изв. АН СССР. Сер. матем., **44** (1980), No. 6, 1378–1409.

[20] К. В. Руновский, *О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространстве L_p, $0 < p < 1$* // Матем. сб., **185** (1994), No. 8, 81–102.

[21] Н. П. Пустовойтов, *Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усредненные разности и многомерная теорема Джексона* // Матем. сб., **188** (1997), No. 10, 95–108.

[22] С. Б. Вакарчук, *О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников* // Матем. заметки, **70** (2001), No. 3, 334–345.

[23] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, *О неравенствах типа Джексона и поперечниках классов периодических функций в пространстве L_2* // Сб. тр. Ин-та матем. НАН Украины "Теория приближения и смежные вопросы **5** (2008), No. 1, 37–48.

[24] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, *Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций* // Матем. заметки, **99** (2016), No. 2, 215–238.

[25] K. G. Ivanov, *On a new characteristic of functions. I.* // Сердика Бълг. мат. списание, **8** (1982), No. 3, 262–279.

[26] K. G. Ivanov, *On a new characteristic of functions. II. Direct and converse theorems of the best algebraic approximation in* $C[-1,1]$ *and* $L_p[-1,1]$ // Плиска Бълг. мат. студ., (1983), No. 5, 151–163.

[27] Z. Ditzian, V. Totik, *Moduli of Smoothness*, New-York : Springer-Verlag, 1987.

[28] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, М. : Наука, 1971.

[29] В. Д. Рыбасенко, И. Д. Рыбасенко, *Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики*, М. : Наука, 1987.

[30] Г. Г. Магарил-Ильяев, *Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой* // Докл. АН СССР, **318** (1991), No. 1, 35–38.

[31] Г. Г. Магарил-Ильяев, *Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой* // Матем. сб., **182** (1991), No. 11, 1635–1656.

[32] В. М. Тихомиров, *Об аппроксимативных характеристиках гладких функций многих переменных*, В кн.: Теория кубатурных формул и вычислительная математика, Новосибирск, Наука, 1980, 183–188.

[33] S. B. Vakarchuk, *On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. II.* // J. Math. Sci., **190** (2013), No. 4, 613–630.

[34] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, *О наилучшем полиномиальном приближении в пространстве* L_2 *и поперечниках некоторых классов функций* // Укр. матем. журн., **64** (2012), No. 8, 1025–1032.

[35] С. Б. Вакарчук, *Точные константы в неравенствах типа Джексона - Стечкина для наилучшей среднеквадратической аппроксимации целыми функциями экспоненциального типа в пространстве* $L_2(\mathbb{R})$ // Труды Междунар. летней матем. школы-конф. С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, г.Душанбе, 15-25 августа 2016), Душанбе, 2016, 73–77.

Сведения об авторах

Сергей Борисович Вакарчук

Университет им. Альфреда Нобеля
Днепропетровск, Украина
E-Mail: sbvakarchuk@mail.ru