Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 3, 388 – 406

Поточечные оценки решений двуфазных эллиптических уравнений

Игорь И. Скрыпник, Екатерина А. Буряченко

Аннотация. С помощью нелинейных потенциалов Вольфа в работе получены поточечные оценки обобщенных решений неоднородных квазилинейных двухфазных эллиптических уравнений дивергентного вида.

2010 MSC. 35J15, 35J60, 35J62.

Ключевые слова и фразы. Потенциал Вольфа, двухфазное квазилинейное уравнение, уравнения дивергентного вида, уравнения эллиптичекого типа, неравенство Гарнака.

1. Введение

В данной работе с помощью нелинейных потенциалов Вольфа получены поточечные оценки обобщенных решений неоднородных квазилинейных эллиптических уравнений дивергентного вида

$$-\mathrm{div}\left(g(a(x), |\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = f(x), \tag{1.1}$$

с функцией $g(a(x),\, |\xi|) = |\xi|^{p-1} + a(x)|\xi|^{q-1}$ при условиях

$$0 \le a(x) \in C^{0,\alpha}(\Omega),\, \alpha \in (0,\, 1],\, 1 < p \le q \le \min\left(p+\alpha,\, \frac{n(p-1)}{n-p}\right),$$

$q < n$.

Данный результат обобщает классический результат T. Kilpeläinen, J. Maly, которые в работе [1] доказали поточечные оценки решений квазилинейного эллиптического уравнения с оператором $p-$

Статья поступила в редакцию 15.08.2016
Работа выполнена при поддержке МОН Украины (гранты № 0115U000136, № 0116U004691) и Грантовой поддержке ДФФД Украины (проект № 0116U007160).

ISSN 1810 – 3200.

Лапласа и мерой μ в правой части с помощью нелинейного потенциала Вольфа $W^{\mu}_{\beta,p}(x_0, R)$. Позднее эти оценки были обобщены на сильно нелинейные уравнения в работе D. Labutin [2], а также на сильно нелинейные и субэллиптические квазилинейные уравнения в статье N. Trudinger и X. Wang [3]. В дальнейшем полученные оценки нашли свое применение и явились хорошим инструментом при исследовании вопросов разрешимости и регулярности решений разничных линейных, квазилинейных и нелинейных уравнений (см. работы M. Biroli [4], F. Duzaar, J. Kristensen, G. Mingione [5], J. Maly, W. Ziemer [6], G. Mingione [7], N. Phuc, I. Verbitsky [8], I.I. Skrypnik [9]).

Благодаря тому, что некоторые квазилинейные уравнения с нестандартными условиями роста применяются при моделировании поведения электрореологических жидкостей (M. Ruzicka [10]), качествен ная теория таких уравнений продолжает развиваться, все более и более вызывая к себе интерес исследователей.

Так, для уравнений вида

$$-\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) + V\,|u|^{p(x)-2}u = f,$$

были исследованы вопросы локальной регулярности решений, получено неравенство Гарнака, доказан критерий Винера при естественных предположениях на функцию $p(x)$. Обзор соответствующих результатов можно найти, например, в работах Y.A. Alkhutov [11], Y.A. Alkhutov, O.V. Krasheninnikova [12], X. Fan and D. Zho [13], V. Liskevich, I.I. Skrypnik [14].

С другой стороны, примеры, построенные M. Giaquinta [15] и P. Marcellini [16] показали, что если функция $g(t)$ удовлетворяет условиям

$$t^{p-1} \le g(t) \le t^{q-1},$$

то может существовать неограниченное решение (если p и q слишком далеки друг от друга). Для таких функций $g(t)$, в предположении

$$q \le \frac{np}{n-p},\; 1 < p < n$$

были исследованы локальные свойства решений (см. [17–33]).

Для уравнений

$$-\mathrm{div}\left(g(|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = f(x),$$

при условиях

$$p-1 \le \frac{g'(t)}{g(t)} \le q-1,\; f \in L^s,\; s > n,$$

в работе G. Lieberman [34] была установлена локальная ограниченность решений, непрерывность по Гельдеру, а также доказано неравенство Гарнака. Позднее, эти результаты были обобщены многими авторами, например, P. Baroni, M. Colombo, G. Mingione [17], M. Carozza, J. Kristensen, A. Passarelli di Napoli [18], L. Esposito, G. Mingione [19], N. Fusco, C. Sbordone [20], P. Harjulehto, J. Kinnunene, T. Lukkari [21], F. Leonetti, E. Mascolo [23], G. Mingione [7], G. Moscariello, L. Nania [28], G. Moscariello [27].

Естественно предположить, что для уравнений

$$-\mathrm{div}\left(g(a(x),|\nabla u|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)=f(x)$$

с коэффициентами, для которых потенциалы Вольфа будут конечны, будет справедливо неравенство Гарнака. Основная трудность при доказательстве поточечных оценок здесь будет состоять в том, что в данной ситуации не применимы ни методика E. De Giorgi [35], ни J. Moser [36]. Однако, есть возможность применить метод, разработанный ранее в работе [1] для $p-$ Лапласа. Следуя итерационному методу этой работы, мы получаем двусторонние поточечные оценки обобщенных решений квазилинейных двухфазных эллиптических уравнений дивергентного вида.

2. Формулировка основных результатов

В ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, рассматривается неоднородное квазилинейное еллиптическое уравнение дивергентного типа:

$$-\mathrm{div}A(x,\,\nabla u)=f(x)\geq 0, \tag{2.1}$$

где $f(x)\in L^1(\Omega)$. Будем предполагать, что функция $A(x,\,\xi):\Omega\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $A(x,\,\xi)$ удовлетворяет условию Каратеодори,
2) $A(x,\xi)\xi\geq\mu_1(|\xi|^p+a(x)|\xi|^q)$,
3) $|A(x,\xi)|\leq\mu_2(|\xi|^{p-1}+a(x)|\xi|^{q-1})$,

с некоторыми постоянными μ_1, $\mu_2>0$. Будем считать, что

$$0\leq a(x)\in C^{0,\,\alpha}(\Omega),\ \alpha\in(0,\,1],$$
$$1<p\leq q\leq\min\left(p+\alpha,\,\frac{n(p-1)}{n-p}\right),\ q<n. \tag{2.2}$$

Примером уравнений вида (2.1) с приведенными выше условиями 1)–3) могут служить уравнения вида (1.1), в которых $g(a(x),\,t)=|t|^{p-1}+a(x)|t|^{q-1}$.

Введем необходимые определения.

Определение 2.1. *Пусть $G(a(x),t) = t(t^{p-1} + a(x)t^{q-1})$. Тогда обозначим через $W^{1,G}(\Omega)$ класс функций u, слабо дифференцируемых в Ω и удовлетворящих условию:*

$$\int\limits_{\Omega} G(a(x),\, |\nabla u|)\, dx < \infty.$$

Определение 2.2. *Будем говорить, что $u-$ слабое решение уравнения (2.1), если $u \in W^{1,G}(\Omega)$ и удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Omega} A(x,\, \nabla u)\nabla\varphi\, dx = \int\limits_{\Omega} f\,\varphi\, dx, \tag{2.3}$$

для всех $\varphi \in \overset{0}{W}{}^{1,G}(\Omega)$.

В работе доказаны поточечные оценки неотрицательного слабого решения двуфазного уравнения (2.1) через нелинейные потенциалы Вольфа:

$$W^f_{1,p}(x_0,\, R) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\rho_j^{p-n}\int\limits_{B_{\rho_j}(x_0)} f\, dx\right)^{\frac{1}{p-1}},\ \rho_j = \frac{R}{2^j},\ j = 0,\, 1,\, ...$$

$$W^f_{1,q}(x_0,\, R) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\rho_j^{q-n}\int\limits_{B_{\rho_j}(x_0)} f\, dx\right)^{\frac{1}{q-1}},\ \rho_j = \frac{R}{2^j},\ j = 0,\, 1,\, ...,$$

в предположении, что ряды в предыдущих формулах сходятся, т.е потенциалы Вольфа конечны. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $u \in W^{1,G}(\Omega) \cap L^{\infty}-$ неотрицательное слабое решение уравнения (2.1). Предположим, что выполнены условия (2.2) и положим $[a]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \sup\limits_{x,y\in\Omega,\, x\neq y} \frac{|a(x)-a(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$. Предположим также, что точка $x_0 \in \Omega$ такова, что $B_{4\rho}(x_0) \subset \Omega$. Тогда существуют такие постоянные c_1, $c_2 > 0$, зависящие только от p, q, n, $[a]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$,*
$||u||^{q-p}_{L^{\infty}(\Omega)}$, такие что при условии $a(x_0) = 0$ имеет место следующая оценка:

$$c_1 W^f_{1,p}(x_0,\rho) \leq u(x_0) \leq c_2 \inf_{B_{\rho}(x_0)} u + c_2 W^f_{1,p}(x_0, 2\rho). \tag{2.4}$$

Если же $a(x_0) > 0$ *и* $\rho_0^\alpha = \frac{a(x_0)}{4[a]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}} \geq \rho^\alpha$, *тогда существуют постоянные* c_3, $c_4 > 0$, *зависящие от* p, q, n, $[a]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$, $||u||^{q-p}_{L^\infty(\Omega)}$, $a(x_0)$, *такие, что выполнена оценка:*

$$c_3 W^f_{1,q}(x_0,\rho) \leq \rho + u(x_0) \leq 3\rho + c_4 \inf_{B_\rho(x_0)} u + c_4 W^f_{1,q}(x_0, 2\rho). \tag{2.5}$$

При условиях $a(x_0) > 0$ *и* $\rho_0 < \rho$ *выполнена следующая оценка*

$$c_3 W^f_{1,q}(x_0,\rho) + c_3(W^f_{1,p}(x_0,\rho) - W^f_{1,p}(x_0,\rho_0)) \leq \rho + u(x_0)$$

$$\leq 3\rho + c_4 \inf_{B_\rho(x_0)} u + c_4 W^f_{1,q}(x_0,2\rho) + c_4(W^f_{1,p}(x_0,2\rho) - W^f_{1,p}(x_0,2\rho_0)). \tag{2.6}$$

Замечание 2.1. В случае, когда $a(x_0) = 0$ из неравенства (2.4) следует известный результат Kilpeläinen–Maly [1], которые получили поточечные оценки решений квазилинейного эллиптического уравнения с оператором p-Лапласа в левой части и мерой μ в правой части с помощью нелинейного потенциала Вольфа $W^\mu_{\beta,\,p}(x_0,\, R)$:

$$W^\mu_{\beta,\,p}(x_0,\, R) := \sum_{j=0}^\infty \left(\frac{\mu(B_{\rho_j}(x_0))}{\rho_j^{n-\beta p}} \right)^{\frac{1}{p-1}}, \ \rho_j = \frac{R}{2^j},\ j = 0,\, 1,\, 2, ... \tag{2.7}$$

Заметим также, что двуфазные эллиптические уравнения дивергентного вида были впервые изучены В.В. Жиковым [37, 38], в качестве моделей строго анизотропных материалов, а также для описания явления Лаврентьева. Непрерывность по Гельдеру и неравенство Гарнака для ограниченных решений однородного уравнения (2.1) (с функцией $f \equiv 0$) при условиях (2.2) были получены P. Baroni, M. Colombo, G. Mingione [17], а также L. Esposito, G. Mingione [19].

Теорема 1 является следствием слабого неравенства Гарнака (см., напр. [17]) и следующего результата.

Теорема 2.2. *Пусть* $u \in W^{1,G}(\Omega) \cap L^\infty$ *— неотрицательное слабое решение уравнения* (2.1). *Предположим, что выполнены условия* (2.2) *и точка* $x_0 \in \Omega$ *такова, что* $B_{4\rho}(x_0) \subset \Omega$.

Пусть $0 < \lambda < \min\left\{1,\, \frac{p(n-1)-q(n-p)}{n+(q-p)(n-p)}\right\}$. *Тогда при условии* $a(x_0) = 0$ *имеет место следующая оценка:*

$$u(x_0) \leq \gamma \left(\rho^{-n} \int\limits_{B_\rho(x_0)} u^{(1+\lambda)(p-1)}\, dx \right)^{\frac{1}{(1+\lambda)(p-1)}} + \gamma W^f_{1,p}(x_0,\rho). \tag{2.8}$$

Если же $a(x_0) > 0$ *и* $\rho_0^\alpha = \frac{a(x_0)}{4[a]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}} \geq \rho^\alpha$, *тогда выполнена оценка:*

$$u(x_0) \leq \gamma \left(\rho^{-n} \int\limits_{B_\rho(x_0)} u^{(1+\lambda)(q-1)}\, dx \right)^{\frac{1}{(1+\lambda)(q-1)}} + \gamma W^f_{1,q}(x_0, \rho). \quad (2.9)$$

При условиях $a(x_0) > 0$ *и* $\rho_0 < \rho$ *выполнена следующая оценка*

$$u(x_0) \leq \gamma \left(\left(\rho^{-n} \int\limits_{B_\rho(x_0)} u^{(1+\lambda)(q-1)}\, dx \right)^{\frac{1}{(1+\lambda)(q-1)}} \right.$$

$$\left. + W^f_{1,q}(x_0,\, 2\rho_0) + (W^f_{1,p}(x_0,\, 2\rho) - W^f_{1,p}(x_0,\, 2\rho_0)) \right). \quad (2.10)$$

Здесь γ некоторая постоянная, зависящая от μ_1, μ_2, p, q, n, $[a]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$, $||u||^{q-p}_{L^\infty(\Omega)}$.

Аналогичным образом, для неотрицательных слабых решений уравнений

$$-\mathrm{div} \left(g(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = f(x) \geq 0, \quad (2.11)$$

с функцией $g(t)$, удовлетворяющей условиям:

$$g \in C(\mathbb{R}^1_+),\ \left(\frac{t}{\tau}\right)^{p-1} \leq \frac{g(t)}{g(\tau)} \leq \left(\frac{t}{\tau}\right)^{q-1},\ t \geq \tau > 0,\ 1 < p \leq q < n. \quad (2.12)$$

доказано неравенство типа Гарнака через нелинейный потенциал Вольфа $W^f_{\beta,g}(x_0, R)$:

$$W^f_{\beta,g}(x_0, R) := \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j \bar{g} \left(\rho_j^{\beta-n} \int\limits_{B_{\rho_j}(x_0)} f\, dx \right),\ \rho_j = \frac{R}{2^j},\ j = 0,\, 1,\, 2, ... \quad (2.13)$$

где $\bar{g}-$функция обратная к функции g.

Основным результатом в данном направлении будет теорема

Теорема 2.3. *Пусть* u *— неотрицательное слабое решение уравнения* (2.11), $f \geq 0$, *и выполнены условия* (2.12). *Тогда существуют постоянные* c_5, $c_6 > 0$, *зависящие только от* p, q, n, μ_1, μ_2, *такие что: для каждой точки* $x_0 \in \Omega$, $B_{4\rho}(x_0) \subset \Omega$, *имеют место следующие оценки:*

$$c_5 W^f_{1,g}(x_0, \rho) \leq u(x_0) \leq c_6 \inf_{B_{\rho(x_0)}} u + c_6 W^f_{1,g}(x_0, 2\rho). \quad (2.14)$$

Потенциалы Вольфа $W_{1,g}^{f}$ *здесь определены согласно формуле* (2.13) *при* $\beta = 1$.

3. Оценка сверху решения, доказательство теоремы 2.2

3.1. Вспомагательные утверждения

Докажем вначале ряд вспомагательных утверждений.

Лемма 3.1. *Пусть* $0 < \lambda < 1$. *Тогда для каждого слабого решения* u *уравнения* (2.1), *любых* $0 < l,\ \delta,\ k \geq q$ *и функции* $\xi \in C_0^{\infty}(B_r(x_0))$, *удовлетворяющей условиям*

$$0 \leq \xi \leq 1,\ \xi(x) \equiv 1,\ \forall\, x \in B_{\frac{r}{2}}(x_0),\ |\nabla \xi| \leq \frac{2}{r}$$

при $a(x_0) = 0$, *а также при* $a(x_0) > 0$, $r > \rho_0$ *справедлива следующая оценка:*

$$\int\limits_{L} \left(1 + \frac{u-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} |\nabla u|^p \xi^k \, dx$$

$$\leq \gamma \left(\left(\frac{\delta}{r}\right)^p + \left(\frac{\delta}{r}\right)^q \right) \int\limits_{L} \left(1 + \frac{u-l}{\delta}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi^{k-q} \, dx + \gamma\delta \int\limits_{B_r(x_0)} f \, dx, \tag{3.1}$$

где $L = B_r(x_0) \cap \{u > l\}$. *В качестве* γ *обозначена постоянная, зависящая только от* p, q, n, μ_1, μ_2, *значение которой может меняться на протяжении работы.*

Доказательство. В интегральное тождество (2.3), соответствующее уравнению (2.1), подставим в качестве пробной функции $\varphi = \left(\int\limits_{l}^{u} (1 + \frac{s-l}{\delta})^{-1-\lambda} \, ds \right)_{+} \xi^k$. Используя условия 2)–3), неравенство Юнга, $|a(x) - a(x_0)| \leq [a]_{\alpha} r^{\alpha}, \forall\, x \in B_r(x_0)$, а также неравенство $\left(\int\limits_{l}^{u} (1 + \frac{s-l}{\delta})^{-1-\lambda} \, ds \right)_{+} \leq \gamma\delta$, получим требуемую оценку (3.1). $\square$

Лемма 3.2. *Пусть* $0 < \lambda < 1$. *Тогда для каждого решения* u *уравнения* (2.1), *любых* $0 < l,\ \delta,\ k \geq q$ *и функции* $\xi \in C_0^{\infty}(B_r(x_0))$, *удовлетворяющей условиям*

$$0 \leq \xi \leq 1,\ \xi(x) \equiv 1,\ \forall\, x \in B_{\frac{r}{2}}(x_0),\ |\nabla \xi| \leq \frac{2}{r}$$

при $a(x_0) > 0$, $r \le \rho_0$ *справедлива следующая оценка:*

$$\int\limits_L \left(1 + \frac{u-l}{\delta}\right)^{-1-\lambda} |\nabla u|^q \xi^k \, dx$$

$$\le \gamma \left(\frac{\delta}{r}\right)^q \int\limits_L \left(1 + \frac{u-l}{\delta}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi^{k-q} \, dx + \gamma\delta \int\limits_{B_r(x_0)} f \, dx, \qquad (3.2)$$

где $L = B_r(x_0) \cap \{u > l\}$.

Доказательство. В интегральное тождество (2.3), соответствующее уравнению (2.1), подставим в качестве функции $\varphi = \left(\int\limits_l^u (1 + \frac{s-l}{\delta})^{-1-\lambda} \, ds\right)_+ \xi^k$. Используя условия 2)–3), неравенство Юнга, $\frac{1}{2} a(x_0) \le a(x) \le \frac{3}{2} a(x_0)$, $\forall\, x \in B_r(x_0)$, а также неравенство $\left(\int\limits_l^u (1 + \frac{s-l}{\delta})^{-1-\lambda} \, ds\right)_+ \le \gamma\delta$, получим требуемую оценку (3.2). □

3.2. Доказательство теоремы 2.2

Как и в частном случае p-Лапласа (см. замечание 1), для доказательства оценок теоремы 2.2 воспользуемся известным методом Kilpelainen–Maly [1]. Рассмотрим вначале случай $a(x_0) = 0$. Введем необходимые обозначения.

Положим

$$r_j = \frac{\rho}{2^j}, \; B_j = B_{r_j}(x_0), \; j = 0, 1, 2, \ldots$$

а также

$$A_j(l) := r_j^{-n} \int\limits_{B_j \cap \{u > l_j\}} \left(\frac{u - l_j}{l - l_j}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi_j^{k-q} \, dx$$

$$+ \frac{(l - l_j)^{(q-p)\frac{n}{p}}}{r_j^n} \int\limits_{B_j \cap \{u > l_j\}} \left(\frac{u - l_j}{l - l_j}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi_j^{k-q} \, dx.$$

Обозначим также через

$$\delta_j(l) = l - l_j, \; L_j = B_j \cap \{u > l_j\},$$

$$\xi_j \in C_0^\infty(B_j), \; 0 \le \xi_j \le 1, \; \xi_j(x) \equiv 1, \; \forall\, x \in B_{j+1}, \; |\nabla \xi_j| \le \frac{2}{r_j}.$$

Последовательности $\{l_j\}$, $\{\delta_j\}$ определим позднее.

Возьмем $l_0 = 0$, а также

$$\delta_0 = \left(\kappa^{-1} r_0^{-n} \int\limits_{B_j \cap \{u>0\}} u^{(1+\lambda)(q-1)} dx\right)^{\frac{1}{(1+\lambda)(q-1)}}$$

$$+ \left(\kappa^{-1} r_0^{-n} \int\limits_{B_j \cap \{u>0\}} u^{(1+\lambda)(q-1)} dx\right)^{\frac{1}{(1+\lambda)(q-1)-(q-p)\frac{n}{p}}},$$

где $\kappa \in (0,\,1)$, которое будет выбрано позднее.

Очевидно, что $A_0(\delta_0) \le \kappa$, положим $l_1 = \delta_0$. Зафиксируем k равенством: $2^n(k^{-(1+\lambda)(q-1)} + k^{-(1+\lambda)(q-1)+(q-p)\frac{n}{p}}) = \frac{1}{2}$. Предположим, что мы выбрали l_2, ..., l_j и δ_1, ..., δ_{j-1} таким образом, что $\delta_i = l_{i+1} - l_i$, $i = 1$, ..., $j-1$,

$$l_{i-1} + \frac{1}{2}\delta_{i-2} \le l_i < l_{i-1} + k\delta_{i-2},\ i = 2,\ ...,\ j, \tag{3.3}$$

$$A_{i-1}(l_i) \le \kappa,\ i = 2,\ ...,\ j. \tag{3.4}$$

В силу выбора числа k и последнего неравенства

$$A_j(l_j + k\delta_{j-1}) \le 2^n(k^{-(1+\lambda)(q-1)} + k^{-(1+\lambda)(q-1)+(q-p)\frac{n}{p}})A_{j-1}(l_j) \le \frac{1}{2}\kappa.$$

Покажем теперь выбор l_{j+1} и δ_j.

Если $A_j(l_j + \frac{1}{2}\delta_{j-1}) \le \kappa$, то положим $l_{j+1} = l_j + \frac{1}{2}\delta_{j-1}$, если же $A_j(l_j + \frac{1}{2}\delta_{j-1}) > \kappa$, то в силу непрерывности и убывания функции $A_j(l)$ найдется такое $\tilde{l} \in (l_j + \frac{1}{2}\delta_{j-1},\, l_j + k\delta_{j-1})$, что $A_j(\tilde{l}) = \kappa$. В этом случае полагаем $l_{j+1} = \tilde{l}$.

Следующая лемма лежит в основе метода Kilpelainen–Maly [1] и является основным вспомогательным результатом для доказательства оценок теоремы 2.2.

Лемма 3.3. *Пусть $a(x_0) = 0$, тогда для всех $j \ge 2$ имеет место следующая оценка*

$$\delta_j \le \frac{1}{2}\delta_{j-1} + \gamma\left(r_j^{p-n}\int\limits_{B_j} f\,dx\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Зафиксируем некоторое $j \geq 1$ и без ограничения общности предположим, что

$$\delta_j \geq \frac{1}{2}\delta_{j-1}.$$

В противном случае неравенство (3.5) очевидно. Установим, что $A_j(l_{j+1}) = \kappa$.

Для этого разложим $L_j = L'_j \cup L''_j$. Здесь $L'_j := \{x \in L_j : \frac{u-l_j}{\delta_j} < \varepsilon\}$. Малый параметр $\varepsilon > 0$ будет определен позже. В силу условия на q и того, что $\xi_{j-1} \equiv 1$ в B_j,

$$r_j^{-n} \int\limits_{L'_j} \left(\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi_j^{k-q}\, dx$$

$$+r_j^{-n}\delta_j^{(q-p)\frac{n}{p}} \int\limits_{L'_j} \left(\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi_j^{k-q}\, dx$$

$$\leq \varepsilon^{(1+\lambda)(q-1)} r_j^{-n} \int\limits_{L_j} \xi_{j-1}^{k-q} dx$$

$$+\varepsilon^{(1+\lambda)(q-1)-(q-p)\frac{n}{p}} r_j^{-n} \int\limits_{L_j} (u-l_{j-1})^{(q-p)\frac{n}{p}} \xi_{j-1}^{k-q} dx$$

$$\leq \varepsilon^{\lambda(q-1)} r_j^{n} \int\limits_{L_j} \left(\frac{u-l_{j-1}}{\delta_{j-1}}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi_{j-1}^{k-q}\, dx$$

$$+\varepsilon^{\lambda(q-1)} \delta_{j-1}^{(q-p)\frac{n}{p}} r_j^{n} \int\limits_{L_j} \left(\frac{u-l_{j-1}}{\delta_{j-1}}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi_{j-1}^{k-q}\, dx$$

$$\leq 2^n \varepsilon^{\lambda(q-1)} A_{j-1}(l_j) \leq 2^n \varepsilon^{\lambda(q-1)} \kappa. \tag{3.6}$$

Положим $w = \frac{1}{\delta_j}\left(\int\limits_{l_j}^{u} \left(1+\frac{s-l_j}{\delta_j}\right)^{\frac{1+\lambda}{p}} ds\right)_+$ и отметим, что на L''_j справедлива оценка

$$\gamma^{-1}(\varepsilon)\left(\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{p-1-\lambda} \leq w^p \leq \gamma(\varepsilon)\left(\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{p-1-\lambda},$$

поэтому,

$$r_j^{-n}\left(1+\delta_j^{(q-p)\frac{n}{p}}\right) \int\limits_{L''_j} \left(\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi_j^{k-q}\, dx$$

$$\gamma(\varepsilon) r_j^{-n} \left(1+\delta_j^{(q-p)\frac{n}{p}}\right) \int\limits_{L''_j} w^{\frac{p(1+\lambda)(q-1)}{p-1-\lambda}} \xi_j^{k-q}\, dx.$$

Выбираем далее λ из условия $\frac{p(1+\lambda)(q-1)}{p-1-\lambda} < \frac{n}{n-p}$ или $\lambda < \frac{p(n-1)-q(n-p)}{n+(q-p)(n-p)}$. Тогда в силу леммы 3.1, теоремы вложения и предыдущего неравенства, получим

$$r_j^{-n} \left(1+\delta_j^{(q-p)\frac{n}{p}}\right) \int\limits_{L''_j} \left(\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi_j^{k-q}\, dx$$

$$\leq \gamma(\varepsilon) \left(r_j^{-n} \int\limits_{L_j} \left(1+\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi_j^{(k-q)\frac{n-p}{n}-q}\, dx \right.$$

$$+ r_j^{-n} \delta_j^{q-p} \int\limits_{L_j} \left(1+\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi_j^{(k-q)\frac{n-p}{n}-q}\, dx$$

$$\left. + r_j^{p-n} \delta_j^{1-p} \int\limits_{B_j} f\, dx \right)^{\frac{n}{n-p}}$$

$$+\gamma(\varepsilon) \left(r_j^{-n} \delta_j^{(q-p)\frac{n-p}{p}} \int\limits_{L_j} \left(1+\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi_j^{(k-q)\frac{n-p}{n}-q}\, dx \right.$$

$$+ r_j^{-n} \delta_j^{(q-p)\frac{n}{p}} \int\limits_{L_j} \left(1+\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi_j^{(k-q)\frac{n-p}{n}-q}\, dx$$

$$\left. + r_j^{p-n} \delta_j^{1-p+(q-p)\frac{n}{p}} \int\limits_{B_j} f\, dx \right)^{\frac{n}{n-p}}.$$

С учетом выбора k из условия $(k-q)\frac{n-p}{n} - q = 1$, в силу неравенства Юнга и оценки

$$r_j^{-n} \delta_j^{(q-p)\frac{n}{p}} \int\limits_{L_j} \left(1+\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(q-1)} \xi_j\, dx \leq \gamma\kappa,$$

получим

$$r_j^{-n}(1+\delta_j^{(q-p)\frac{n}{p}})\int\limits_{L_j''}\left(\frac{u-l_j}{\delta_j}\right)^{(1+\lambda)(q-1)}\xi_j^{k-q}\,dx$$

$$\leq\gamma(\varepsilon)\left(\kappa+\delta_j^{1-n+q\frac{n-p}{p}}r_j^{p-n}\int\limits_{B_j}f\,dx\right)^{\frac{n}{n-p}}. \tag{3.7}$$

Тогда из оценок (3.6), (3.7) и приходим к неравенству

$$\kappa\leq 2^n\varepsilon^{\lambda(p-1)}\kappa+\gamma(\varepsilon)\left(\kappa+\delta_j^{1-p}r_j^{p-n}\int\limits_{B_j}f\,dx\right)^{\frac{n}{n-p}}$$

$$+\gamma(\varepsilon)\left(\kappa+\delta_j^{1-p+(q-p)\frac{n}{p}}r_j^{p-n}\int\limits_{B_j}f\,dx\right)^{\frac{n}{n-p}}. \tag{3.8}$$

Выбираем ε достаточно малым, $2^n\varepsilon^{\lambda(p-1)}=\frac{1}{4}$, а затем подобным образом выбираем и $\kappa=\kappa(\varepsilon):\gamma(\varepsilon)\kappa^{\frac{p}{n-p}}=\frac{1}{4}$.

Из (3.8) получаем, что, по крайней мере, справедливо одно из неравенств

$$\delta_j\leq\gamma\left(r_j^{p-n}\int\limits_{B_j}f\,dx\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

или

$$\delta_j\leq\gamma\left(r_j^{p-n}\int\limits_{B_j}f\,dx\right)^{\frac{1}{n-1-q\frac{n-p}{p}}},$$

откуда, в силу предположения о сходимости ряда $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left(r_j^{p-n}\int\limits_{B_j}f\,dx\right)^{\frac{1}{p-1}}$, получим требуемую оценку (3.5). Лемма доказана. □

Аналогичным образом можно установить

Замечание 3.1. При условиях $a(x_0) > 0$ и $\rho_0 \geq \rho$ справедлива оценка

$$\delta_j \leq \frac{1}{2}\delta_{j-1} + r_j + \gamma \left(r_j^{q-n} \int\limits_{B_j} f\,dx \right)^{\frac{1}{q-1}}, \tag{3.9}$$

для всех $j \geq 2$.

Если же $a(x_0) > 0$ и $\rho_0 < \rho$, тогда существет такое $j_0 > 1 :\ \frac{\rho}{2^{j_0+1}} < \rho \leq \frac{\rho_0}{2^{j_0}}$ и что при $1 \leq j < j_0$

$$\delta_j \leq \frac{1}{2}\delta_{j-1} + r_j + \gamma \left(r_j^{p-n} \int\limits_{B_j} f\,dx \right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{3.10}$$

а для всех $j \geq j_0$ справедлива оценка (3.9):

$$\delta_j \leq \frac{1}{2}\delta_{j-1} + r_j + \gamma \left(r_j^{q-n} \int\limits_{B_j} f\,dx \right)^{\frac{1}{q-1}}. \tag{3.9}$$

Вернемся к доказательству теоремы 2, используя доказанные вспомогательные утверждения (леммы 3.1–3.3) и замечание 2.

Неравенства (3.5) просуммируем по $j = 2$, ..., J.

$$l_J \leq l_1 + \gamma\delta_1 + \sum_{j=0}^{\infty} \left(r_j^{p-n} \int\limits_{B_j} f\,dx \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Так как $l_1 = \delta_0$ и $\delta_1 \leq k\delta_0$, то

$$l_J \leq \gamma\delta_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \left(r_j^{p-n} \int\limits_{B_j} f\,dx \right)^{\frac{1}{p-1}},$$

где δ_0 было определено выше.

В последнем неравенстве перейдем в пределу $J \to \infty$. Пусть $l := \lim\limits_{j\to\infty} l_j$. Тогда получим

$$u(x_0) \leq l \leq \gamma\delta_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \left(r_j^{p-n} \int\limits_{B_j} f\,dx \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Здесь x_0- лебегова точка функции $(u-l)_+^{(1+\lambda)(p-1)}$. Учитывая определенное выше δ_0, получаем оценку (2.8) теоремы 2. Для доказательства оценки (2.9) суммируем неравенства (3.9) по $j = 2, ..., J$, в результате получим

$$l_J \leq \gamma\delta_0 + 2\rho + \gamma W^f_{1,q}(x_0, 2\rho). \tag{3.11}$$

Из определения l_1 следует, что $\delta_0 < \infty$, тогда последовательность $\{l_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ сходится и $\delta_j \to 0$, при $j \to \infty$. Переходим к пределу $J \to \infty$ в (3.11). Пусть $l := \lim\limits_{j\to\infty} l_j$. Тогда

$$\frac{1}{r_j^n}\int\limits_{B_j}(u-l)_+^{(1+\lambda)(q-1)} \leq \gamma\delta_j^{(1+\lambda)(q-1)} \to 0,\ j\to\infty.$$

Выбираем в качестве x_0 лебегову точку функции $(u-l)_+^{(1+\lambda)(q-1)}$, получим, $u(x_0) \leq l \leq \gamma\delta_0 + 2\rho + \gamma W^f_{1,q}(x_0, 2\rho)$. Таким образом, доказана оценка (2.9).

Рассмотрим теперь случай, когда $a(x_0) > 0$ и $\rho_0 < \rho$ и докажем оценку (2.10). Для доказательства этой оценки воспользуемся замечанием 2 и просуммируем (3.10) по $j = 2, ..., j_0 - 1$, а затем (3.9) по $j = j_0, j_0+1, ..., J$.

В результате получим

$$l_J \leq \gamma\delta_0 + 2\rho + \gamma(W^f_{1,q}(x_0, 2\rho_0) + (W^f_{1,p}(x_0, 2\rho) - W^f_{1,p}(x_0, 2\rho_0))). \tag{3.12}$$

Из определения l_1 следует, что $\delta_0 < \infty$, тогда последовательность $\{l_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ сходится и $\delta_j \to 0$, при $j \to \infty$. Переходим к пределу $J \to \infty$ в (3.12). Пусть $l := \lim\limits_{j\to\infty} l_j$. Тогда

$$\frac{1}{r_j^n}\int\limits_{B_j}(u-l)_+^{(1+\lambda_0)(p-1)} \leq \gamma\delta_j^{(1+\lambda_0)(p-1)} \to 0,\ j\to\infty.$$

Выбираем в качестве x_0 лебегову точку функции $(u-l)_+^{(1+\lambda_0)(p-1)}$, получим, $u(x_0) \leq l$.

Таким образом, оценка (2.10), а вместе с ней и теорема 2 полностью доказаны.

4. Доказательство теоремы 2.1

Правые оценки теоремы 1 являются следствием слабого неравенства Гарнака, полученного ранее в работе [17] для двухфазных функционалов,

$$\left(\int\limits_{B_\rho(x_0)} u^s\,ds\right)^{\frac{1}{s}} \le \inf_{x\in B_\rho(x_0)} u, \tag{4.1}$$

с некоторым показателем $s>0$, и теоремы 2. Действительно, с учетом (4.1) и доказанной в теореме 2 оценки (2.8), получим

$$u(x_0) \le c_6 \inf_{B_\rho(x_0)} u + c_6 W^f_{1,p}(x_0, 2\rho),$$

если $a(x_0)=0$.

Если $a(x_0)>0$ и $\rho_0^\alpha = \frac{a(x_0)}{4[a]_{C^{0,\alpha}(\Omega)}} \ge \rho^\alpha$, то из (4.1) и (2.9) будет следовать

$$u(x_0) \le 3\rho + c_8 \inf_{B_\rho(x_0)} u + c_8 W^f_{1,q}(x_0, 2\rho).$$

Следствием (4.1) и (2.10) будет оценка

$$u(x_0) \le 3\rho_0 + c_8 \inf_{B_\rho(x_0)} u + c_8 W^f_{1,q}(x_0, 2\rho_0) + c_8(W^f_{1,p}(x_0, 2\rho) - W^f_{1,p}(x_0, 2\rho_0)).$$

Осталось доказать оценки снизу в (2.4)–(2.6). Для этого в качестве пробной функции подставим в (2.3) $\varphi = \xi^q$, $\xi \in C_0^\infty(B_r(x_0))$, $0\le\xi\le 1$, $\xi\equiv 1$ в $B_{\frac{r}{2}}(x_0)$ и $|\nabla\xi| \le \frac{\gamma}{r}$, $0<r\le\rho$. Заметим, что

$$g(a(x), a)b \le \varepsilon g(a(x), a)a + g\left(a(x), \frac{b}{\varepsilon}\right) b,\ a,\ b,\ \varepsilon > 0. \tag{4.2}$$

Кроме того, в силу $\frac{3}{4}a(x_0) \le a(x) \le \frac{5}{4}a(x_0)$, $\forall x\in B_\rho(x_0)$, получим

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{q-1} g(a(x_0),\, t) \le g(a(x),\, t) \le \left(\frac{5}{4}\right)^{p-1} g(a(x_0),\, t), \tag{4.3}$$

при $a(x_0)>0$ и $\rho_0\ge\rho$.

Воспользуемся условиями 2)–3), оценками (4.2), (4.3) с $\varepsilon = g^\beta\left(a(x_0), \frac{m(\frac{r}{2})-m(r)}{r}\right)$, $0<\beta<\min\left(1, \frac{1}{(n-1)(q-1)}\right)$, $m(r) = \inf\limits_{B_r(x_0)} u$:

$$\int\limits_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} f\,dx \le \gamma \int\limits_{B_r(x_0)} g(a(x_0), |\nabla u|)|\nabla\xi|\,\xi^{q-1}dx$$

$$\le \gamma\varepsilon \int\limits_{B_r(x_0)} \psi^{-\beta}\left(\frac{u-m(r)}{r}\right) \frac{G(a(x_0), |\nabla u|)}{u-m(r)} \xi^q\,dx$$

$$+\frac{\gamma}{r}\int\limits_{B_r(x_0)} g\left(a(x_0), \frac{1}{\varepsilon}\frac{u-m(r)}{r}\psi^{\beta}\left(\frac{u-m(r)}{r}\right)\right)dx. \qquad (4.4)$$

Подставляем теперь в качестве φ в (2.3) $\varphi = \psi^{-\beta}\left(\frac{u}{r}\right)\xi^q$. Используя условия (2.2), а также слабое неравенство Гарнака, получим

$$\varepsilon\int\limits_{B_r(x_0)} \psi^{-\beta}\left(\frac{u-m(r)}{r}\right)\frac{G(a(x_0), |\nabla u|)}{u-m(r)}\xi^q\,dx$$

$$\leq \gamma r^{-1}\varepsilon\int\limits_{B_r(x_0)} \psi^{1-\beta}\left(\frac{u-m(r)}{r}\right)dx$$

$$\leq \gamma r^{-1}\varepsilon\int\limits_{B_r(x_0)} g^{1-\beta}\left(a(x_0), \frac{u-m(r)}{r}\right)dx$$

$$\leq \gamma r^{n-1} g\left(a(x_0), \frac{m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)}{r}\right). \qquad (4.5)$$

Так как $0<\beta<\min\left(1, \frac{1}{(n-1)(q-1)}\right)$, то

$$\gamma r^{-1}\int\limits_{B_r(x_0)} g\left(a(x_0), \frac{1}{\varepsilon}\frac{u-m(r)}{r}g^{\beta}\left(a(x_0), \frac{u-m(r)}{r}\right)\right)dx$$

$$\leq \gamma r^{n-1} g\left(a(x_0), \left(\frac{m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)}{r}\right)\right)$$

$$+\gamma r^{-1}\varepsilon^{1-q}\int\limits_{B_r(x_0)} g^{1+\beta(q-1)}\left(a(x_0), \frac{u-m(r)}{r}\right)dx$$

$$\leq \gamma r^{n-1} g\left(a(x_0), \left(\frac{m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)}{r}\right)\right). \qquad (4.6)$$

Из (4.4)–(4.6) получим

$$r^{1-n}\int\limits_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} f\,dx \leq g\left(a(x_0), \frac{m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)}{r}\right). \qquad (4.7)$$

Поскольку при $a(x_0)>0$,

$$g\left(a(x_0), \frac{m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)}{r}\right) \leq 1+(\gamma+a(x_0))\left(\frac{m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)}{r}\right)^{q-1}, \qquad (4.8)$$

а при $a(x_0)=0$

$$g\left(0, \frac{m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)}{r}\right) \leq 1+\gamma\left(\frac{m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)}{r}\right)^{p-1},$$

то интегрируя неравенство (4.7) по $r \in (0,\, \rho)$ и используя последние оценки, получаем оценки снизу в (2.4) и (2.5).

Для доказательства оценки снизу в (2.6) воспользуемся ранее доказанными (4.7) и (4.8).

При интегрировании неравенства (4.7) по $r \in (0,\, \rho)$ возникает необходимость разбить промежуток интегрирования на $r \in (0,\, \rho_0)$ и $r \in (\rho_0,\, \rho)$.

Так как

$$\int\limits_0^{\rho_0}\left(r^{q-n}\int\limits_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} f\,dx\right)^{\frac{1}{q-1}} dr = W^f_{1,q}(x_0,\rho_0),$$

а

$$\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\left(r^{p-n}\int\limits_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} f\,dx\right)^{\frac{1}{p-1}} dr$$

$$= \int\limits_0^{\rho}\left(r^{p-n}\int\limits_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} f\,dx\right)^{\frac{1}{p-1}} dr - \int\limits_0^{\rho_0}\left(r^{p-n}\int\limits_{B_{\frac{r}{2}}(x_0)} f\,dx\right)^{\frac{1}{p-1}} dr$$

$$= W^f_{1,p}(x_0,\rho) - W^f_{1,p}(x_0,\rho_0),$$

то мы получаем оценку снизу в (2.6).

Теорема 1 полностью доказана.

Литература

[1] T. Kilpeläinen, J. Maly, *The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations* // Acta Mathematica, **172** (1994), No. 1, 137–161.

[2] D. A. Labutin, *Potential estimates for a class of fully nonlinear elliptic equations* // Duke Mathematical Journal, **111** (2002), No. 1, 1–49.

[3] N. S. Trudinger, X. J. Wang, *On the weak continuity of elliptic operators and applications to potential theory* // American Journal of Mathematics, **124** (2002), 369–410.

[4] M. Biroli, *Nonlinear Kato measures and nonlinear subelliptic Schrodinger problems* // Rendiconti della Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Memorie di Matematica e Applicazioni. Serie V. Parte I, **21** (1997), 235–252.

[5] F. Duzaar, J. Kristensen, G. Mingione, *Gradient estimates via non-linear potentials* // American Journal of Mathematics, **133** (2011), No. 4, 109–1149.

[6] J. Maly, W. Ziemer, *Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations*, Math. Surveys and Monographs, **51**, AMS, 1997.

[7] G. Mingione, *Regularity of minima: an invitation to the dark side of the calculus of variations* // Applications of Mathematics, **51** (2006), No. 4, 355–426.

[8] N. C. Phuc, I. E. Verbitsky, *Quasilinear and hessian equations of Lane-Emden type* // Annals of mathematics, **168** (2008), 859–914.

[9] I. I. Skrypnik, *The Harnack inequality for a nonlinear elliptic equation with coefficients from the Kato class* // Ukr. Mat. Visn., **2** (2005), 219–235.

[10] M. Ruzicka, *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2000.

[11] Y. A. Alkhutov, *The Harnack inequality and the H.older property of solutions of nonlinear elliptic equations with a nonstandard growth condition* // Diff. Equat., **33** (1997), 12, 1653–1663.

[12] Y. A. Alkhutov, O. V. Krasheninnikova, *Continuity at boundary points of solutions of quasilinear elliptic equations with a non-standard growth condition* // Izvestiya: Mathematics, **68** (2004), No. 6, 1063.

[13] X. Fan, D. Zhao, *A class of De Giorgi type and Holder continuity* // Nonl. Anal., **36** (1999), No. 3, 295–318.

[14] V. Liskevich, I. I. Skrypnik, *Harnack inequality and continuity of solutions to quasilinear degenerate parabolic equations with coefficients from Kato-type classes* // Journal of Differential Equations, **247** (2009), 2740–2777.

[15] M. Giaquinta, *Growth conditions and regularity, a counterexample* // Manuscripta Math., **59** (1987), No. 2, 245–248.

[16] P. Marcellini, *Un exemple de solution discontinue d'un probleme variationnel dans le cas scalaire*, Preprint, Istituto Matematico U. Dini, **11** (1987).

[17] P. Baroni, M. Colombo, G. Mingione, *Harnack inequalities for double phase functionals* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications, **121** (2015), 206–222.

[18] M. Carozza, J. Kristensen, A. di Napoli, *Higher differentiability of minimizers of convex variational integrals* // Annales de l'Institut Henri Poincare. Non Linear Analysis, **28** (2011), No. 3, 395–411.

[19] L. Esposito, G. Mingione, *Sharp regularity for functionals with(p; q)-growth* // J. Diff. Equat., **204** (2004), No. 1, 5–55.

[20] N. Fusco, C. Sbordone, *Some remarks on the regularity of minima of anisotropic integrals* // Comm. PDE, **18** (1993), No. 1–2, 153–167.

[21] P. Harjulehto, J. Kinnunen, T. Lukkari, *Unbounded supersolutions of nonlinear equations with nonstandard growth* // Bound. Value Probl., 20 (2007), 20–41.

[22] I. Kolodij, *On boundedness of generalized solutions of elliptic differential equations* // Vestnik Moskov. Gos. Univ., **5** (1970), 44–52.

[23] F. Leonetti, E. Mascolo, *Local boundedness for vector valued minimizers of anisotropic functionals* // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen, **31** (2012), No. 3, 357–378.

[24] P. Marcellini, *Regularity of minimizers of integrals of the calculus of variations with non standard growth conditions* // Archive for Rational Mechanics and Analysis, **105** (1989), No. 3, 267–284.

[25] P. Marcellini, *Regularity and existence of solutions of elliptic equations with* $(p;q)$*-growth conditions* // J. Diff. Equat., **90** (1991), No. 1, 1–30.

[26] E. Mascolo, G. Papi, *Harnack inequality for minimizers of integral functionals with general growth* // Nonlinear Differential Equations and Applications, **3** (1996), No. 2, 231–244.

[27] G. Moscariello, *Regularity results for quasiminima of functionals with non-polynomial growth* // Journal of Mathematical Analysis and Applications, **168** (1992), No. 2, 500–510.

[28] G. Moscariello, L. Nania, *Holder continuity of minimizers of functionals with non-standard growth conditions* // Ricerche di Mat., **15** (1991), No. 2, 259–273.

[29] M. Aizenman, B. Simon, *Brownian motion and Harnack inequality for Schrodinger operators* // Comm. PDE., **35** (1982), No. 2, 209–273.

[30] F. Chiarenza, E. Fabes, N. Garofalo, *Harnack's inequality for Schrodinger operators and the continuity of solutions* // Proc. AMS, **98** (1986), No. 3, 415–425.

[31] K. Kurata, *Continuity and Harnack's inequality for solutions of elliptic partial differential equations of second order* // Indiana University Mathematics Journal, **43** (1994), No. 2, 411–440.

[32] N. C. Phuc, I. E. Verbitsky, *Singular quasilinear and hessian equations and inequalities* // Journal of Functional Analysis, **256** (2009), No. 6, 1875–1906.

[33] V. C. Piat, A. Coscia, *Hölder continuity of minimizers of functionals with variable growth exponent* // Manuscripta Mathematica, **93** (1997), No. 1, 283–299.

[34] G. Lieberman, *The natural generalizationj of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Urall'tseva for elliptic equations* // Communications in PDEs, **16** (1991), No. 2–3, 311–361.

[35] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilitae lanaliticita delle estremali degli integrali multipli regolari* // Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **3** (1957), No. 3, 25–43.

[36] J. Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations* // Communications on Pure and Applied Mathematics, **14** (1961), No. 3, 577–591.

[37] V. V. Zhikov, *On Lavrentiev's phenomenon* // Russian journal of mathematical physics, **3** (1995), 264–269.

[38] V. V. Zhikov, *Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory* // Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **50** (1986), 675–710.

Сведения об авторах

Игорь Игоревич Скрыпник

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
Славянск, Украина
E-Mail: `iskrypnik@iamm.donbass.com`

Екатерина Александровна Буряченко

Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса, Винница, Украина,
&
Черкасский национальный университет имени Богдана Хмельницкого,
Черкассы, Украина
E-Mail: katarzyna_@ukr.net