Теорія оптимальних рішень

УДК 519.8

Н.В. СЕМЕНОВА, Д.О. ЧАЙКА

АДИТИВНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ВЕКТОРНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З БУЛЕВИМИ ЗМІННИМИ

Розроблено адитивний алгоритм розв'язання векторних задач лінійної оптимізації з булевими змінними, який дозволяє отримувати Парето-оптимальні розв'язки та відповідні їм оцінки в просторі критеріїв. Запропонований алгоритм застосовано до розв'язання практичної задачі вибору заходів модернізації джерел теплогенерації та систем теплопостачання Сумської області.

Вступ. Численні проблеми вибору рішень, які виникають у різних областях науки і техніки, часто формулюються у вигляді багатокритеріальних задач цілочислової оптимізації, що полягають у максимізації або мінімізації векторної функції при заданих обмеженнях [1]. Задачі багатокритеріальної оптимізації виникають у тих випадках, коли є декілька цілей, які не можуть бути відображені одним критерієм (наприклад, вартість, прибуток, надійність). Потрібно знайти точку області допустимих розв'язків, яка мінімізує або максимізує всі такі критерії [2]. Розв'язання задач цілочислової оптимізації на сьогодні важливе й актуальне. Вдосконалення існуючих і розробка нових пошукових алгоритмів цілочислової багатокритеріальної оптимізації є актуальною науковою задачею. Окремим випадком задач цілочислової оптимізації є задачі, в яких шукані змінні можуть приймати не будь-які значення, а тільки одне з двох: або 0, або 1. Застосування булевих змінних дає можливість накладати на вирішувану задачу цілий ряд логічних умов. За допомогою булевих змінних розв'язуються різноманітні за змістом задачі, зв'язані, наприклад, з процесами вибору різних варіантів, а також задачі дискретного програмування. Однією з основних властивостей запропонованого в даній роботі адитивного алгоритму, що побудований на основі методу Балаша, є те, що в ньому потрібне виконання тільки операцій складання і віднімання.

Постановка задачі. Розглянемо багатокритеріальну задачу цілочислового лінійного програмування такого вигляду:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \to \min,\ i \in N_q = \{1,...,q\} \tag{1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j \le b_l,\ l \in N_m = \{1,...,m\}, \tag{2}$$

$$x_j \in \{0,1\},\ j \in N_n, \tag{3}$$

де $c_{ij} \ge 0, i \in N_q, j \in N_n$. Вводячи вектор вільних змінних $y \in R^m$, задачу (1) – (3) можна записати в канонічній матричній формі.

$$\min Cx, \tag{4}$$

за умов

$$Ax + y = b, \tag{5}$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ x_j \in \{0,1\},\ j \in N_n, \tag{6}$$

$$y \ge 0. \tag{7}$$

Пробним розв'язком задачі (4) – (7) будемо називати будь-який $(n+m)$-вимірний вектор $u = (x, y)$, що задовольняє (5) і (6).

Якщо всі критерії задачі (4) – (7) рівноважливі, то під її розв'язанням будемо розуміти знаходження елементів множини $P(C, X)$ – Парето-оптимальних або ефективних розв'язків [2]. Очевидно, що допустима множина X задачі (1) – (3) обмежена і дискретна. У цьому випадку множина ефективних розв'язків не порожня [1 – 3]. Згідно [1–2] для будь-якого $x \in X$ істинне твердження: $x \in P(C,X) \Leftrightarrow \{z \in X \mid Cz \ge Cx, Cz \ne Cx\} = \varnothing$.

Очевидно, що для n булевих змінних x_j, $j \in N_n$, існує 2^n можливих наборів значень. Багато з них недопустимі через обмеження (5) і лише їх невелика кількість є Парето-оптимальними. Для задачі з одним критерієм і обмеженнями вигляду (5) – (7) Е. Балаш [4] запропонував алгоритм часткового перебору допустимих розв'язків задачі з їх поступовою побудовою. Основна властивість алгоритму, запропонованого в даній роботі, полягає в отриманні Парето-оптимальних розв'язків (або у з'ясуванні їх відсутності) шляхом розгляду лише деякої підмножини всіх пробних розв'язків.

Ідея методу та опис алгоритму. Введемо деякі позначення і визначення, які будуть використовуватись в алгоритмі для розв'язання задачі (4) – (7). Визначимо множину J_s наступним чином:

$$J_s = \{ j \mid j \in N_n,\ x_j^s = 1 \}. \tag{8}$$

Оскільки кожне обмеження (5) містить рівно одну змінну y_i, розв'язок $u^s = (x^s, y^s)$ повністю визначається множиною J_s. Дійсно, якщо

$$x_j^s = \begin{cases} 1, \ j \in J_s, \\ 0, \ j \in N_n \setminus J_s, \end{cases} \tag{9}$$

то

$$y_i^s = b_i - \sum_{j \in J_s} a_{ij}, i \in N_m . \tag{10}$$

Вважаючи, що $J_s = \{j_1, j_2, ..., j_r\}$, розв'язок $u^s = (x^s, y^s)$ будемо позначати $u(j_1, j_2, ..., j_r)$. Відповідні вектори значень критеріїв z^i, $i \in N_q$, позначатимемо z_s^i. Таким чином, $z_s^i = \left\langle c^i, x^s \right\rangle$ або

$$z_s^i = \sum_{j \in J_s} c_{ij} . \tag{11}$$

Множини значень, які вектори функцій критеріїв набувають на розв'язках включно до ітерації s, позначимо Z_s^i:

$$Z_s^i = \{z_p^i \mid u^p \geq 0, p \leq s\}, \ i \in N_q . \tag{12}$$

Якщо множина $Z_s^i \neq \varnothing$, $i \in N_q$, то вектори з недомінованими (найменшими) значеннями функцій критеріїв, які вона містить, назвемо рекордом для u^s. Якщо множина $Z_s^i = \varnothing$, за рекорд беремо $+\infty$. Таким чином, рекорд визначається як

$$\xi^{s(i)} = \begin{cases} \infty, Z_s^i = \varnothing, \\ \min\limits_{z_p^i \in Z_s^i} z_p, Z_s^i \neq \varnothing. \end{cases} \tag{13}$$

При переході до ітерації $s+1$ номер $j \in N_n$, вектора-стовпчика a_j, що має бути введений в базис, обирається з множини N^s, яка є множиною номерів покращуючих векторів для розв'язку u^s. Введемо множини

$$M_j^s = \{i \mid y_i^s - a_{ij} < 0\} . \tag{14}$$

Визначимо величини v_j^s, які будуть слугувати критерієм вибору стовпчика, що необхідно ввести в базис. Покладемо для розв'язку u^s

$$v_j^s = \begin{cases} \sum\limits_{i \in M_j^s} (y_i^s - a_{ij}), M_j^s \neq \varnothing, \\ 0, M_j^s = \varnothing, \end{cases} \quad j \in N^s. \tag{15}$$

В ході алгоритму значення v_j^k, які відповідають розв'язку u^k, будуть послідовно викреслюватися. Позначимо $C_k^s (k \le s)$ множину тих j, для яких v_j^k, що відповідають розв'язку u^k, викреслені до моменту отримання розв'язку u^s. Множина C_k^k вважається порожньою. Далі визначимо множину

$$C^s = \bigcup_{p \in J_p \subset J_s} C_p^s . \tag{16}$$

Множина C^s є множиною всіх j, для яких v_j^p, що відповідають будь-якому з розв'язків u^p, для яких $p < s$ і $J_p \subset J_s$, були викреслені до отримання розв'язку u^s. Визначимо для u^s множину таких $j \in N_n \setminus C^s$, що при переході від J_s до $J_{s+1} = J_s \bigcup \{j\}$ отримані значення критеріїв не менше рекордів для u^s:

$$D^s = \{ j \mid j \in N_n \setminus C^s, c_{ij} + z_s^i \ge \xi^{s(i)}, i \in N_q \} . \tag{17}$$

Визначимо множину E^s таких $j \in N_n \setminus (C^s \bigcup D^s)$, що при переході від J_s до $J_{s+1} = J_s \bigcup \{j\}$ жодне від'ємне y_i^s не збільшиться:

$$E^s = \{ j \mid j \in N_n \setminus (C^s \bigcup D^s), y_i^s < 0 \text{ приводить до } a_{ij} \ge 0\} . \tag{18}$$

Визначимо множину покращуючих векторів a_j для пробного розв'язку u^s:

$$N^s = N_n \setminus (C^s \bigcup D^s \bigcup E^s) . \tag{19}$$

Розглянемо два розв'язки u^k і $u^s (k < s)$. Визначимо аналогічну до (17) множину тих $j \in N_k \setminus C_k^s$, що при переході від J_s до $J_{s+1} = J_k \bigcup \{j\}$ значення критеріїв z_{s+1}^i буде не менше рекордів для u^s:

$$D_k^s = \{ j \mid j \in N_k \setminus C_k^s, c_{ij} + z_k^i \ge \xi^{s(i)}, i \in N_q \} . \tag{20}$$

Покладемо $N_k^s = N_k \setminus (C_k^s \bigcup D_k^s)$. Будемо називати її множиною покращуючих векторів для розв'язку u^k, що залишається після ітерації s. Роль множин (18) – (20) в алгоритмі досить велика. Для будь-якого розв'язку u^s кандидатами для введення в базис є лише стовпці a_j з номерами із N^s. Якщо $N^s = \varnothing$, то це свідчить про відсутність розв'язків u^t, для яких $J_s \subset J_t$ і $z_t^i < \xi^{s(i)}$. В цьому разі алгоритм відновлюється з деякого попереднього розв'язку u^k, для якого розглядаються лише покращуючі вектори з номерами із N_k^s.

Опишемо одну ітерацію алгоритму.

За початковий розв'язок беремо вектор $u^0 = (x^0, y^0)$, в якому $x^0 = 0, y^0 = b$ та вектор значень критеріїв $\left(z_1^0, z_2^0, ..., z_q^0\right) = (0, 0, ..., 0)$. Нехай після виконання s ітерацій маємо розв'язок $u^s = u(j_1, j_2, ..., j_r)$, що задовольняє (8) – (10).

1. Переглянути $y_i^s, i \in N_m$.

1.1) Якщо $y_i^s \geq 0, i \in N_m$, покласти $z_s^i < \xi^{s(i)}$. Утворити згідно формули (20) множини D_k^s, викреслити всі $v_j^k, j \in D_k^s, k < s$, і перейти до п. 5.

Якщо п. 1.1) виконаний вже для u^0, то u^0 є Парето-оптимальним розв'язком та процес розв'язання можна вважати закінченим.

1.2) Якщо існує i_1, для якого $y_i^s < 0,\ i \in N_m$, слід перейти до п. 2.

2. Знайти множину покращуючих векторів для розв'язку u^s, утворивши згідно формули (19) множини N^s.

2.1) Якщо $N^s = \varnothing$, перейти до п. 5. Інакше (якщо $N^s \neq \varnothing$), перейти до п. 3.

3. Для всіх i, для яких $y_i^s < 0$, перевірити нерівності

$$\sum_{j \in N_s} \bar{a}_{ij} \leq y_i^s, \tag{21}$$

де $\bar{a}_{ij}$ – від'ємні елементи матриці A.

3.1) Якщо існує i_1, для якого нерівність (21) не виконується, перейти до п. 5.

3.2) Якщо всі нерівності (21) виконуються строго, слід знайти згідно (15) всі v_j^s для $j \in N^s$ і вибрати j_{s+1} таким чином, щоб

$$v_{j_{s+1}}^s = \max_{j \in N_s} v_j^s. \tag{22}$$

Далі викреслити всі $v_{j_{s+1}}^s$ і перейти до п. 8.

3.3) Якщо всі нерівності (20) виконуються й існує множина $M^s \subset N_m$ така, що для $i \in M^s$ нерівності вигляду (20) виконуються як рівності, необхідно визначити множину F^s таких $j \in N^s$, для яких $a_{ij} < 0$ хоча б для одного $i \in M^s$.

4. Перевірити співвідношення

$$z_s^i + \sum_{j \in F_s} c_{ij} < \xi^{s(i)}. \tag{23}$$

4.1) Якщо нерівність (23) виконується, слід викреслити v_j^s для $j \in F^s$ (не обчислюючи їх). Покласти $J_{s+1} = J_s \bigcup F^s$, обчислити нові значення векторів критеріїв та вільних змінних

$$z_{s+1}^{i} = z_{s}^{i} + \sum_{j \in F_s} c_{ij} , \tag{24}$$

$$y_{i}^{s+1} = y_{i}^{s} - \sum_{j \in F_s} a_{ij}, i \in N_m , \tag{25}$$

і перейти до п. 1, тобто почати нову ітерацію.

4.2) Якщо (23) не виконується, то викреслити $v_j^s, j \in N^s$, і перейти до п. 5.

5. Для всіх k, для яких $J_k \subset J_s$ згідно (21) знайти множини N_k^s. Переглянути їх у порядку спадання номерів k доти, поки не знайдеться таке k_1, що $J_{k_1} \subset J_s$ і $N_{k_1}^s \neq \varnothing$, або не виявиться, що всі N_k^s порожні.

5.1) Якщо $N_k^s = \varnothing$ для всіх k, за яких $J_k \subset J_s$, процес вважається закінченим. Якщо при цьому $Z_s = \varnothing$, то задача не має розв’язків. Якщо ж $Z_s \neq \varnothing$, то розв’язок u^q, для якого $z_q^i = \xi^{s(i)}$, – Парето-оптимальний.

5.2) Якщо $N_{k_1}^s \neq \varnothing$, перейти до п. 6.

6. Для тих i, для яких $y_i^s < 0$, перевірити при $k = k_1$ нерівності

$$\sum_{j \in N_k^s} \bar{a}_{ij} \leq y_i^k . \tag{26}$$

6.1) Якщо жодна з нерівностей (26) при $k = k_1$ не виконується, викреслити $v_j^{k_1}$ для всіх $j \in N_{k_1}^s$ і повторити п. 5 для $k < k_1$, замінивши в пп. 5 і 6 k_1 на k_2. Кожен раз, коли п. 5 буде повторюватися для $k < k_\mu$, в пп. 5 і 6 k_μ буде замінюватися на $k_{\mu+1}$. Якщо (26) не виконується за жодного k, для якого $N_k^s \neq \varnothing$, процес закінчено (див. п. 5.1)).

6.2) Якщо всі нерівності (26) при $k = k_\nu$ виявляються строгими, слід вибрати j_{s+1} таким чином, щоб

$$v_{j_{s+1}}^{k_\nu} = \max_{j \in N_{k_\nu}^s} v_j^{k_\nu} . \tag{27}$$

Викреслити $v_{j_{s+1}}^{k_\nu}$ і перейти до п. 8.

6.3) Якщо при $k = k_\nu$ всі нерівності (26) виконуються та $\exists M_{k_\nu}^s \subset N_m$, що для $i \in M_{k_\nu}^s$ всі нерівності (26) виконуються як рівності, слід перейти до п. 7.

7. Перевірити співвідношення

$$z_{k_\nu}^i + \sum_{j \in F_{k_\nu}^s} c_{ij} < \xi^{s(i)} , \tag{28}$$

де $F_{k_\nu}^s$ – множина тих $j \in N_{k_\nu}^s$, для яких $a_{ij} < 0$ хоча б за одного $i \in M_{k_\nu}^s$.

7.1) Якщо нерівність (28) виконується, викреслити $v_j^{k_\nu}$ для всіх $j \in F_{k_\nu}^s$. Покласти $J_{s+1} = J_{k_\nu} \bigcup F_{k_\nu}^s$, обчислити для нового розв'язку u^{s+1} значення цільових функцій та вільних змінних $z_{s+1}^i = z_{k_\nu}^i + \sum\limits_{j \in F_{k_\nu}^s} c_{ij}$, $y_i^{s+1} = y_i^{k_\nu} - \sum\limits_{j \in F_{k_\nu}^s} a_{ij}, i \in N_m$,

та перейти до п. 1, тобто почати наступну ітерацію. Якщо (28) не виконується, то викреслити $v_j^{k_\nu}$ для всіх $j \in N_{k_\nu}^s$ і повторити п. 5 для $k < k_\nu$. Якщо $k_\nu = 0$, тобто $k < k_\nu$ не існує, процес закінчено (див. п. 5.1)).

8. Покласти $J_{s+1} = J_p \bigcup \{j_{s+1}\}$ і обчислити для розв'язку u^{s+1} значення векторів цільових функцій та вільних змінних

$$z_{s+1}^i = z_p^i + c_{ij_{s+1}} = \sum_{j \in J_{s+1}} c_{ij} \,,\; y_i^{s+1} = y_i^p - a_{ij_{s+1}} = b_i - \sum_{j \in J_{s+1}} a_{ij}, i \in N_m,$$

тут $p-$ номер останньої викресленої $v_{j_{s+1}}^p$. Перейти до п. 1.

Процес закінчується при досягненні розв'язку u^t, для якого має місце п. 5.1) або 6.1), причому нерівність вигляду (26) не виконується за жодного k такого, що $N_k^s \neq \varnothing$, або ж має місце п. 7.2) і $k_\nu = 0$.

Описаний процес закінчується за скінчену кількість кроків і приводить до Парето-оптимального розв'язку або дозволяє встановити відсутність допустимих розв'язків вхідної задачі.

Приклад застосування алгоритму. Розглянуто задачу вибору заходів модернізації джерел теплогенерації та систем теплопостачання Сумської області на основі використання багатокритеріального адитивного алгоритму. У першому критерії максимізувалося зниження витрат природного газу, яке досягається в результаті впровадження заходів регіональної програми. Другим критерієм максимізувалося зниження викидів карбону в атмосферу. У третьому критерії максимізувалася надійність системи теплопостачання, тобто мінімізувалася сумарна величина ризику відмови елементів системи при виконанні заходів регіональної програми. Як заходи і проекти щодо реконструкції і модернізації джерел теплогенерації та систем теплопостачання розглядалися: 1) переведення котельних теплопостачальних підприємств з газового на тверде або альтернативне паливо; 2) приведення до відповідності роботи систем теплогенерації з технічними вимогами щодо їх експлуатації; 3) впровадження постійного моніторингу контролю роботи систем теплопостачання, впровадження системи енергетичного менеджменту; 4) виведення з експлуатації малоефективних котлів, заміна застарілих котлів на сучасні; 5) заміна трубопроводів теплових мереж на заздалегідь теплоізольовані; 6) утеплення захищаючих конструкцій будівель бюджетної сфери; 7) реконструкція центральних теплових пунктів: впровадження індивідуальних теплових пунктів; встановлення підмішувальних насосів; 8) заміна газових пальників застарілого типу на сучасні автоматичні, встановлення струйно-нішевих пальників; 9) встановлення системи глибокої рекуперації тепла від вхідних газів на потреби гарячого водопостачання; 10) закільцювання і оптимізація теплових мереж, перепідключення теплового навантаження із закриттям нерентабельних котельних.

Висновки. Розроблений адитивний алгоритм розв'язання векторних задач цілочислової лінійної оптимізації з булевими змінними дозволяє отримувати Парето-оптимальні розв'язки та відповідні їм оцінки в просторі критеріїв. Однією з основних властивостей даного алгоритму, побудованого на основі ідей методу Балаша, є те, що в ньому потрібне виконання тільки операцій складання і віднімання. Запропонований алгоритм застосовано до розв'язання практичної задачі вибору заходів модернізації джерел теплогенерації та систем теплопостачання Сумської області.

Н.В. Семенова, Д.А. Чайка

АДДИТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С БУЛЕВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Разработан аддитивный алгоритм решения векторных задач целочисленной линейной оптимизации с булевыми переменными, который позволяет получать Парето-оптимальные решения и соответствующие им оценки в пространстве критериев. Предложенный алгоритм применен к решению практической задачи выбора мероприятий модернизации источников теплогенерации и систем теплоснабжения Сумской области.

N.V. Semenova, D.O. Chayka

AN ADDITIVE ALGORITHM FOR SOLVING VECTOR LINEAR OPTIMIZATION PROBLEM WITH BOOLE VARIABLES

Additive algorithm for solving vector linear optimization problem with boole variables is developed. An algorithm allows to get Парето-optimum solutions and proper by him estimations in space of criteria. The offered algorithm to working out real practical problems of choice of measures of modernization of sources of generation of heat and system of supply of heat of thethe Sumy Oblast (Ukraine) is used.

Список літератури

1. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. Київ: Наук. думка, 2009. 266 с.
2. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.
3. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2000. № 6. С. 39 – 46.
4. Balas E. An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables. *Operations Research*. 1965. **13**, N 4. P. 517 – 546.

Одержано 09.04.2018