УДК 519.8

Г.П. ДОНЕЦЬ, А.М. НАГІРНА

МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЇ ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Розглянуто алгоритм знаходження оптимального розв'язку задачі умовної оптимізації лінійної функції на комбінаторній множині перестановок, представленої у вигляді графа. Запропоновано практичне застосування алгоритму.

Вступ. Задачі комбінаторної оптимізації знайшли своє широке застосування у різних сферах діяльності. На даний момент, комбінаторні ідеї і методи використовуються не лише в класичних науках, таких як, математика, фізика, теорія ігор, а все більше знаходять своє втілення в прикладних сферах, наприклад, кристалографії, криптографії, економіки, агротехніки, хімії, астрології, біології, військової справи і т. п.

Представлення задачі у вигляді графа є ключовим підходом до розв'язання багатьох алгоритмічних задач.

Графічне представлення забезпечує простий і наглядний опис комбінаторних множин, і дозволяє формувати нові алгоритми та методи пошуку оптимальних розв'язків.

Математична модель оптимізаційної задачі з лінійною функцією цілі найбільш розповсюджена і типова, тому в роботі розглядається дана модель, але допустима множина має комбінаторну природу. Представлення множини перестановок у вигляді графа дозволяє за лічені кроки отримати оптимальний розв'язок, з урахуванням додаткових обмежень.

Дослідження в даному напрямі представлені в роботах [1 – 7]. В даній роботі представлено новий алгоритм знаходження оптимального розв'язку оптимізаційної задачі з лінійною функцією цілі з додатковими обмеженнями, де допустима множина представляє собою перестановку.

1. Постановка задачі. Розглянемо оптимізаційну задачу з цільовою функцією $F(x): X \to R$ на комбінаторній множині перестановок $P_n(A)$ та додаткові лінійні обмеження, які утворюють опуклу многогранну множину $D \subset R^n$ такого вигляду: $D=\{x \in R^n \mid Gx \le b\}$, де $G \in R^{m\times n}$, $b \in R^m$.

Лінійні обмеження мають вигляд:

$$Gx=\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_j \ge b_i,\ i \in N_m,\ j \in N_n. \qquad (1)$$

Послідовність перестановок, згідно методу їх генерування, інтерпретується як граф G_n, вершини якого відповідають точкам множини перестановок $P_n(A)$ [2].

Означення 1. Нормалізацією функції $f(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ називається відображення перестановки $u: N \to C$, що встановлює впорядкування коефіцієнтів $c_1, c_2, \ldots, c_n$ цільової функції за зростанням (спаданням) [3].

2. Алгоритм розв'язування екстремальної задачі з додатковими обмеженнями на комбінаторній множині перестановок. Алгоритм складається з послідовності кроків:

1) здійснюємо нормалізацію додаткового обмеження, згідно цільової функції на множині перестановок;

2) користуючись алгоритмом [4], отримуємо першу граничну точку переставного многогранника $X_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ldots, x_j^1, \ldots, x_i^1, \ldots, x_m^1) \in G_n$, що задовольняє додаткове обмеження $g_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ldots, x_m^1) \le b$;

3) знаходимо значення цільової функції $f_1(x_1', x_2', x_3', \ldots, x_m')$ в даній точці, з урахуванням нормалізації;

4) перевіряємо виконання умови $g_2 \le b$.

Розглянемо [4]:

$$\Delta u_1 : N \to C : \Delta u_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_m^1 \\ u^{-1}(1) & u^{-1}(2) & \ldots & u^{-1}(m) \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

З урахуванням $u^{-1}(i) \to \max$, де $u^{-1}(i) > u^{-1}(j)$, $i, j \in N_m$ $\left(u^{-1}(i), u^{-1}(j) \in (u^{-1}(1), u^{-1}(2), \ldots, u^{-1}(m))\right)$, знаходимо $x_i^1 > x_j^1$ $\left(x_i^1, x_j^1 \in (x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ldots, x_m^1)\right)$.

Тоді $\nabla g_1 = \nabla g_{12} - \nabla g_{11} = \left(x_i^1 * u^{-1}(j) + x_j^1 * u^{-1}(i)\right) - \left(x_j^1 * u^{-1}(j) + x_i^1 * u^{-1}(i)\right) \Rightarrow$

$$g_2 = g_1 + \Delta g_1. \qquad (3)$$

Здійснюємо перестановку x_i^1 на x_j^1 і отримуємо новий оптимальний розв'язок $X_2(x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots, x_i^2, \ldots, x_j^2, \ldots, x_m^2) \in G_n$.

У випадку не виконання умови $g_2 \le b$, розглянемо наступну перестановку $x^1_{i^*} > x^1_j$, при $u^{-1}(i) \to \max$ і повторимо крок 4).

Якщо ж неможливо здійснити перестановку при $u^{-1}(i) \to \max$, то розглянемо можливість перестановки $u^{-1}(i')$, за умови їх лексикографічного упорядкування за спаданням, тобто $u^{-1}(i) > u^{-1}(i')$ і повторимо крок 4);

5) знаходимо зростання цільової функції ∇f_1:

$$\Delta u_1' = \begin{pmatrix} x_1'^1 & x_2'^1 & \dots & x_n'^1 \\ u(1) & u(2) & \dots & u(\mathrm{n}) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\nabla f_1 = \nabla f_{12} - \nabla f_{11} = \left(x_i'^1 * u(j) + x_j'^1 * u(i)\right) - \left(x_j'^1 * u(j) + x_i'^1 * u(i)\right) \Rightarrow$$

$$f_2 = f_1 + \Delta f_1; \tag{5}$$

6) повторимо крок 4).

3. Приклад. Знайти максимальне значення цільової функції $f(x) = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5$, при обмеженні $g = 5x_1 + x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 2x_5 \le 56$ на множині перестановок (1, 2, 3, 4, 5).

Розв'язання. Розглянемо додаткове обмеження $g = 5x_1 + x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 2x_5 \le 56$ та нормалізуємо його у порядку зростання за допомогою перестановки $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Отримуємо обмежуючу функцію вигляду $g' = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 \le 56$.

Користуючись методом локалізації [4], знаходимо максимальне і мінімальне значення обмежуючої функції на множині перестановок:

$$\max g(x) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 8 \cdot 5 = 77;$$
$$\min g(x) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 43.$$

Аналогічно знаходимо числові значення додаткових обмежень в крайніх точках структурного графа.

Структурний граф переставного многогранника буде мати вигляд, який показано на рисунку.

Оскільки $g(5,\ 3,\ 2,\ 1,\ 4) = 56$, тобто, $g_1(x) = 56$. Тоді, згідно вище викладеного алгоритму точка (5, 3, 2, 1, 4) є першим допустимим розв'язком. Нормалізуючи даний розв'язок, отримаємо точку (1, 5, 4, 2, 3), $f_1(x) = 69$.

Переходимо до 4-го кроку алгоритму:

$$\Delta u_1 : N \to C : \Delta u_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

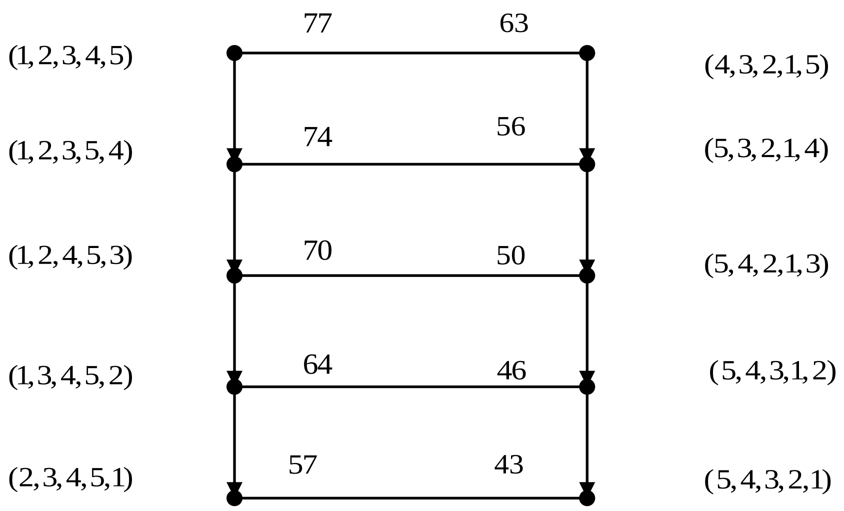

РИСУНОК. Структурний граф переставного многогранника

Оскільки $u^{-1}(2)=5 \to \max$, $x_1^1=5>x_2^1=3$. То необхідно здійснити перестановку x_1^1 і x_2^1.

Знаходимо g_2, користуючись (3):

$\Delta g_1=\Delta g_{12}-\Delta g_{11}=\left(5*1+3*2\right)-\left(3*1+5*2\right)=2 \Rightarrow g_2=56+2$, $g_2=58>56$, тому не можна здійснити дану перестановку.

Розглянемо $u^{-1}(2)>u^{-1}(5)$, $x_5^1=4>x_2^1=3$, тому необхідно здійснити перестановку x_5^1 і x_2^1.

Перевіряємо $g_2 \le b$:

$\Delta g_2=\Delta g_{22}-\Delta g_{21}=\left(4*2+3*8\right)-\left(3*2+4*8\right)=-6 \Rightarrow g_2=56-6=50,$

$g_2=50<56$, отже робимо перестановку x_5^1 і x_2^1, відповідно новий розв'язок: точка (5, 4, 2, 1, 3).

Знаходимо зростання цільової функції Δf_1:

користуючись (4) нормалізуємо отриманий розв'язок і отримуємо точку (1, 5, 3, 2, 4).

Застосовуючи формулу (5):

$\Delta f_1=\Delta f_{12}-\Delta f_{11}=\left(3*5+4*8\right)-\left(4*5+3*8\right)=3 \Rightarrow f_2=69+3=72$.

Слід відмітити, що значення додаткового обмеження спадає, а функція зростає.

Аналогічно попереднім міркуванням робимо наступні обчислення.

Розглядаємо $u^{-1}(1) < u^{-1}(2)$, $x_1^1 = 5 > x_2^1 = 4$, тому необхідно здійснити перестановку x_1^1 і x_2^1.

Перевіряємо $g_3 \le b$:

$$\Delta g_3 = \Delta g_{23} - \Delta g_{13} = \left(4*1+5*2\right) - \left(5*1+4*2\right) = 1 \Rightarrow g_3 = 50+1 = 51,$$

$g_3 = 51 < 56$, робимо перестановку x_5^1 і x_2^1, відповідно новий розв'язок: точка (4, 5, 2, 1, 3).

З урахуванням (4) отримуємо точку (1, 4, 3, 2, 5).

Застосовуючи формулу (5) знаходимо:

$$\Delta f_2 = \Delta f_{22} - \Delta f_{21} = \left(4*2+5*8\right) - \left(5*2+4*8\right) = 6 \Rightarrow f_3 = f_2 + \Delta f_2 = 72+6 = 78.$$

Розглядаємо $u^{-1}(5) < u^{-1}(4)$, $x_5^1 = 3 > x_3^1 = 2$, тому необхідно здійснити перестановку x_3^1 і x_5^1.

Знаходимо значення g_4:

$$\Delta g_4 = \Delta g_{24} - \Delta g_{14} = \left(3*4+2*8\right) - \left(2*4+3*8\right) = -4 \Rightarrow g_4 = 51-4 = 47,\ g_4 < 56,$$

тому можна здійснити перестановку x_3^1 і x_5^1, тоді новий розв'язок: точка (4, 5, 3, 1, 2). Нормалізуючи розв'язок, отримуємо точку (1, 4, 2, 3, 5).

Користуючись формулою (5) знаходимо:

$$\Delta f_3 = \Delta f_{32} - \Delta f_{31} = \left(2*5+3*7\right) - \left(3*5+2*7\right) = 2 \Rightarrow f_4 = f_3 + \Delta f_3 = 78+2 = 80.$$

Розглядаємо $u^{-1}(1) < u^{-1}(3)$, $x_1^1 = 4 > x_3^1 = 3$, тому необхідно здійснити перестановку x_3^1 і x_1^1.

Знаходимо значення g_5:

$$\Delta g_5 = \Delta g_{25} - \Delta g_{15} = \left(3*1+4*4\right) - \left(4*1+3*4\right) = 3 \Rightarrow g_5 = 47+3 = 50,\ g_5 < 56,$$

тому можна здійснити перестановку x_3^1 і x_1^1, тоді новий розв'язок: точка (3, 5, 4, 1, 2). Нормалізуючи розв'язок, отримуємо точку (1, 3, 2, 4, 5).

Користуючись формулою (5) знаходимо:

$$\Delta f_4 = \Delta f_{42} - \Delta f_{41} = \left(3*2+4*7\right) - \left(4*2+3*7\right) = 5 \Rightarrow f_5 = f_4 + \Delta f_4 = 80+5 = 85.$$

Розглядаємо $u^{-1}(5) > u^{-1}(1)$, $x_1^1 = 3 > x_5^1 = 2$, тому необхідно здійснити перестановку x_5^1 і x_1^1.

Знаходимо значення g_6:

$$\Delta g_6 = \Delta g_{26} - \Delta g_{16} = \left(3*1+4*4\right) - \left(4*1+3*4\right) = 3 \Rightarrow g_6 = 50+7 = 57,\ g_6 > 56,$$

тому не можливо здійснити перестановку x_3^1 і x_1^1.

Оскільки, більше не має в наявності $u^{-1}(i) > u^{-1}(j)$, то пошук оптимального розв'язку припинено. Відповідно розв'язком даної задачі буде точка

(1, 3, 2, 4, 5). В даній точці функція цілі набуває свого максимального значення $f = 85$.

Побудуємо таблицю, в якій відобразимо тільки ті допустимі розв’язки, які задовольняють нерівність g J 56.

ТАБЛИЦЯ. Шлях переміщення до оптимального розв’язку

№	Розв’язок	g_i	Нормалізований розв’язок	f_i
1	(5,3,2,4,1)	56	(1,5,4,2,3)	69
2	(5,4,2,1,3)	50	(1,5,3,2,4)	72
3	(4,5,2,1,3)	51	(1,4,3,2,5)	78
4	(4,5,3,1,2)	47	(1,4,2,3,5)	80
5	(3,5,4,1,2)	50	(1,3,2,4,5)	85

Проаналізувавши таблицю, необхідно звернути увагу на те, що не можна говорити про належність оптимального розв’язку тільки граничним точкам, водночас, слід відмітити, що зростання цільової функції відбувається при дотриманні умови g J 56, не залежно від коливань числових значень обмеження та фіксуванні значень першої і останньої координати в нормалізованому розв’язку.

Необхідно звернути увагу, що граф множини перестановок (1, 2, 3, 4, 5) складається із 120 вершин і 5 підграфів. При застосуванні обмежуючої функції g J 56, множина перестановок передбачає звуження множини допустимих розв’язків до 43 точок графа перестановок. Представлений алгоритм дозволяє за 6 обчислювальних кроків отримати оптимальний розв’язок задачі, що говорить про ефективність даного алгоритму.

Висновок. Описано новий алгоритм розв’язання оптимізаційних задач з лінійною функцією цілі та додатковими обмеженнями на комбінаторній множині перестановок. Даний алгоритм дозволяє знайти оптимальний розв’язок, за рахунок побудови найкоротшого шляху в графах та під графах переставного многогранника, де початковою точкою є гранична точка обмеження. Особливість переходу від граничної точки до інших полягає у перестановці координат опорного розв’язку, за умови виконання обмеження та безпосереднього зростання функції цілі.

Проілюстровано застосування вищеописаного алгоритму для знаходження оптимального розв’язку оптимізаційної задачі на комбінаторній множині перестановок.

Дослідження в даному напрямі будуть продовжені з метою побудови нових алгоритмів розв’язання даного класу оптимізаційних задач на інших комбінаторних множинах та нелінійної модифікації функції цілі.

Г.А. Донец, А.Н. Нагорная

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Рассмотрен алгоритм нахождения оптимального решения задачи условной оптимизации линейной функции на комбинаторном множестве перестановок, представленном в виде графа. Представлено практическое применение алгоритма.
G.A. Donets, A.N. Naghirna

THE METHOD OPTIMIZATION OF LINEAR FUNCTION ON COMBINATORIAL SET OF PERMUTATION

An algorithm for finding the optimal solution of the problem of conditional optimization of a linear function on a combinatorial set of permutations is presented, presented in the form of a graph. The practical application of the algorithm is considered.

Список літератури

1. Донець Г.П., Нагірна А.М. Оптимізація квадратичної функції на множині розміщень. *Теорія оптимальних рішень.* 2017. С. 15 − 21.
2. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Построение гамильтонова пути в графах перестановочных многогранников. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. № 1. С. 10 – 16.
3. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Локализация значений линейной функции заданной на перестановках. *Радиоэлектроника и информатика*. 2009. № 1. С. 50 – 61.
4. Донець Г.П., Нагірна А.М. Умовна оптимізація лінійної функції на перестановках. *Теорія оптимальних рішень*. 2014. С. 16 − 23.
5. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Об одной задачи оптимизации дробно-линейной функции цели на перестановках. *Проблемы управления и информатики*. 2010. № 2. С. 12 − 16.
6. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Об одном подходе к решению комбинаторной задачи оптимизации на графах. *Управляющие системы и машины*. 2009. № 4. С. 36 − 42.
7. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Алгоритм поиска значений линейной функции на лексикографически упорядоченных перестановках. *Теорія оптимальних рішень*. 2009. С. 3 − 8.

Одержано 29.03.2018