УДК 519.21

А..Ф. ГОДОНОГА, Л.Л. ГОЛБАН, Б.М. ЧУМАКОВ

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассматриваются некоторые модели принятия решений в условиях неопределенности и приводится их анализ с точки зрения критериев Вальда и Сэвиджа. В зависимости от анализируемого критерия, получаемые математические модели отличаются различной степенью сложности с точки зрения их оптимизации.

Теория принятия решений в условиях неопределенности предлагает достаточно критериев, чтобы дать лицу принимающего решение (ЛПР) инструмент для оценки возможных потерь или выигрышей, даже если вероятности наступления различных вариантов событий неизвестны.

Ситуации, когда решения принимаются в условиях неопределенности часто рассматриваются на языке теории игр, где друг другу противостоят два игрока, игрок A (ответственный за принятие решений) и игрок B (природа или сознательная группа), и для каждого возможного набора $(u,\omega)\in U\times\Omega$, игроку A соответствует определенная функция полезности $r(u,\omega)$. Не ограничивая общности, в качестве $r(u,\omega)$ рассматривается некоторая функция стоимости, по отношению к игроку A. В экономических терминах $r(u,\omega)$ – доход, прибыль либо затраты системы, которая контролируется и управляется интересами игрока A. Если a priori была бы известна конкретная реализация состояния природы ω, то естественным является выбор допустимого решения $u=u^*(\omega)\in U$, которое также определяет минимум функции стоимости

$$r(u^*(\omega),\omega)=\min_{u\in U}[r(u,\omega)].$$

Неопределенность проявляется в том, что трудно или даже невозможно предсказать конкретный вариант, которым реализуется состояние природы $\omega\in\Omega$.. Тем сложнее будет действие, связанное с принимаемым решением, что требует апробации и внедрения раньше, или намного раньше, момента наступления конкретной реализации состояния ω.

Если оба множества U и Ω конечны $U=\{u_1,u_2,...,u_n\}$, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_m\}$, тогда ситуацию, в условиях которой принято решение можно описать как матричную игру, где $r_{ij}=r(u_i,\omega_j)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ – элементы матрицы стоимости. Такие случаи широко изучены в работах [1 – 4].

Пусть множество допустимых вариантов принятия решений U – это выпуклая и компактная в евклидовом пространстве, а $r(u,\omega)$ для любого фиксированного элемента $\omega\in\Omega$ – выпуклая и непрерывная функция на множестве U. По аналогии с ситуациями, в которых и U и Ω конечны, естественно было бы анализировать известные критерии принятия решений и для множества U, содержащее бесконечное число элементов.

Критерий Вальда («пессимистический критерий»). При применении данного критерия, оптимальное решение $u^*\in U$ будет определять значение стоимости $R_W(u^*)$, в соответствии с правилом:

$$R_W(u^*)=\min_{u\in U}R_W(u)=\min_{u\in U}\max_{\omega\in\Omega}r(u,\omega).$$

Таким образом, в данном случае лицо, принимающее решение $u\in U$, ожидает максимальных потерь $\max_{\omega\in\Omega}r(u,\omega)$ но, действуя рационально (используя свои возможности), будет стремиться потери свести к минимуму. Известно, что функция Вальда $R_W(u)=\max_{\omega\in\Omega}r(u,\omega)$ выпукла на множестве U [2].

Критерий Сэвиджа (критерий сожалений). Концепция сожаления считается эквивалентной оценке потерь, вызванных выбором не лучшей альтернативы по отношению определенного состояния природы [4]. Сэвидж пытается объяснить (что кажется вполне логичным), что рациональное решение будет способствовать минимизации максимально возможного сожаления. В отношении каждого состояния природы $\omega\in\Omega$, для принятого решения $u\in U$ оценивается значение сожаления:

$$\overline{r}(u,\omega)=r(u,\omega)-\min_{u\in U}\left[r(u,\omega)\right],$$

которое представляет собой дополнительную потерю (или цену), соответствующую паре (u,ω), относительно наилучшего решения для заданного состояния ω неконтролируемого фактора. Итак, если лицо, принимающее решение u, принимает решение при состоянии природы ω, то может сожалеть, что, не используя наилучшего решения, потеряет $\overline{r}(u,\omega)$ дополнительных денежных единиц.

Определение. Функция $\overline{r}(u,\omega)$ называется функцией сожалений по отношению к состоянию природы $\omega\in\Omega$, а $R_S(u)=\max_{\omega\in\Omega}\overline{r}(u,\omega)$ – функцией Сэвиджа.

Имея функцию или матрицу сожалений $\overline{r}(u,\omega)$, в соответствии с концепцией Сэвиджа, применяется минимаксный критерий:

$$R_S^* = \min_{u \in U} R_S(u) = \min_{u \in U} \max_{\omega \in \Omega} \bar{r}(u, \omega),$$

где значение R_S^* – это самая низкая дополнительная плата при реализации самого неблагоприятного состояния ω из множества Ω.

Не сложно доказать, что если $\bar{r}(u,\omega)$ выпуклая функция на выпуклом множестве U, для любой ситуации неконтролируемого состояния, функция сожалений $\bar{r}(u,\omega)$ также является выпуклой функцией на U для любого $\omega \in \Omega$. Действительно. Пусть u, v – два произвольных элемента из U и числа α и β такие, что $\alpha, \beta \in [0;1]$, $\alpha + \beta = 1$. Обозначим $r_\omega^* = \min_{u \in U} r(u,\omega)$. Функция сожалений $\bar{r}(u,\omega) = r(u,\omega) - r_\omega^*$. Тогда $\bar{r}(\alpha u + \beta v, \omega) = r(\alpha u + \beta v; \omega) - r_\omega^* \le \alpha r(u,\omega) + \beta r(v,\omega) - r_\omega^* = \alpha(r(u,\omega) - r_\omega^*) + \beta(r(v,\omega) - r_\omega^*) = \alpha \bar{r}(u,\omega) + \beta \bar{r}(v,\omega)$.

Задача минимизации функции

$$R_S(u) = \max_{\omega \in \Omega} \bar{r}(u, \omega),$$

на допустимом множестве U управляющих факторов, в общих чертах, сталкивается со следующими трудностями:

• для каждого состояния природы невозможно точно вычислить значения $\min_{u \in U} r(u,\omega)$ и, более того, значение функции сожаления $\bar{r}(u,\omega)$;

• в случае если множество Ω содержит, очень много элементов или даже бесконечное число элементов, становится проблематичной «корректная» оценка функции $R_S(u)$, без которой невозможно решить задачу в целом.

В этом контексте особый интерес представляет определение конструктивных и эффективных схем решения задачи, даже в выпуклых случаях, в которых присутствует функция сожалений Сэвиджа. Далее, предполагается, что множество состояний природы Ω состоит из конечного числа элементов: $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_i, ..., \omega_m\}$. На основе метода проекции обобщенного градиента рассматривается численная схема решения проблемы минимизации функции Сэвиджа на множестве U. Для этого параллельно строятся $m+1$ вычислительный процесс, подобных, самому методу проекции обобщенного градиента. То есть, для каждого i=1,2,..., m инициируются m итерационных вычислительных процессов, каждый из которых определяет приближенные значения $\min_{u \in U} r(u,\omega_1)$, $\min_{u \in U} r(u,\omega_2)$,..., $\min_{u \in U} r(u,\omega_m)$, $u_{(i)}^{k+1} = \Pi_U(u_{(i)}^k - h_{(i)k} \cdot gradr(u_{(i)}^k, \omega_i))$, $i = \overline{1,m}$.

Здесь $gradr(u_{(i)}^k, \omega_i)$ обобщенный градиент функции $r(u,\omega_i)$ для $u = u_{(i)}^k$. Следовательно принимается во внимание, что с ростом значений k, величина $r(u_{(i)}^k, \omega_i)$ будет все ближе и ближе к величине $r(u_{(i)}^*, \omega_i) = \min_{u \in U} r(u,\omega_i)$, $i = \overline{1,m}$.

При этом оценки $r(u_{(i)}^k, \omega_i)$ используются для построения $(m+1)$-го итерационного процесса (причем, последний процесс, выполняется параллельно с первыми m процессами): $u^{k+1} = \Pi_U(u^k - h_k \cdot grad\tilde{R}_S(u^k))$, где u^0, любой элемент из U, а $\tilde{R}_S(u^k) = \max\limits_{1 \le i \le m}[r(u^k, \omega_i) - r(u_{(i)}^k, \omega_i)]$.

При реализации соответствующих вычислительных процессов, предполагается выполнение необходимых условий относительно величин шаговых множителей, для обеспечения сходимости последовательностей $\{u_1^k\}$, $\{u_2^k\}$, ..., ..., $\{u_m^k\}$ и u^k:

$$h_{(i)k} \ge 0;\ h_{(i)k} \to 0;\ \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} h_{(i)k} = \infty;\ i = \overline{1,m},\ h_k \ge 0;\ h_k \to 0;\ \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} h_k = \infty.$$

Линейная модель. Пусть модель имеет такой вид:

$$r(u,\omega) = \sum_{j=1}^{n} C_j(\omega) \cdot u_j, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot u_j \le b_i, & i = \overline{1,m} \\ \underline{u_j} \le u_j \le \overline{u_j}, & j = \overline{1,n} \end{cases}, \tag{2}$$

где – $r(u,\omega)$ полезность (например, гипотетический доход предприятия), выраженная в денежном эквиваленте, в зависимости от пары (u,ω).

С точки зрения критерия Вальда требуется определить значение:

$$R_W(u^*) = \max_{u \in D} R_W(u) = \max_{u \in D} \min_{\omega \in \Omega} r(u,\omega),$$

где D – множество, определенное ограничениями (2). Таким образом, в этом случае, задача *maxmin*, а не *minmax*. Необходимо на множестве D решить задачу

$$R_W(u) = \min_{\omega} r(u,\omega) \to \max_{u}.$$

Описание алгоритма. Определяются следующие функции

$$\Psi_i(u) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot u_j - b_i,\ i = \overline{1,m},$$

и множество $U = \left\{ u = (u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_n) : \underline{u_j} \le u_j \le \overline{u_j},\ j = \overline{1,n} \right\}$. Для $k = 0, 1, \ldots$, применяя правило проектирования, определяется последовательность $u^0, u^1, \ldots, u^k, u^{k+1}, \ldots \in U$.

$$u^{k+1} = \mathrm{P}_U\left(u^k + h_k \cdot \eta^k\right),$$

$$\eta^k = \left\{ \begin{matrix} grad\ R_W(u^k) = \left(C_1(\omega^k), \ldots, C_j(\omega^k), \ldots, C_n(\omega^k)\right)^T, \text{ если } \Psi_i(u) \le 0\ \forall\ \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, m \\ -\left(a_{i_k 1}, \ldots, a_{i_k j}, \ldots, a_{i_k n},\ \right)^T, \text{ если } \Psi_{i_k}(u^k) > 0. \end{matrix} \right\};$$

$grad\ R_W(u^k)$ – обобщенный градиент функции $R_W(u)$; для $u = u^k$, $R_W(u^k) = r\left(u^k, \omega^k\right) = \min\limits_{\omega \in \Omega} r\left(u^k, \omega\right)$, $\omega^k \in \Omega$, $\Psi_{i_k}(u^k) = \max\limits_{1 \le i \le m} \Psi_i(u^k)$, $i_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Критерий Сэвиджа. Допустим, что известно решение $u^*(\omega): r(u^*(\omega),\omega) = \max_u r(u,\omega)$. Рассматривается функция $r_S(u,\omega) = r(u^*(\omega),\omega) - r(u,\omega) \ge 0$, представляющая стоимость сожаления. На рис. 1 показаны графики функций Вальда $R_W(u)$ и Сэвиджа $R_S(u)$ для двух состояний природы. Таким образом, в данном случае необходимо на множестве D, описанным ограничениями (2) минимизировать функцию Сэвиджа $R_S(u)$.

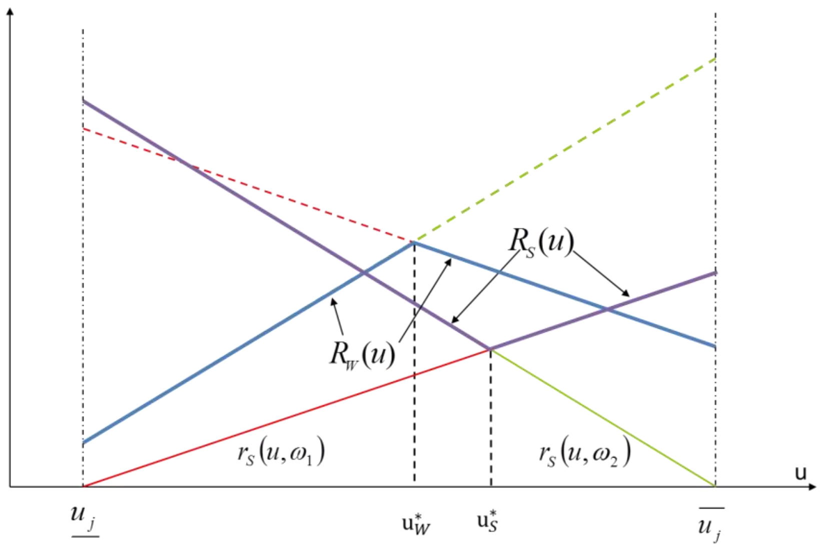

РИС. 1. Графическая интерпретация функций Вальда, Сэвиджа и соответствующие варианты решения u_W^*, u_S^*

Численное исследование предлагаемых алгоритмов. Пусть $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$, $r(u,\omega_1) = 3u_1 + 9u_2$ $r(u,\omega_2) = 6u_1 + 4u_2$. Множество U определено на следующих интервалах $\underline{u} = (0,0)$: $\overline{u} = (90,120)$; а первая подсистема ограничений (2) имеет вид: $3u_1 + 1u_2 \le 240$; $5,7u_1 + 5u_2 \le 360$; $7u_1 + 4u_2 \le 420$. Максимальное количество итерации $k_{\max} = 100000$. На рис. 2 показаны полученные оптимальные значения:

а) критерий Вальда $u_W^* = (41,37815; 24,82751)$. Согласно алгоритму оптимальные значения $R_W(u_W^*)$ изменяются между: $r(u_W^*,\omega_2) \approx 347,5789$, $r(u_W^*,\omega_1) \approx 347,58203$. Критерий предполагает, что ЛПР, внимательно рассматривает альтернативы, чтобы выбрать вариант, который имеет максимальную полезность в самых неблагоприятных условиях, независимо от того, какое условие будет происходить;

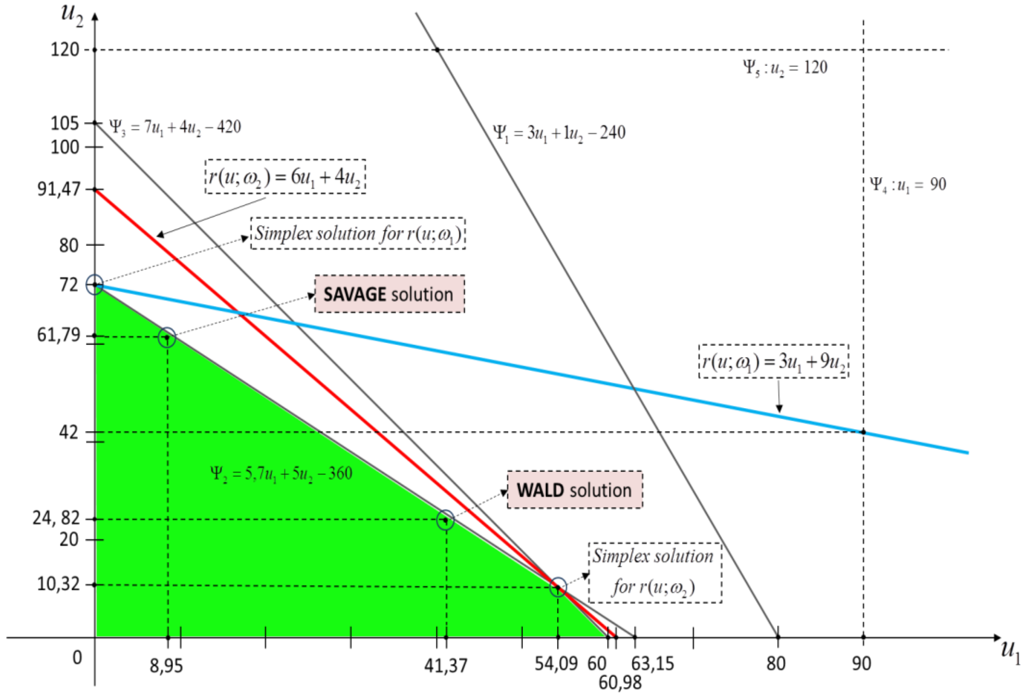

РИС. 2. Графическое изображение оптимальных вариантов согласно критериям Вальда и Сэвиджа

б) критерий Сэвиджа. Для $u_S^* = (8{,}95;\ 61{,}79)$ функции цели оцениваются $r(u,\omega_1) \approx 582{,}99062$ и $r(u,\omega_2) \approx 300{,}89167$. Следует отметить, что, хотя целевые функции имеют разные значения, сожаление по каждому из них одно и то же. ЛПР, кто предпочитает применять критерий Сэвиджа, более подвержены риску, чем ЛПР, кто предпочитает критерий Вальда. В этом случае, даже если шансы на достижение двух состояний природы неизвестны, ЛПР, скорее всего, предпочтет выбрать стратегию u_S^* для экономической системы, в которой он работает.

Задача транспортного типа и критерий Сэвиджа. Рассматривается модель транспортной задачи (ТЗ), в которой стоимости перевозок зависят от возможных «состояний природы», т. е. величин ω.

$$Z(x,\omega) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}(\omega)\cdot x_{ij}, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ \ i = \overline{1,m}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j,\ j = \overline{1,n}, \quad x_{ij} \ge 0. \tag{4}$$

$$\omega \in \Omega = \{\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r\}. \tag{5}$$

В случае, когда отсутствует информация об ω принятие решения следует проецировать на концепцию «минимального сожаления» или критерий Сэвиджа. Предлагается модель $Z_S(x) = \max\limits_{\omega\in\Omega}\left(Z(x,\omega) - Z^*(\omega)\right) \to \min$, где $Z^*(\omega) = \min\limits_{x\in D} Z(x,\omega)$, $\omega \in \Omega$, $Z_S(x)$ – недифференцируемая, кусочно-линейная выпуклая функция и вычисление субградиента функции не представляет существенных трудностей.

В условиях (4), (5) рассматриваются r задач:

$$Z(x,\omega^k) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}(\omega^k)\cdot x_{ij} \to \min,\ k = 1,2,\ldots r.$$

Пусть $Z^*{}_k = \min\ Z(x,\omega^k)$, а $Z(x,\omega^k) - Z^*{}_k$ – величина сожаления, если состояние природы $\omega = \omega^k$. Тогда $Z_S(x) = \max\limits_{1\le k\le r}\left(Z(x,\omega^k) - Z^*{}_k\right)$ – это минимальное значение сожаления при плане перевозок $x = \{x_{ij}\}$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$.

Алгоритм определения варианта x_S^*: $Z_S(x_S^*) = \min\limits_{x\in D} Z_S(x)$. Определяем функции

$$\Phi_i(x_{i1},\ldots,x_{in}) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - a_i,\ i = \overline{1,m};\ \Psi_j(x_{1j},\ldots,x_{mj}) = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij},\ j = \overline{1,n}.$$

Пусть начальное решение $x^0 = \left\{x_{ij}^0\right\} : x_{ij}^0 \ge 0$ из $X = \left\{x = \{x_{ij}\},\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n} : x_{ij} \ge 0\right\}$. Далее, применяется модифицированный [3] метод обобщенного градиента, адаптированный к структуре данных и определяется следующий итеративный процесс последовательного определения матриц $x^1,\ldots, x^s,\ x^{s+1} = \prod_X (x^s - \rho_s \cdot g^s)$. Здесь $g^s = \left\{g_{ij}^s\right\}$ определяет направление движения на итерации (s+1), ρ_s – регулируется автоматически: $\rho_s \ge 0$, $\rho_s \to 0$, $\sum_{s=0}^{\infty}\rho_s = \infty$, $x^s = \{x_{ij}^s\}$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ – принятое решение на итерации s. Пусть $\Phi_i\,(\bullet) \le 0$ и $\Psi_j\,(\bullet) \le 0$ для $x = x^s$, тогда $g_{ij}^s = C_{ij}^s$, $C^s : Z_S(x^s) = \max\limits_{1\le k\le r}\left(Z(x^s,\omega^k) - Z_k^*\right)$. В этом случае $Z(x^s,\omega^k) = \sum\limits_i\sum\limits_j C_{ij}(\omega^k)\cdot x_{ij}^s$. Пусть $\Phi_{i1}(\bullet) > 0,\ldots,\Phi_{il}(\bullet) > 0$ и/или $\Psi_{j1}(\bullet) > 0,\ldots,\Psi_{jt}(\bullet) > 0$, $1 \le l \le m$; $1 \le t \le n$. В таких случаях если $\Phi_i\ (x_{i1}^s,\ldots, x_{in}^s) > 0$, тогда $g_{ij}^s = 1$; если $\Phi_i\ (x_{i1}^s,\ldots, x_{in}^s) \le 0$, тогда $g_{ij}^s = 0$; если $\Psi_j\ (x_{j1}^s,\ldots, x_{jm}^s) > 0$, $g_{ij}^s = -1$; если $\Psi_j\ (x_{j1}^s,\ldots, x_{jm}^s) \le 0$, тогда $g_{ij}^s = 0$; если $\Phi_i\ (x_{i1}^s,\ldots, x_{in}^s) > 0$ и $\Psi_j\ (x_{j1}^s,\ldots, x_{jm}^s) > 0$ тогда $g_{ij}^s = \left\{\begin{array}{l} 1,\ \text{если } \Phi_i(\bullet) \ge \Psi_j(\bullet) \\ -1,\ \text{если } \Phi_i(\bullet) < \Psi_j(\bullet) \end{array}\right\}$.

Описаны теоретические и практические аспекты важности процесса принятия решений в условиях неопределенности и анализированы два наиболее важных критерия принятия решений: Вальда и Сэвиджа. Предлагаемые алгоритмы для условий, в которых ЛПР имеют бесконечное количество альтернатив, могут обеспечить эффективные, в режиме реального времени, решения различных практических ситуаций. В представленном исследовании подчеркиваются особенности каждой модели. Полученные результаты подтверждают их эффективность и точность. Такие алгоритмы необходимы для лиц, принимающих решения в рамках экономической системы, но которые не имеют достаточной соответствующей информации о проявлении неконтролируемых факторов.

А.Ф. Годонога, Л.Л. Голбан, Б.М. Чумаков

ДЕЯКІ МОДЕЛІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Розглядаються деякі моделі прийняття рішень в умовах невизначеності та наводиться їх аналіз з точки зору критеріїв Вальда і Севіджа. Залежно від аналізованого критерія, отримувані математичні моделі відрізняються різним ступенем складності з точки зору їх оптимізації.

A.F. Godonoga, L.L. Golban, B.M. Chumakov

SOME MODELS FOR DECISION-MAKING IN UNDERSTANDING CONDITIONS

The considered models of decision-making under uncertainty are analyzed from the point of view of the Wald and Savage criteria. Depending on the investigated criterion, the resulting mathematical models differ in varying degrees of complexity from the point of view of their optimization.

Список литературы

1. Hamdy A. Taha. Operations research an introduction, 3rd edition. London. 1982.
2. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев. Наук. думка, 1979.
3. Anatol Godonoagă, Anatolie Baractari. Modele economice nediferentiabile. Aspecte decizionale. Editura ASEM, Chisinău. 2011. P. 52 – 100.
4. Savage L.J. The theory of statistical decision. *J. Amer. Statist. Assoc*. 1951. Vol. 46, N 1. P. 55 – 67.
5. Andrei Gamețchi, Dumitru Solomon. Cercetări operaționale. Vol. I. Chișinău, Evrica, 2015. P. 209 – 216.

Получено 17.04.2018