

Проведено аналіз особливостей формалізації слабо структурованих задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах за наявності якісної та кількісної інформації. З позиції репрезентативної теорії вимірювань розглянуто проблеми вимірювання функцій належності нечітких множин та проблеми адекватності при формалізації такого класу задач.

© І.І. Рясна, 2018

УДК 519.8

І.І. РЯСНА

ПРОБЛЕМИ ФОРМАЛІЗАЦІЇ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА НЕЧІТКИХ МНОЖИНАХ

Вступ. Сутність основних труднощів при побудові математичних моделей, методів та алгоритмів розв'язування задач комбінаторної оптимізації (ЗКО) на нечітких множинах за наявності якісної та кількісної інформації пов'язана з тим, що функції належності нечітких множин визначаються в багатьох випадках на базі результатів суб'єктивних вимірювань. Це породжує низку проблем, які пов'язані з невизначеністю та багатозначністю результатів вимірювань якісних та кількісних характеристик, а також необхідністю агрегування цієї інформації. Адекватне, у рамках репрезентативної теорії вимірювань (РТВ) [1, 2], вирішення цих проблем потребує введення нових понять або дослідження особливостей застосування відомих понять.

Проблеми формалізації. Суттєва особливість суб'єктивного визначення числових значень функції належності нечіткої множини у сенсі Л. Заде полягає у наявності невизначеності результатів вимірювання, яка не має стохастичного характеру. Нечітка у сенсі Л. Заде множина A задається відображенням $\mu_A : U \rightarrow [0,1]$ [3]. Отже, результатом вимірювання значення $\mu_A(u | u \in U)$ є дійсне число з інтервалу $[0,1]$. Як приклад на рисунку показано результати оцінки значень функції належності властивості «великий зріст» людини у шкалі порядку двома експертами.

Наведені на рисунку значення двох функцій належності пов'язані монотонними перетвореннями, які є допустимими у шкалі порядку. Ця особливість невизначеності вимірювання значень функції належності може бути подана тризначною функцією належності [4]:

$$\mu(u) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u \in A^+, \\ 0, & \text{якщо } u \in A^-, \\ ?, & \text{якщо } u \in U \setminus (A^+ \cup A^-), \end{cases}$$

де A^+ – множина повної належності, A^- – множина повної неналежності. Результат вимірювання значень функції належності на межах між підмножинами повної неналежності та повної належності не є випадковим у сенсі теорії ймовірностей, тому що зв'язок між значеннями функції належності визначається монотонним перетворенням та є детермінованим.

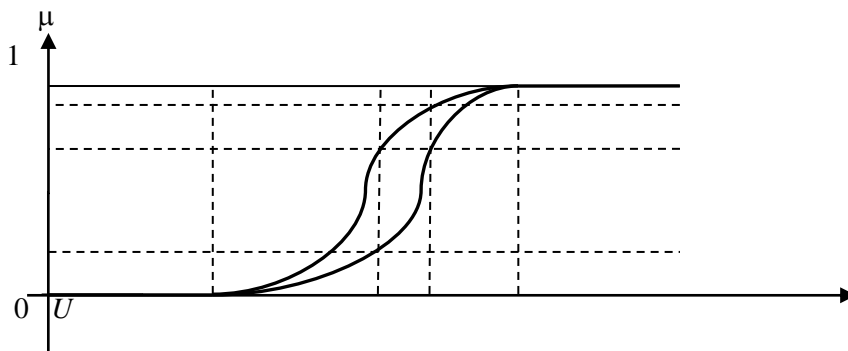


РИСУНОК. Результати оцінки двома експертами значень функції належності властивості «великий зріст» людини у шкалі порядку

Зауважимо, що така невизначеність присутня також за вимірювань у шкалах відношень та інтервалів.

Такі нечіткі множини за аналогією визначення поняття «недовизначена множина», яке наведено в роботі [4], будемо називати *недовизначеними* нечіткими множинами. Метою введення поняття «недовизначена нечітка множина» є фіксація наявності невизначеності числових вимірювань функції належності у шкалах порядку, інтервалів та відношень. Такого типу невизначеність породжується сутністю поняття шкала вимірювань у РТВ, яке репрезентується групою функцій належності, що пов'язані допустимими перетвореннями.

Отже, ЗКО на недовизначених нечітких множинах є слабо структурованими. Це призводить до певних проблем при агрегуванні результатів вимірювання функцій належності.

Використаємо означення нечіткої множини, яке наведено у роботі А. Кофмана [5], а саме: $\mu_A : U \rightarrow M$, де M – повністю упорядкована множина або множина належностей. Наведене означення дає можливість розглядати інші моделі нечітких множин.

Наприклад, множина M може бути множиною значень деякої лінгвістичної змінної, що дозволяє розглядати неструктуровані та слабо структуровані ЗКО, у яких якісна інформація подана природною мовою. Наприклад, лінгвістична змінна “висота” будівлі може мати три значення: висока, середня, низька. Невизначеність, що виникає при такому гранулюванні кількісної змінної, пов’язана з невизначеністю прообразів при відображенні значень кількісної змінної у значення лінгвістичної змінної.

Такого типу невизначеність може бути усунена, наприклад, у процесі експериментальних досліджень шляхом побудови функцій належності значень (термів) лінгвістичної змінної. Однак, у цих випадках на межах нечітких множин властивість, наприклад, «зріст» людини може мати декілька значень. Наприклад, людина може бути високою зі значенням функції належності 0,2 та середнього зросту зі значенням функції належності 0.8.

Зауважимо, що за такої багатозначності вимірювань для формалізації моделі вимірювань необхідно використовувати поняття *нечітка шкала* вимірювань [6], яке на даний час не застосовується як інструмент РТВ. Наведемо означення поняття нечітка шкала вимірювань.

Системою з відношеннями називається кортеж $\mathcal{M} = \langle A; R_1, \dots, R_i, \dots, R_n \rangle$, де A – непорожня множина, яка називається областю задання системи з відношеннями, R_1, \dots, R_n – відношення на A . Якщо $A \subseteq \mathbf{R}$, де \mathbf{R} – множина дійсних чисел, то система \mathcal{M} називається числовою системою з відношеннями (ЧСВ) [1]. Якщо A – множина нечислових математичних об’єктів (наприклад, символів, векторів, функцій), то система \mathcal{M} називається математичною системою з відношеннями (МСВ) [7]. Якщо множина A складається з емпіричних об’єктів і відношення на A визначені емпірично, то система \mathcal{M} називається емпіричною системою з відношеннями (ЕСВ).

Нехай U – множина емпіричних об’єктів, T – множина властивостей емпіричних об’єктів, визначених вербально, F_T – множина усіх нечітких підмножин на T , $\{R_i\}_{i=1}^n$ та $\{S_i\}_{i=1}^n$ – k_i -арні відношення, відповідно, на U та F_T .

Означення 1. Відображення $f : U \rightarrow F_T$ називається нечіткою шкалою, якщо для $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ і $\forall (u_1, \dots, u_{k_i}) \in U^{k_i}$ має місце

$$R_i(u_1, \dots, u_{k_i}) = S_i(f(u_1), \dots, f(u_{k_i})),$$

де $f(u_1), \dots, f(u_{k_i})$ – відповідні шкальні значення, які є елементами множини F_T , тобто є нечіткими підмножинами множини T .

Позначимо $\Omega = f(U)$. Таким чином, визначено МСВ $\mathcal{M}_2 = \langle \Omega, \{S_i\}_{i=1}^n \rangle$, що є гомоморфним образом ЕСВ $\mathcal{M}_1 = \langle U, \{R_i\}_{i=1}^n \rangle$, при цьому шкалу позначають також як відображення $f: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ або як кортеж $\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, f \rangle$ [1, 2]. Для нечітких шкал не досліджені питання про допустимі перетворення, адекватні та інваріантні функції тощо [6], тобто не досліджено три основні проблеми, що розглядаються в РТВ, а саме: проблеми подання, єдиності та адекватності [1].

Проблема подання полягає у доведенні того, що МСВ гомоморфна ЕСВ, яка розглядається з метою вимірювання властивостей елементів множини U та відношень між ними.

Проблема єдиності полягає у визначенні типу допустимих перетворень результатів вимірювань. Для цього потрібно визначити тип шкали, за допомогою якої здійснюється вимірювання. Тип шкали визначає як зміст поняття єдиності, так і тип допустимих перетворень результатів вимірювань.

Проблема адекватності пов'язана з проблемою єдиності. Результати розв'язування ЗКО розглядаються як адекватні, якщо вони не змінюються за допустимих перетворень у шкалах вимірювань, що використовуються. Зауважимо, що у класичних роботах з РТВ [1, 2] проблема адекватності розглядається у рамках формальної логіки, тобто не розглядається адекватність результатів застосування нечітких операторів.

Однак, іноді при побудові математичної моделі проблема подання не враховується. Тобто досліджуються відношення, які породжуються формальною моделлю, що застосовується, та ці відношення розповсюджуються на емпіричну систему, що може призвести до відсутності гомоморфізму відображення. У роботі [8] наведено приклад такого підходу в задачі оцінки конкурентоспроможності. Тому, на наш погляд, у рамках РТВ необхідно розширення поняття «адекватність» для того, щоб це поняття охоплювало й проблему подання, тобто було синонімом понять «коректність» або «правильність» моделі.

Означення 2. Відображення $\mathcal{M}_1 \xrightarrow{f} \mathcal{M}_2$, яке зберігає у МСВ (або ЧСВ) \mathcal{M}_2 відношення ЕСВ \mathcal{M}_1 , будемо називати *адекватним у широкому сенсі*.

Означення 3. Відображення $M_1 \xrightarrow{f} M_2$, яке зберігає у МСВ (або ЧСВ) M_2 відношення ЕСВ M_1 за допустимих перетворень у шкалах, що застосовуються при вимірюваннях, будемо називати *адекватним у вузькому сенсі*.

Означення 4. Відображення $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ будемо називати *адекватним*, якщо воно є адекватним як у широкому, так і у вузькому сенсі.

Таким чином, виділено наступні особливості ЗКО на нечітких множинах за наявності якісної та кількісної інформації:

- слабка структурованість таких ЗКО, яка обумовлюється недовизначеністю нечітких множин та вимагає розробки нових методів розв’язування задач оптимізації, що відмінні від методів нечіткого математичного програмування;
- необхідність застосування РТВ для побудови адекватних моделей та методів розв’язування цього класу задач;
- необхідність дослідження у рамках РТВ особливостей застосування нечітких шкал вимірювань.

Ще однією важливою особливістю формалізації ЗКО на нечітких множинах є необхідність визначення поняття «нечіткий комбінаторний об’єкт». Це нове поняття розглядається у [9, 10]. З урахуванням вищевикладеного, загальний підхід до розв’язування ЗКО на нечітких множинах за наявності кількісної та якісної інформації може складатись з наступних кроків:

- визначення порядку та типу нечітких комбінаторних об’єктів ЗКО [10];
- встановлення типу шкал, на основі яких здійснюються фундаментальні або похідні вимірювання властивостей об’єктів та відношень ЕСВ;
- забезпечення адекватності розв’язку ЗКО у широкому сенсі, тобто доведення гомоморфізму відображення ЕСВ у МСВ;
- вибір методу розв’язування ЗКО та забезпечення адекватності розв’язку ЗКО у вузькому сенсі;
- розв’язування ЗКО та інтерпретація отриманих результатів.

Для розв’язування ЗКО розглянутого типу повинні бути розроблені спеціальні алгоритми комбінаторної оптимізації, наприклад, з використанням напрацьованих у [11] підходів.

Висновки. Проведено аналіз особливостей формалізації слабо структурованих ЗКО на нечітких множинах за наявності якісної та кількісної інформації. Розглянуто проблеми вимірювання функцій належності нечітких множин з позицій РТВ та введено поняття «недовизначена нечітка множина», яке відображає специфіку проблем побудови формальних моделей.

Розглянуто проблеми адекватності при формалізації таких ЗКО та введено поняття адекватності вимірювань у широкому та вузькому сенсі. Викладено загальний підхід до розв’язування ЗКО на нечітких множинах за наявності кількісної та якісної інформації.

И.И. Рясная

ПРОБЛЕМЫ ФОРМАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ
НА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВАХ

Проведен анализ особенностей формализации слабо структурированных задач комбинаторной оптимизации на нечетких множествах при наличии качественной и количественной информации. С позиций репрезентативной теории измерений рассмотрены проблемы измерения функций принадлежности нечетких множеств и проблемы адекватности при формализации такого класса задач.

I.I. Riasna

ON QUESTIONS OF FORMALIZATION OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION
PROBLEMS ON FUZZY SETS

An analysis of features of formalization of weakly structured combinatorial optimization problems on fuzzy sets under the conditions of presence of qualitative and quantitative information is carried out. The questions of measurement of membership functions of fuzzy sets and the questions of adequacy at formalization of such a class of problems are considered from positions of the representative theory of measurements.

Список літератури

1. Суппес П., Зинес Дж. Основы теории измерений. *Психологические измерения*. М.: Мир, 1967. С. 9 – 110.
2. Пфанцagl И. Теория измерений. М.: Мир, 1976. 248 с.
3. Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Inf. and Control*. 1965. 8, N 3. P. 338 – 353.
4. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. М.: Наука, 1986. 312 с.
5. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. 432 с.
6. Блишун А.Ф. Сравнительный анализ методов измерения нечеткости. Изв. АН СССР. *Техническая кибернетика*. 1988. № 5. С. 152 – 175.
7. Толстова Ю.Н. Измерение в социологии: Курс лекций. М.: ИНФРА-М, 1990. 224 с.
8. Riasna I. On problem of adequacy of multiset mathematical models. *Information Theories and Application*. 2015. 22, N 2. P. 188 – 199.
9. Гуляницький Л.Ф., Рясна І.І. До формалізації задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах. *Теорія оптимальних рішень*. 2016. С. 17 – 25.
10. Hulianytskyi L.F., Riasna I.I. Formalization and classification of combinatorial optimization problems. In: *Optimization Methods and Applications* (eds. Butenko S., Pardalos P.M., Shylo V.). Cham: Springer International Publishing AG, 2017. P. 239 – 250.
11. Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю. Прикладні методи комбінаторної оптимізації. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2016. 142 с.

Одержано 14.03.2018