УДК 519.8

О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ, Т.А. БАРДАДЫМ

СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О КОМПЛЕМЕНТАРНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ

Рассматривается использование двойственных квадратичных оценок при решении задачи о комплементарных собственных числах. Для этого построены постановки исходной задачи в виде квадратичных экстремальных задач, получен ряд результатов о точности двойственных оценок для этих задач и о случаях, когда исходная задача не имеет решения.

Задача о комплементарных собственных числах (англ. Eigenvalue Complementarity Problem) формулируется следующим образом: заданы матрицы $A \in R^{n\times n}$ и $B \in R^{n\times n}$; требуется найти $\lambda > 0,$, $\lambda \in R^1$ и $x \neq 0$, $x \in R^n$, такие, что

$$(\lambda B - A)x \geq 0\,, \tag{1}$$

$$x \geq 0\,, \tag{2}$$

$$x^T(\lambda B - A)x = 0\,. \tag{3}$$

Если (λ, x) – решение задачи (1) – (3), то величину λ называют комплементарным собственным числом, а x – комплементарным собственным вектором, соответствующим λ. Фактически, имеем дело с обобщением обыч-ных понятий собственного числа и собствен-ного вектора для матрицы A (им соответ-ствует случай, когда B – единичная матрица; эти вопросы подробно изложены в [1]), которые рассматриваются в контексте задач комплементарности.

В последнее время появилось много работ, посвященных исследованию этих задач и разработке алгоритмов их решения (см., например, [1 – 8]). Первой среди них появилась, по-видимому, работа А. Сигера [3]. Вопросы сложности указанных задач исследовались в работах [1, 5, 9].

Если матрицы A и B принадлежат множеству симметрических матриц S, задачу о комплементарных собственных числах называют симметричной. В работе [1] рассмотрен именно этот случай при дополнительном условии на положительную определенность матрицы B, т. е. когда

$$A, B \in S\,,\ B \succ 0 \tag{4}$$

(подобные задачи возникают при изучении статических равновесных состояний механических систем [2]). При выполнении условия (4) задача (1) – (3) сводится к нахождению стационарных точек обобщенного отношения Рэлея на симплексе [1, с. 1854]:

$$\max \frac{x^T Ax}{x^T Bx}\,, \tag{5}$$

$$x \geq 0\,, \tag{6}$$

$$e^T x = 1\,, \tag{7}$$

где $e := (1,...,1)^T \in R^n$. Стационарные точки x^*, удовлетворяющие неравенству

$$x^{*T} Ax^* > 0\,, \tag{8}$$

являются решением задачи (1) – (4). Это следует из требования положительности параметра λ и того, что матрица B положительно определенная, т. е. $x^T Bx > 0$ для всех x, кроме нулевого вектора. При этом $\lambda^* = \dfrac{x^{*T} Ax^*}{x^{*T} Bx^*}$. Здесь следует отметить, что в работе [1, с. 1856] доказано утверждение 10, согласно которому задача (1) – (4) имеет решение тогда и только тогда, когда существует точка $x \geq 0$, удовлетворяющая условию (8).

В работе [1] приводится еще одна оптимизационная постановка задачи (1) – (4), которая отличается от задачи (5) – (7) следующим: вместо ограничения (7), которое отвечает за требование $x \neq 0$, введено ограничение $x^T x = 1$. Эта задача эквивалентна задаче (1) – (4) в том же смысле, что и задача (5) – (7): ее стационарные точки, удовлетворяющие условию (8), задают множество решений задачи (1) – (4).

В данной работе предлагается рассмотреть еще одну постановку, эквивалентную задаче (1) – (4). Аналогично доказательству взаимосвязи задач (1) – (4) и (5) – (7) легко показать, что задача (1) – (4) сводится к нахождению стационарных точек квадратичной экстремальной задачи

$$f^* = \min_{x \in R^n} (-x^T Ax), \tag{9}$$

$$x \geq 0\,, \tag{10}$$

$$x^T Bx \leq 1\,. \tag{11}$$

Для доказательства достаточно выписать систему Каруша – Куна – Таккера для задачи (9) – (11) (отметим, что ограничения задачи удовлетворяют условию регулярности Слейтера). Поскольку функция Лагранжа равна

$L(u, x, y) = -x^T Ax - u_1^T x + u_2 (x^T Bx - 1)$ при $u = (u_1^T, u_2) \geq 0$, $u_1 \in R^n$, $u_2 \in R^1$,

то условия Каруша – Куна – Таккера имеют следующий вид:

$$L_x(u, x) = -2Ax - u_1 + 2u_2 Bx = 0\,,$$

$$u_1^T x = 0\,,$$

$$u_2(x^T Ax - 1) = 0,$$
$$x \geq 0,$$
$$x^T Bx \leq 1,$$
$$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0.$$

Условие (2) исходной задачи присутствует в данной системе в явном виде, из равенства $L_x(u,x)=0$ следует условие (1): $\frac{u_1}{2} = u_2 Bx - Ax \geq 0,$ а из условия дополняющей нежесткости – условие (3). Таким образом, получены все условия задачи (1) – (4), причем $\lambda^* = u_2^*$. Конечно при этом, как и для предыдущей задачи (5) – (7), стационарные точки должны удовлетворять неравенству (8), что эквивалентно замене нестрогого неравенства $u_2^* \geq 0$ в системе Каруша – Куна – Таккера на строгое неравенство $u_2^* > 0$. Отметим, что для всех стационарных точек задачи, кроме нулевой, которая не является решением задачи (1) –(4), ограничение (11) активно и, соответственно, знак неравенства в нем можно заменить на знак равенства:

$$f^* = \min_{x \in R^n}(-x^T Ax),$$
$$x \geq 0,$$
$$x^T Bx = 1.$$

Рассмотрим применение для решения задачи (9) – (11) техники двойственных оценок ψ^* для значения глобального экстремума f^* ($f^* \geq \psi^*$) [10, 11].

В общем случае задача (1) – (4) может иметь более одного решения: в работе [3] доказано, что число λ-решений задачи (1) – (4) не превышает $2^n - 1$. Глобальный экстремум задачи (9) – (11) соответствует решению задачи (9) – (11) с максимальным комплементарным собственным числом $\lambda_{\max}$ (конечно, если решение исходной задачи (1) – (4) существует). Очевидно, что значение оценки будет лежать в следующем диапазоне: $0 \geq \psi^* \geq -d_{\max}$, где $d_{\max}$ – максимальное собственное число матрицы $B^{-1/2}AB^{1/2}$. Если $\psi^* = 0$, то задача (1) – (4) не имеет решения; в противном случае возможны варианты, поэтому, получив оценку меньше нуля, необходимо исследовать систему (1) – (3) при полученном $\lambda_{\max} = u_2 = -\psi^*$ (поскольку в случае существования решения задачи (1) – (4) двойственная оценка для рассматриваемой задачи достигается обязательно на границе неотрицательной определенности гессиана функции Лагранжа, что не позволяет определить точку x^* решения задачи).

В работе [12] для квадратичной экстремальной задачи общего вида

$$f^* = f_0(x^*) = \inf_{x \in T \subseteq R^n} f_0(x),$$

где $f_i(x) = x^T A_i x + b_i^T x + c_i$, $i \in \{0\} \bigcup I^{LQ} \bigcup I^{EQ}$ – квадратичные функции в n-мерном пространстве, $T = \{x : f_i(x) \le 0, i \in I^{LQ},\ f_i(x) = 0, i \in I^{EQ}\}$, $m = \left|I^{LQ}\right| + \left|I^{EQ}\right|$ сформулирован следующий критерий получения точной двойственной оценки (т. е. когда двойственная оценка равна значению глобального экстремума задачи).

Теорема (теорема 2, [12]). Для того, чтобы двойственная оценка ψ^* для квадратичной экстремальной задачи общего вида была точной, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\begin{pmatrix} A_0 & b_0/2 \\ b_0^T/2 & -f^* \end{pmatrix}$ была представима в виде разности неотрицательно-определенной матрицы и линейной комбинации матриц $\bar{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & b_i/2 \\ b_i^T/2 & c_i \end{pmatrix}$, $i = \overline{1,m}$, коэффициентами которой являются координаты вектора $u^* \in U^+ = \{u : u_i \ge 0, i \in I^{LQ}, u \in R^m\}$.

Для рассматриваемой задачи (9) – (11) условие теоремы примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & -f^* \end{pmatrix} = W - u_2^* \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -u_1^*/2 \\ -u_1^{*T}/2 & 0 \end{pmatrix},$$

где W – неотрицательно определенная матрица; или с учетом того, что $f^* = -x^{*T} A x^* = -\dfrac{x^{*T} A x^*}{x^{*T} B x^*} = -\lambda_{\max}$ (поскольку $x^T B x = 1$),

$$\begin{pmatrix} u_2^* B - A & -u_1^*/2 \\ -u_1^{*T}/2 & \lambda_{\max} - u_2^* \end{pmatrix} = W \succ= 0.$$

Таким образом, справедливо

Утверждение 1. Для того, чтобы двойственная оценка для задачи (9) – (11) была точной, необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор $u^* \in \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 \ge 0, u_1 \in R^n, u_2 \in R^1 \right\}$, для которого выполняется

$$\begin{pmatrix} u_2^* B - A & -u_1^*/2 \\ -u_1^{*T}/2 & \lambda_{\max} - u_2^* \end{pmatrix} \succ= 0. \qquad (12)$$

Понятно, что двойственный подход для задачи (9) – (11) дает точную оценку только при $\lambda_{\max} B - A \succ= 0$. Эту область можно расширить, переформулировав эту задачу с помощью замены линейных ограничений (10) квадратичными:

$$f^* = \min_{x \in R^n} (-x^T A x), \qquad (13)$$

$$x^T B x \le 1, \qquad (14)$$

$$x_i x_j \geq 0\,,\ i, j = \overline{1,n}\,. \qquad (15)$$

Значение глобального экстремума задачи (13) – (15) совпадает со значением глобального экстремума задачи (9) – (11), а множество точек решений расширяется: каждому решению x^* задачи (9) – (11) соответствует два решения x^* и $-x^*$ задачи (13) – (15), и наоборот.

Для последней задачи условие теоремы примет вид

$$\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & -f^* \end{pmatrix} = W - u_2^* \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где W – неотрицательно определенная матрица, а U – матрица, элементы которой состоят из двойственных переменных $u_{ij}^* \geq 0$, соответствующих ограничениям (15) $-x_i x_j \leq 0$, $i, j = \overline{1,n}$, т. е. $U \in V^+$, где V^+ – множество положительных матриц. Перепишем равенство в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} u_2^* B - A & 0 \\ 0 & \lambda_{\max} - u_2^* \end{pmatrix} = W + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если двойственная оценка является точной, то $\lambda_{\max} = u_2^*$ и справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Для того, чтобы двойственная оценка для задачи (13) – (15) была точной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lambda_{\max} B - A = W + V^+. \qquad (16)$$

Если из утверждения 1 видно, что при $A \prec= 0$ двойственная оценка задачи (9) – (11) равна нулю (так как $\lambda_{\max} = 0$ удовлетворяет условию (12) утверждения 1 при $u_2^* = 0$), т. е. задача (1) – (4) не имеет решения, то утверждение 2 позволяет усилить этот результат: если матрица A представима в виде суммы отрицательно определенной матрицы и отрицательной матрицы, то задача (1) – (4) не имеет решения.

О.А. Березовський, Т.О. Бардадим

СИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ПРО КОМПЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСНІ ЧИСЛА

Розглядається використання двоїстих квадратичних оцінок при розв'язанні симетричної задачі про комплеметарні власні числа. Для цього побудовано формулювання початкової задачі у вигляді квадратичних екстремальних задач, отримано ряд результатів про точність двоїстих оцінок для цих задач і про випадки, коли початкова задача не має розв'язку.

O.A. Berezovskyi, T.A. Bardadym

ON THE SYMMETRIC EIGENVALUE COMPLEMENTARITY PROBLEM

The use of dual quadratic estimates for solving the symmetric eigenvalues complementarity problem is considered. For this purpose, the formalisations of the initial problem in the form of quadratic extremal problems were constructed; the results on the accuracy of the dual estimates for these problems and the cases when the initial problem has no solution were obtained.

Список литературы

1. Queiroz M., Júdice J.J., Humes Jr.C. The symmetric eigenvalue complementarity problem. *Mathematics of Computation*. 2004. T. 73. N 248. C. 1849 – 1863.
2. Da Costa A.P., Figueiredo I.N., Júdice J.J., Martins J.A.C. A complementarity eigenproblem in the stability analysis of finite dimensional elastic systems with frictional contact. In: *Complementarity: applications, algorithms and extensions.* N.Y.: Springer US, 2001. P. 67 – 83.
3. Seeger A. Eigenvalue analysis of equilibrium processes defined by linear complementarity conditions. *Linear Algebra and its Applications*. 1999. N 292. P. 1 – 14.
4. Brάs C.P., Fisher A., Júdice J.J., Schönefeld K., Seifert S. A block active set algorithm with spectral choice line search for the symmetric eigenvalue complementarity problem. *Applied Mathematics and Computation*. 2017. 294. P. 36 – 48.
5. Le Thi H., Moeini M., Pham Dinh T., Júdice J.J. A DC programming approach for solving the symmetric eigenvalue complementarity problem. *Computational Optimization and Applications*. 2012. 51. P. 1097 – 1117.
6. Березовский О.А., Бардадым Т.А. Двойственная квадратичная оценка для линейной задачи дополнительности. *Компьютерная математика*. К.: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины. 2017. № 1. С. 134 – 139.
7. Fernandes L.M., Júdice J.J., Fukushima M., Iusem A.N. On the Symmetric Quadratic Eigenvalue Complementarity Problem. *Optimization Methods and Software.* 2014. Vol. 29. Iss. 4. P. 751 – 770. (Doi: 10.1080/10556788.2013.854359).
8. Brάs C.P., Iusem A.N., Júdice J.J. On the quadratic eigenvalue complementarity problem. *Journal of Global Optimization*. 2016. Vol. 66, Iss. 2. P. 153 – 171.
9. Chung S. NP-completeness of the linear complementarity problem. J. *Optim. Theory Appl*. 1989. **60**(3). P. 393 – 399.
10. Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.
11. Shor N.Z. Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. Boston/London/Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. 394 p.
12. Березовский О.А. Условие точности двойственных квадратичных оценок в матричном виде. *Теорія оптимальних рішень*. К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України. 2015. С. 41 – 45.

Получено 26.03.2018