УДК 517.977

И.С. РАППОПОРТ

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

Исследуются линейные конфликтно-управляемые процессы сближения с интегральными ограничениями на основе метода разрешающих функций. С помощью верхних и нижних разрешающих функций установлены достаточные условия завершения игры за конечное время.

© И.С. Раппопорт, 2018

Современная теория дифференциальных игр в основном развивается как теория конфликтно-управляемых процессов с геометрическими ограничениями на управлени игроков. Были описаны структуры дифференциальных игр, исследованы различные способы задания стратегий игроков, разработаны общие подходы и конкретные методы решения различных классов дифференциальных игр. Вместе с тем перенесение методов, разработанных для игр с геометрическими ограничениями, на игры с интегральными ограничениями является непростой задачей.

В работах [1 – 3] были попытки перенести на случай с интегральными ограничеиями метод разрешающих функций для процессов с геометрическими ограничениями, предложенный в [4].

В настоящей работе, следуя методике [5, 6], введены понятия верхней и нижней разрешающих функций и предложена схема метода разрешающих функций для задачи преследования с интегральными ограничениями на управления игроков.

Данная работа развивает идеи [1 – 4] и примыкает к исследованиям [5 – 8].

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv. \qquad (1)$$

Здесь $z \in R^n$, $u \in R^m$, $v \in R^k$ $n \geq 1$, $m \geq 1$, $k \geq 1$; A, B, C – постоянные прямоугольные матрицы порядка $n \times n$, $n \times m$, $n \times k$ соответственно; u – управляющий параметр первого игрока; v – управляющий параметр второго игрока. Параметры u и v выбираются в виде измеримых функций $u = u(\cdot)$ и $v = v(\cdot)$ из класса $L_p[0, +\infty)$, $p > 1$ и удовлетворяют ограничениям

$$\int_0^\infty \|u(\tau)\|^p \, d\tau \leq \mu^p, \ \ \mu > 1, \tag{2}$$

$$\int_0^\infty \|v(\tau)\|^p \, d\tau \leq \nu^p, \ \ \nu > 1. \tag{3}$$

Такие управления будем называть допустимыми.

Кроме процесса (1) задано терминальное множество M^*, имеющее цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \tag{4}$$

где M_0 – линейное подпространство из R^n, а M – компакт из ортогонального дополнения L к подпространству M_0 в R^n.

Траектория процесса (1) – (3) из начального положения $z_0 \in R^n$ может быть приведена на терминальное множество (4) в момент $T = T(z_0)$, если по любой допустимой функции $v(t)$, $t \in [0, T]$, можно построить такую допустимую функцию $u(t, z_0, v_t(\cdot))$, $t \in [0, T]$, где $v_t(\cdot) = \{v(\tau), \tau \in [0, t]\}$, что абсолютно непрерывное решение $z(t)$ задачи Коши $\dot{z} = Az + Bu(t, z_0, v_t(\cdot)) - Cv(t)$, $z(0) = z_0$, попадает на терминальное множество M^* в момент $T = T(z_0)$.

Рассмотрим функцию [3, 7] $\chi^p(t) = \sup\limits_{\int_0^t \|\omega(\tau)\|^p d\tau \leq 1} \int_0^t \|D(t-\tau)\omega(\tau)\|^p \, d\tau,$

где $\omega(\cdot)$ – произвольная функция из пространства $L_p[0, \infty)$ с указанным ограничением, а $D(\cdot): R^k \to R^m$, – некоторая непрерывная неособая матрица.

С помощью функции $\chi^p(t)$ определим величину [3] $\mathrm{X}^p = \sup\limits_{0 \leq t < \infty} \chi^p(t)$.

Условие 1. Справедливо неравенство $\gamma = \mu^p - \nu^p \mathrm{X}^p > 0$.

Обозначим

$$\varphi(t, \tau, u, v, \alpha) = (\|D(t-\tau)v\|^p + \alpha\gamma)^{\frac{1}{p}} \pi e^{(t-\tau)A} Bu - \pi e^{(t-\tau)A} Cv,$$

где $(t,\tau)\in\Delta=\{(t,\tau):0\le\tau\le t<\infty\}$, $v\in R^k$, $\alpha\ge 0$, $u\in S$, S – шар единичного радиуса с центром в нуле пространства R^m.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathcal{A}(t,\tau,v,z_0)=\{\alpha\ge 0:\varphi(t,\tau,S,v,\alpha)\bigcap\alpha[M-\pi e^{(t-\tau)A}z_0]\ne\varnothing\},\qquad(5)$$

где $\varphi(t,\tau,S,v,\alpha)=\{\varphi(t,\tau,u,v,\alpha):u\in S\}$.

Условие 2. Для некоторого начального положения $z_0\in R^n$ многозначное отображение $\mathcal{A}(t,\tau,v,z_0)$ принимает непустые значения на множестве $\Delta\times R^k$.

Если это условие выполнено, то, по аналогии с работами [5, 6] введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции

$$\alpha^*(t,\tau,v,z_0)=\sup\{\alpha:\alpha\in\mathcal{A}(t,\tau,v,z_0)\},$$

$$\alpha_*(t,\tau,v,z_0)=\inf\{\alpha:\alpha\in\mathcal{A}(t,\tau,v,z_0)\},\ \ \tau\in[0,t],\ \ v\in R^k,\ \ z_0\in R^n.$$

Пусть $V(R^k)$ – совокупность допустимых функций $v(\tau)$, $\tau\in[0,+\infty]$, со значениями из R^k. Можно показать [8], что многозначное отображение $\mathcal{A}(t,\tau,v,z_0)$ является замкнутозначным, $L\otimes B$-измеримым по совокупности (τ,v), $\tau\in[0,t]$, $v\in R^k$, а верхняя и нижняя разрешающие функции $L\otimes B$-измеримым по совокупности (τ,v), $\tau\in[0,t]$, $v\in R^k$. Поэтому они суперпозиционно измеримы [8], т. е. $\alpha^*(t,\tau,v(\tau),z_0)$ и $\alpha_*(t,\tau,v(\tau),z_0)$ измеримы по τ, $\tau\in[0,t]$, при любой допустимой функции $v(\cdot)\in V(R^k)$. Отметим также, что верхняя разрешающая функция полунепрерывна сверху, а нижняя – полунепрерывна снизу по переменной v. Рассмотрим множество

$$T(z_0,\gamma)=\{t\ge 0:\inf_{\int_0^\infty\|v(\tau)\|^p d\tau\le\nu^p}\int_0^t\alpha^*(t,\tau,v(\tau),z_0)d\tau\ge 1,$$

$$\sup_{\int_0^\infty\|v(\tau)\|^p d\tau\le\nu^p}\int_0^t\alpha_*(t,\tau,v(\tau),z_0)d\tau<1\}.\qquad(6)$$

Если при некотором $t>0$ $\alpha^*(t,\tau,v,z_0)\equiv+\infty$ для $\tau\in[0,t]$, $v\in R^k$, то в этом случае значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (6) естественно положить равным $+\infty$ и $t\in T\big(g(t),\gamma(\cdot,\cdot)\big)$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках соотношения (6). В случае, когда неравенства в соотношении (6) не выполняются при всех $t>0$, положим $T(z_0,\gamma)=\varnothing$.

Теорема. Пусть выполнены условия 1, 2, множество $T(z_0,\gamma)$ не пусто и $T\in T(z_0,\gamma)$. Тогда траектория процесса (1) – (3) из начального положения $z_0 \in R^n$ может быть приведена на терминальное множество (4) в момент T.

Доказательство. Пусть $v(\cdot)\in V(R^k)$ – произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3).

Рассмотрим сначала случай $\pi e^{TA}z_0 \notin M$ и введем контрольную функцию

$$h(t)=1-\int_0^t \alpha^*\big(T,\tau,v(\tau),z_0\big)d\tau-\int_t^T \alpha_*\big(T,\tau,v(\tau),z_0\big)d\tau,\quad t\in[0,T].$$

Функции $\alpha^*(T,\tau,v,z_0)$ и $\alpha_*(T,\tau,v,z_0)$ $L\otimes B$-измеримы по совокупности (τ,v), $\tau\in[0,T]$, $v\in R^k$, и поэтому они суперпозиционно измеримы, т. е. функции $\alpha^*(T,\tau,v(\tau),z_0)$ и $\alpha_*(T,\tau,v(\tau),z_0)$ измеримы по τ, τ, $\tau\in[0,T]$. По определению T имеем

$$h(0)=1-\int_0^T \alpha_*\big(T,\tau,v(\tau),z_0\big)d\tau \ge 1-\sup_{\int_0^\infty \|v(\tau)\|^p d\tau\le \nu^p}\int_0^T \alpha_*\big(T,\tau,v(\tau),z_0\big)d\tau>0,$$

$$h(T)=1-\int_0^T \alpha^*\big(T,\tau,v(\tau),z_0\big)d\tau \le 1-\inf_{\int_0^\infty \|v(\tau)\|^p d\tau\le \nu^p}\int_0^T \alpha^*\big(t,\tau,v(\tau),z_0\big)d\tau\le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_*\in(0,T]$, что $h(t_*)=0$. Отметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot)=\{v(s): s\in[0,t_*]\}$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U(\tau,v)=\{u\in R^m: \|u\|=(\|D(T-\tau)v\|^p+\alpha(T,\tau,v,z_0)\gamma)^{\frac{1}{p}},$$

$$\pi e^{(T-\tau)A}Bu-\pi e^{(T-\tau)A}Cv\in\alpha(T,\tau,v,z_0)[M-\pi e^{TA}z_0]\},\qquad (7)$$

где

$$\alpha(T,\tau,v,z_0)=\begin{cases}\alpha^*\big(T,\tau,v,z_0\big), & 0\le\tau\le t_*\\ \alpha_*\big(T,\tau,v,z_0\big), & t_*<\tau\le T\end{cases}.$$

В силу свойств параметров процесса (1), верхней $\alpha^*(T,\tau,v,z_0)$ и нижней $\alpha_*(T,\tau,v,z_0)$ разрешающих функций отображение $U(\tau,v)$ $L\otimes B$-измеримо [8] при $v\in R^k$, $\tau\in[0,T]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [9] многозначное отображение $U(\tau,v)$ содержит $L\otimes B$-измеримый селектор $u(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [8].

Положим управление первого игрока $u(\tau)=u(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,T]$.

Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях имеем

$$\pi z(T)=\pi e^{TA}z_0+\int_0^T \pi e^{(T-\tau)A}[Bu(\tau)-Cv(\tau)]d\tau.$$

Тогда с учетом соотношения (7) получаем

$$\pi z(T)\in \pi e^{TA}z_0+\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau),z_0)[M-\pi e^{TA}z_0]d\tau+$$

$$+\int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau,v(\tau),z_0)[M-\pi e^{TA}z_0]d\tau=$$

$$=\pi e^{TA}z_0[1-\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau),z_0)d\tau-\int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau,v(\tau),z_0)d\tau]+$$

$$+\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau),z_0)Md\tau+\int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau,v(\tau),z_0)Md\tau=$$

$$=[\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau),z_0)d\tau+\int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau,v(\tau),z_0)d\tau]M=M.$$

Таким образом, $z(T)\in M^*$ и осталось показать допустимость управления $u(\tau)=u(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,T]$. По построению справедливы соотношения

$$\int_0^T\|u(\tau)\|^p d\tau=\int_0^T\|D(T-\tau)v(\tau)\|^p d\tau+\gamma[\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau),z_0)d\tau+$$

$$+\int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau,v(\tau),z_0)d\tau]\le \nu^p\mathrm{X}^p+\gamma=\mu^p.$$

Для случая $\pi e^{TA}z_0\in M$ управление первого игрока на всем промежутке $[0,T]$ выберем в виде измеримой функции $u_*(\tau)=u_*(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,T]$, где $u_*(\tau,v)$ – $L\otimes B$-измеримый селектор отображения $U(\tau,v)$ соотношения (7) с разрешающей функцией $\alpha\left(T,\tau,v,z_0\right)=\alpha_*\left(T,\tau,v,z_0\right)$ на всем промежутке $\left[0,T\right]$. Тогда соотношения (7) дают

$$\pi z(T)\in\pi e^{TA}z_0+\int_0^T\alpha_*(T,\tau,v(\tau),z_0)[M-\pi e^{TA}z_0]d\tau.$$

Если $\pi e^{TA}z_0=m\in M$, то $\pi z(T)=m\in M$ и, следовательно, $z(T)\in M^*$. Покажем допустимость соответствующего управления преследователя. Принимая во внимание соотношения (6) и (7), имеем

$$\int_0^T\|u(\tau)\|^p d\tau=\int_0^T\|D(T-\tau)v(\tau)\|^p d\tau+\gamma\int_0^T\alpha_*(T,\tau,v(\tau),z_0)d\tau\le$$

$$\le\nu^p\mathrm{X}^p+\gamma\sup_{\int_0^\infty\|v(\tau)\|^p d\tau\le\nu^p}\int_0^T\alpha_*\left(T,\tau,v(\tau),z_0\right)d\tau<\nu^p\mathrm{X}^p+\gamma=\mu^p.$$

Теорема полностью доказана.

Й.С. Раппопорт

ДО РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ НА КЕРУВАННЯ

Досліджуються лінійні конфліктно-керовані процеси зближення з інтегральними обмеженнями на керування на основі методу розв'язуючих функцій. За допомогою верхніх та нижніх розв'язуючих функцій встановлено достатні умови завершення гри за скінчений час.

I.S. Rappoport

TO THE DECISION OF PURSUIT PROBLEM UNDER INTEGRAL CONSTRAINS ON CONTROLS

The linear conflict-controlled processes of approach are studied on the basis of the method of resolving functions. Using the upper and the lower resolving functions, sufficient conditions for the game termination in a finite time are established.

Список литературы

1. Чикрий А.А., Безмагорычный В.В. Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Автоматика*. 1993. № 4. С. 26 – 36.
2. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. **15**, № 4. С. 290 – 301.
3. Саматов Б.Т. О задачах группового преследования при интегральных ограничениях на управления игроков. I. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 5. С. 132 – 145.
4. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. *Springer Science and Business Media*. 2013. 424 p.

5. Чикрий А.А., Чикрий В.К. Структура образов многозначных отображений в игровых задачах управлением движением. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 2. С. 65 – 78.
6. Раппопорт И.С. Достаточные условия гарантированного результата в дифференциальной игре с терминальной функцией платы. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 1. С. 72 – 84.
7. Никольский М.С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Управляемые системы*. 1969. Вып. 2. С. 49 – 59.
8. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. № 5. С. 40 – 64.
9. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. *Mathematics and Its Applications*. Boston, Basel, Berlin: Birkhauser. 1990. 461 p.

Получено 12.03.2018