

## ОПТИМАЛЬНЕ РОЗМІЩЕННЯ БАГАТОСЕНСОРНОЇ СИСТЕМИ ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ ЗАГРОЗИ

**Анотація.** Описано алгоритм детектування підводної загрози за допомогою системи акустичних сенсорів, а також екстремальні задачі розміщування сенсорів. Розглянуто методи розв'язання таких задач, доведено теорему про асимптотичну оптимальність побудованих планів розміщення сенсорів. З результатів числових експериментів випливає, що побудований метод перевершує відомий метод розв'язання задач розміщування сенсорів.

**Ключові слова:** сенсор, багатосенсорна система, алгоритм детектування загрози, оптимальне розміщення сенсорів, асимптотична оптимальність.

Проблема розміщування агентів багатоагентної системи є важливою задачею, від якості розв'язання якої залежить успішність дій цієї системи. У статті розглянуто систему акустичних сенсорів, призначену для виявлення підводної загрози в деякій обмеженій акваторії, прилеглий до важливих народногосподарських об'єктів. Описано екстремальні задачі та методи їхнього розв'язання для оптимального розміщення сенсорів у межах заданої акваторії. Вочевидь, такі задачі є актуальними з огляду на зростання терористичних загроз.

Під час конструювання багатосенсорних систем виникають різноманітні екстремальні задачі, що розв'язуються за допомогою відповідних математичних методів. В [1] задачу розміщування підводних акустичних сенсорів сформульовано як задачу стохастичного програмування, в якій шум є випадковою величиною. Описано алгоритм оброблення сигналів та тест для визначення кількості порушників-дайверів із застосуванням теорії прихованих ланцюгів Маркова. У [2] задачу оптимального розміщення підводних сенсорів розв'язано за допомогою генетичного алгоритму. Враховано різноманітні характеристики навколишнього середовища: глибину, температуру, солоність води, рН. У роботі [3] для розміщування вузлів сенсорної мережі на морському дні використано самоорганізаційну карту Кохонена, що являє собою нейронну мережу з навчанням. Побудований на основі самоорганізаційної карти метод дозволяє відсіювати не ефективні вузли мережі. В [4] досліджено задачу розміщування сенсорів, у якій оптимізується покриття деякої області та запропоновано два жадібних алгоритми для оптимізації середнього значення покриття або покриття у найгіршому випадку. В [5] розглянуто час роботи сенсорної системи, що залежить від енергетичних обмежень, запропоновано алгоритм розміщування сенсорів, що враховує можливий час їхньої роботи. Для системи мобільних сенсорів у роботах [6, 7] побудовано алгоритм покращення розміщення сенсорів після випадкового розміщування, що оптимізує покриття території сенсорами за умов обмеженості відстаней, які можуть бути ними пройдені. В [8] сформульовано задачі розміщування підводних сенсорів, обговорено методи їхнього розв'язання та наведено численний список використаної літератури.

У роботі [9] розглянуто способи розташування сенсорів, що є наближеними до регулярного. Область спостереження розбивають на множину правильних геометричних фігур (правильних трикутників, квадратів, шестикутників), сенсори переважно розміщують у вершинах цих фігур. Сенсори вважають однотипними. Оскільки область спостереження є зашумленою, для надійного тестування потрібна велика щільність сенсорів. Доведено теорему про те, що за умови

збільшення кількості сенсорів вказаний спосіб розміщення наближується до оптимального. Числові експерименти демонструють, що запропонований алгоритм розміщування перевершує алгоритм, побудований в [4], навіть якщо оптимальна кількість сенсорів відносно мала. На відміну від роботи [9] далі розглянуто сенсори з різними можливостями. Відповідно до цього сформульовано екстремальні задачі та побудовано їхні розв'язки.

#### МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СЕНСОРІВ І АЛГОРИТМИ ДЕТЕКТУВАННЯ ЗАГРОЗИ

Припустимо, що область спостереження  $W$  є мілководною (у такому випадку її можна вважати двовимірною) і що існує тільки одна можлива загроза, тобто один порушник. Позначимо  $H_0$  гіпотезу, яка стверджує, що в області  $W$  немає порушника. Нехай  $H_1$  — гіпотеза, яка стверджує, що в області  $W$  є один порушник. Позначимо  $H_1(Y)$  гіпотезу про те, що порушник перебуває в точці  $Y \in W$ .

Припустимо, що в області  $W$  розташовано  $n$  сенсорів у точках  $X_1, \dots, X_n$ . Нехай  $S_j$  — дійсна випадкова величина, що є результатом оброблення сигналу сенсором  $j$ ,  $S = (S_1, \dots, S_n)$  — випадковий вектор. Позначимо  $s = (s_1, \dots, s_n)$  спостереження вектора  $S$  у деякий момент часу. Вважаємо, що існує агент, який посилає запити на всі сенсори, отримує від них інформацію у вигляді вектора  $s = (s_1, \dots, s_n)$ , на основі якої приймає рішення про справедливість гіпотези  $H_0$  або гіпотези  $H_1(Y)$ .

Позначимо  $P_{S_j}(\cdot)$  розподіл ймовірностей величини  $S_j$  у випадку, якщо  $S_j$  є дискретною випадковою величиною. Якщо  $S_j$  неперервна, то  $P_{S_j}(\cdot)$  — щільність розподілу ймовірностей для  $S_j$  (у такому випадку вважаємо, що щільність розподілу існує). Аналогічно позначимо  $P_S(\cdot)$  розподіл ймовірностей випадкового вектора  $S$ .

Для кожного значення  $s$  та  $Y$  розглянемо умовні ймовірності (щільності) для кожної гіпотези  $P_S(s|H_0)$ ,  $P_S(s|H_1(Y))$ . Вважаючи, що випадкові величини  $S_j$  є незалежними за умов  $H_0$  або  $H_1(Y)$ , отримуємо

$$P_S(s|H_0) = \prod_{j=1}^n P_{S_j}(s_j|H_0), \quad P_S(s|H_1(Y)) = \prod_{j=1}^n P_{S_j}(s_j|H_1(Y)).$$

Математична модель сенсора  $j$  повністю визначається розподілами

$$P_{S_j}(s_j|H_0), \quad P_{S_j}(s_j|H_1(Y)), \quad (1)$$

які залежать від статистичних властивостей шуму навколишнього середовища, інтенсивності сигналу, технічних характеристик сенсора, методу оброблення сигналу.

Нехай  $X_j = (x_j, y_j)$ ,  $Y = (x, y)$ ,  $d_j = \|X_j - Y\| = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2}$  — відстань між ціллю та  $j$ -м сенсором. Розглянемо дві математичні моделі сенсора, що конкретизують модель (1). Символом  $P$  далі позначаємо ймовірність.

**Модель 1.** Вихідний сигнал сенсора  $j$  — бінарна випадкова величина  $S_j \in \{0, 1\}$ . Величина  $S_j$  матиме значення 1, якщо сенсор детектує загрозу, та 0 в іншому випадку. Ймовірності детектування порушника для гіпотез  $H_0$ ,  $H_1(Y)$  визначають формулами

$$P(S_j = 1|H_1(Y)) = f_1(d_j), \quad P(S_j = 1|H_0) = \varepsilon, \quad (2)$$

де  $f_1(d_j)$  є монотонно незростаючою функцією,  $0 < \varepsilon \leq f_1(d_j) < 1$ .

**Модель 2.** Вихідний сигнал сенсора  $j$  — нормально розподілена випадкова величина,

$$S_j = \begin{cases} f_2(d_j) + v & \text{за умови } H_1(Y), \\ v & \text{за умови } H_0, \end{cases} \quad (3)$$

де

$$f_2(d_j) = \begin{cases} a_j - b_j d_j, & d_j < a_j / b_j, \\ 0, & d_j \geq a_j / b_j, \end{cases} \quad (4)$$

$a_j > 0, b_j > 0$  — константи, що залежать від технічних характеристик сенсора,  $f_2(d_j)$  — сигнал від цілі,  $v$  — шум,  $v \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

У роботі [10] описано закони розповсюдження сигналів у водному середовищі з урахуванням шумів, на основі яких побудовано наведені моделі.

Опишемо одноперіодний алгоритм детектування загрози, що використовує сигнали сенсорів, отримані в деякий момент часу  $t$ . Почнемо з простого випадку, коли або порушника немає в області  $W$ , або він перебуває в точці  $Y \in W$ . Для виявлення загрози застосуємо тест Неймана–Пірсона, що використовує відношення правдоподібності

$$R(s, Y) = \frac{P_S(s | H_1(Y))}{P_S(s | H_0)}$$

Приймають гіпотезу  $H_1(Y)$ , якщо  $R(s, Y) \geq \gamma(Y)$  для деякого значення  $\gamma(Y)$ , і гіпотезу  $H_0$  в іншому випадку. Поріг детектування  $\gamma(Y)$  визначається величинами ймовірностей помилок першого та другого родів:  $\alpha_0$  та  $\alpha_1$  відповідно. Обмеження на ймовірності помилок першого та другого родів матимуть вигляд

$$P(R(S, Y) \geq \gamma(Y) | H_0) \leq \alpha_0, P(R(S, Y) < \gamma(Y) | H_1(Y)) \leq \alpha_1. \quad (5)$$

Припустимо, що розподіл величини  $R(S, Y)$  як за умови  $H_0$ , так і за умови  $H_1(Y)$  є неперервним. Позначимо  $q_0$  квантиль рівня  $1 - \alpha_0$  розподілу величини  $R(S, Y)$  за умови  $H_0$ , а  $q_1$  — квантиль рівня  $\alpha_1$  розподілу величини  $R(S, Y)$  за умови  $H_1(Y)$ . Співвідношення (5) можна записати у вигляді  $q_0 \leq \gamma(Y) \leq q_1$ . Якщо  $q_0 \leq q_1$ , виберемо  $\gamma(Y) = (q_0 + q_1) / 2$ . Нерівність  $q_0 > q_1$  означає, що система не має достатньо сенсорів для виконання умов (5).

Розглянемо випадок, коли або порушника немає в області  $W$ , або про нього відомо тільки те, що він перебуває в області  $W$ . У цьому випадку застосуємо тест Неймана–Пірсона до кожної точки  $W$  (звичайно, під час числових розрахунків йдеться тільки про скінченну множину точок, яка досить щільно покриває  $W$ ). Обмеження (5), які стосуються помилок першого та другого родів, повинні виконуватись для всіх  $Y \in W$ . Зауважимо, що в такому випадку виникає проблема: ймовірність детектування загрози за умови її відсутності (тобто ймовірність помилки першого роду) може перевищити число  $\alpha_0$  (5). Цю ймовірність

$$\bar{\alpha}_0 = P(\exists Y \in W : R(s, Y) \geq \gamma(Y) | H_0)$$

можна знайти методом Монте-Карло. Величина  $\bar{\alpha}_0$  залежить від вибору числа  $\alpha_0$ .

Припустимо, що за умов справедливості гіпотез  $H_0$  або  $H_1(Y)$  випадкові величини  $S_j, j = 1, 2, \dots, n$ , незалежні. Маємо

$$\ln R(S, Y) = \sum_{j=1}^n \ln R_j(S_j, Y),$$

де  $R_j(S_j, Y) = \frac{P_{S_j}(S_j | H_1(Y))}{P_{S_j}(S_j | H_0)}$ . Для моделей сенсорів 1 і 2 величини

$P_{S_j}(S_j | H_1(Y))$  та  $P_{S_j}(S_j | H_0)$  визначають формулами (2)–(4).

Для використання тесту Неймана–Пірсона необхідно знати розподіл випадкової величини  $\ln R(S, Y) = \sum_{j=1}^n \ln R_j(S_j, Y)$  за умови справедливості гіпотез  $H_0$ ,

або  $H_1(Y)$ . З центральної граничної теореми теорії ймовірностей [11] випливає, що за умови Ліндеберга для достатньо великих значень  $n$  розподіл величини  $\ln R(S, Y)$  є близьким до нормального. У випадку використання сенсорної моделі 2 величина  $\ln R(S, Y)$  має нормальний розподіл, оскільки нормально розподіленими є величини  $S_j$ .

Модель 2 акустичного сенсора описано в роботі [9], де також наведено багатоперіодний алгоритм детектування загрози. Такий алгоритм використовує дані, що надходять від сенсорів у послідовні моменти часу; для детектування застосовують метод послідовного статистичного аналізу [12].

#### ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ СЕНСОРІВ

Припустимо, що існує  $K$  типів сенсорів. Нехай  $n_k$  — кількість сенсорів  $k$ -го типу, які планується розмістити в області  $W$ ,  $c_k$  — ціна сенсора  $k$ -го типу,  $X_{kj}$  — вектор координат  $j$ -го сенсора  $k$ -го типу,  $X_{kj} \in W$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ ,  $j=1, 2, \dots, n_k$ . Розглянемо наступну задачу оптимального розміщення сенсорів

$$\min_{n_k \geq 0, X_{kj} \in W} \sum_{k=1}^K c_k n_k, \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{n_k} \varphi_k(\|Y - X_{kj}\|) \geq I \quad \forall Y \in W. \quad (7)$$

Функція  $\varphi_k(\cdot)$  характеризує надійність детектування загрози одним сенсором  $k$ -го типу, величина  $I$  означає задану надійність детектування системою сенсорів. Надійність може вимірюватись за допомогою різних величин, таких як кількість інформації, що надходить до сенсорів з точки  $Y$ , та ін. Далі розглянемо формулювання задачі (6), (7) у випадку використання описаних моделей і алгоритмів виявлення загрози.

Нехай використовується одноперіодний алгоритм детектування. Розглянемо задачу мінімізації вартості сенсорної системи за обмежень (5) на ймовірності помилок першого та другого родів

$$\min_{n_k \geq 0, X_{kj} \in W} \sum_{k=1}^K c_k n_k, \quad (8)$$

$$P(R(S, Y) \geq \gamma(Y) | H_0) \leq \alpha_0 \quad \forall Y \in W, \quad (9)$$

$$P(R(S, Y) < \gamma(Y) | H_1(Y)) \leq \alpha_1 \quad \forall Y \in W. \quad (10)$$

Припустимо, що як математичну модель сенсора використовують модель 2. Нехай загальна кількість сенсорів дорівнює  $n$  і всі вони ідентичні. Нехай також  $\xi_\alpha$  означає  $\alpha$ -квантиль нормального розподілу ймовірностей. У роботі [9] показано, що задачу (8)–(10) можна записати у вигляді

$$\min_{X_j \in W} n, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^n f_2^2(d_j) \geq (\xi_{1-\alpha_0} + \xi_{1-\alpha_1})^2 \sigma^2 \quad \forall Y \in W. \quad (12)$$

Задача (11), (12) є окремим випадком задачі (6), (7), де  $\varphi_k(d) = f_2^2(d)$  та  $I = (\xi_{1-\alpha_0} + \xi_{1-\alpha_1})^2 \sigma^2$ . Цю задачу можна узагальнити на випадок існування кількох типів сенсорів.

Якщо використовувати багатоперіодний алгоритм детектування, то задачу мінімізації вартості сенсорної системи за обмежень на середній час виявлення загрози та на ймовірність помилки першого роду можна записати у вигляді

$$\min_{n_k \geq 0, X_{kj} \in W} \sum_{k=1}^K c_k n_k, \quad (13)$$

$$E(T) \leq T_{\max}, \quad (14)$$

де  $T$  — кількість часу, що проходить від моменту, коли порушник з'явився в області  $W$ , до моменту його виявлення. В [9] задача (13), (14) за деяких умов зведена до задачі (6), (7).

Отже, розглянуті задачі є окремими випадками задачі (6), (7), яку можна звести до задачі булевого програмування так. Нехай  $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_M\}$  — мно-

жина точок з області  $W$  таких, що для кожної точки  $Y \in W$  справедлива нерівність  $\min_{m=1, \dots, M} \|Y - Z_m\| \leq \varepsilon$ , де  $\varepsilon > 0$ . Нехай  $z_{mkj} = 1$ , якщо в точці  $Z_m \in Z$  встановлено сенсор типу  $k$  з номером  $j \in \{1, 2, \dots, N_k\}$ ;  $z_{mkj} = 0$  в іншому випадку. Тут  $N_k$  — максимальна можлива кількість сенсорів типу  $k$ . Замість задачі (6), (7) розглянемо задачу

$$\min_{z_{mkj}} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_k} c_k z_{mkj}, \quad (15)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_k} \varphi_k(\|Y - Z_m\|) z_{mkj} \geq I \quad \forall Y \in Z, \quad (16)$$

$$\sum_{m=1}^M z_{mkj} \leq 1, \quad k=1, 2, \dots, K, \quad j=1, 2, \dots, N_k, \quad (17)$$

$$z_{mkj} \in \{0, 1\}, \quad m=1, 2, \dots, M, \quad k=1, 2, \dots, K, \quad j=1, 2, \dots, N_k. \quad (18)$$

Нерівності (17) гарантують, що один сенсор може бути розміщений тільки в одній точці, або він може не використовуватися. В одній точці дозволяється розміщувати один або кілька сенсорів. Задачу (15)–(18) можна розв'язати одним з числових методів булевого програмування.

Далі розглянемо задачі, для розв'язання яких можна застосувати простіші методи у порівнянні з методами загального призначення. Для таких задач вдається не тільки побудувати близькі до оптимальних розв'язки у вигляді числових векторів, але й дослідити їхні властивості. Зокрема, розглянемо задачу

$$\min_{n, u_j, X_j} c \sum_{j=1}^n u_j, \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^n \varphi(\|Y - X_j\|) u_j \geq I \quad \forall Y \in W, \quad (20)$$

$$n \geq 1, \quad u_j \geq 0, \quad X_j \in W, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (21)$$

де  $u_j$  — дійсне число, що характеризує «потужність»  $j$ -го сенсора,  $n$  — кількість сенсорів,  $c$  — ціна одиниці «потужності»,  $X_j$  — вектор координат  $j$ -го сенсора. Якщо  $u_j \equiv 1$ , отримуємо задачу

$$\min_{X_j} n, \quad (22)$$

$$\sum_{j=1}^n \varphi(\|Y - X_j\|) \geq I \quad \forall Y \in W, \quad (23)$$

$$n \geq 1, \quad X_j \in W, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

У цій задачі вимагається мінімізувати кількість однотипних сенсорів, що розміщені в області  $W$  та забезпечують виконання нерівностей (23).

#### РЕГУЛЯРНИЙ СПОСІБ РОЗМІЩУВАННЯ СЕНСОРІВ

Розглянемо спосіб розміщування сенсорів у області  $W$ , який полягає в тому, що сенсори розташовуються у вершинах регулярної сітки, утвореної правильними трикутниками, квадратами або правильними шестикутниками (рис. 1).

Припустимо, що для задачі (19)–(21) виконуються такі умови. Функція  $\varphi(d)$ ,  $d \geq 0$ , є незростаючою неперервною Ліпшицевою з константою  $L > 0$  та набуває невід'ємних значень. Існує число  $r > 0$  таке, що  $\varphi(d) > 0$  для  $0 \leq d < r$ ,  $\varphi(d) = 0$  для  $d \geq r$ ,  $\varphi(0) \geq br$  для деякої константи  $b > 0$ . Число  $r$  означає радіус дії сенсора. Припустимо, що область  $W$  — многокутник, усі кути якого не менші за  $\pi/2$ . Виконання останньої умови можна забезпечити, «зрізаючи» гострі кути, якщо вони є, та збільшуючи кількість сторін многокутника. Вважаємо, що  $I > 0$ .

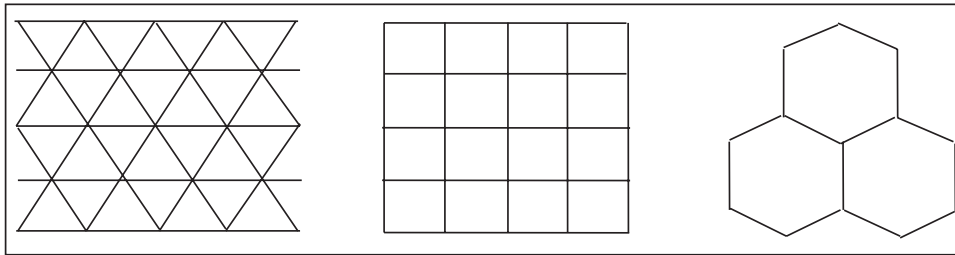


Рис. 1. Регулярні сітки для розміщення сенсорів

Опишемо метод, що буде допустимий розв'язок  $G = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  задачі (19)–(21), близький до оптимального. Розглянемо регулярну сітку  $S$ , сформовану правильними трикутниками, квадратами або правильними шестикутниками з довжиною сторони  $s$  (див. рис. 1). Вважаємо, що  $s \leq r$ . Позначимо

$$\bar{u} = \min \left\{ u : u \sum_{X \in Y_S} \varphi(\|Y - X\|) \geq I \quad \forall Y \in C \right\},$$

де  $Y_S$  — множина всіх вершин регулярної сітки  $S$ ,  $C$  — регулярна фігура сітки (трикутник, квадрат або шестикутник). Позначимо  $W_1(r)$  множину точок  $X \in W$ , для яких відстань до межі множини  $W$  не менша за  $r$ . Нехай  $G = Y_S \cap W = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_{n^0}^0)$ ,  $G_1(r) = G \cap W_1(r)$ ,  $G_0(r) = G \setminus G_1(r)$ . Виберемо число  $h > 4$  та розглянемо розв'язок задачі (19)–(21), який можна задати співвідношеннями

$$n = n^0, \quad X_j = X_j^0, \quad (25)$$

$$u_j = u_j^0 = \begin{cases} \bar{u}, & X_j \in G_1(r), \\ h\bar{u}, & X_j \in G_0(r), \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n^0. \quad (26)$$

Оскільки кути многокутника  $W$  не менші за  $\pi/2$  і  $h > 4$ , розв'язок (25), (26) є допустимим для задачі (19)–(21) за умови, що величини  $r$  та  $s/r$  достатньо малі.

Позначимо  $f^0(r, s)$  значення цільової функції задачі (19)–(21) для розв'язку (25), (26),  $f^0(r, s) = c \sum_{j=1}^{n^0} u_j^0$ . Нехай  $f^*(r)$  — оптимальне значення цільової функції задачі (19)–(21). Наступна теорема стверджує, що розв'язок (25), (26) є асимптотично оптимальним.

**Теорема 1.** Нехай  $W, I, L$  залишаються незмінними,  $\varphi(0) \geq br$  для деякої константи  $b > 0$ , справедливі співвідношення  $r \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow 0$ ,  $s/r \rightarrow 0$ . Тоді

$$\frac{f^0(r, s)}{f^*(r)} \rightarrow 1.$$

**Доведення.** Розглянемо таку задачу лінійного програмування

$$\min_{u_j} c \sum_{j=1}^{n^0} u_j, \quad (27)$$

$$\sum_{j=1}^{n^0} a_{ij} u_j \geq I, \quad i = 1, 2, \dots, n^0, \quad (28)$$

$$u_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n^0, \quad (29)$$

де  $a_{ij} = \varphi(\|X_i - X_j\|)$ ,  $X_i, X_j \in G$ . Двоїстою до задачі (27)–(29) є задача

$$\max_{v_i} I \sum_{i=1}^{n^0} v_i, \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^{n^0} a_{ij} v_i \leq c, \quad j=1, 2, \dots, n^0, \quad (31)$$

$$v_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n^0. \quad (32)$$

Нехай розв'язки  $(u_1, u_2, \dots, u_{n^0})$  та  $(v_1, v_2, \dots, v_{n^0})$  є допустимими для задач (27)–(29) та (30)–(32) відповідно. Із взаємної двоїстості цих задач випливає нерівність

$$c \sum_{j=1}^{n^0} u_j \geq I \sum_{i=1}^{n^0} v_i. \quad (33)$$

Позначимо  $J(X) = \{j : j \in \{1, 2, \dots, n^0\}, \|X - X_j^0\| \leq r\}$ . Оскільки  $\varphi(d) = 0$  для  $d > r$ , нерівності (28), (31) замінимо нерівностями  $\sum_{j \in J(X_i^0)} a_{ij} u_j \geq I, i=1, 2, \dots, n^0$ ,

та  $\sum_{i \in J(X_j^0)} a_{ij} v_i \leq c, j=1, 2, \dots, n^0$ , відповідно.

Для достатньо малої величини  $r$  вектор  $U^1 = (u_1^1, u_2^1, \dots, u_{n^0}^1)$ , визначений

$$\text{формулами } u_j^1 = \begin{cases} u^1, & X_j \in G_1(r), \\ hu^1, & X_j \in G_0(r), \end{cases} \quad j=1, 2, \dots, n^0, \quad \text{де } u^1 = \frac{I}{\sum_{j \in J(X_i^0)} a_{ij}},$$

$X_i^0 \in G_1(r)$ , є допустимим розв'язком задачі (27)–(29). Значення цільової функції для цього вектора становить

$$f^1(r, s) = c \sum_{j=1}^{n^0} u_j^1 = cu^1 (|G_1(r)| + h|G_0(r)|) = cu^1(n^0 + (h-1)|G_0(r)|),$$

де  $|G|$  означає кількість елементів множини  $G$ . У свою чергу, вектор  $(v_1, v_2, \dots, v_{n^0})$ , де  $v_i = cu^1 / I$ , є допустимим розв'язком двоїстої задачі (30)–(32), значення цільової функції якої для цього вектора дорівнює  $cu^1 n^0$ . Використовуючи нерівність (33), оцінюємо оптимальне значення  $f^*(r, s)$  цільової функції задачі (27)–(29):

$$cu^1 n^0 \leq f^*(r, s) \leq f^1(r, s) = cu^1(n^0 + (h-1)|G_0(r)|).$$

Отже,

$$f^1(r, s) \leq \left(1 + (h-1) \frac{|G_0(r)|}{n^0}\right) f^*(r, s). \quad (34)$$

З допустимості розв'язку (25), (26) для задачі (19)–(21) випливає нерівність

$$f^*(r) \leq f^0(r, s). \quad (35)$$

За допомогою елементарних міркувань з (34) та (35) виводимо нерівності

$$f^*(r) \leq f^0(r, s) \leq (1 + \sigma) f^*(r),$$

де  $\sigma \rightarrow 0$  за умови, що  $r \rightarrow 0$ . Із цих співвідношень випливає справедливість теореми.

Теорему доведено.

З теореми 1 випливає, що розміщення сенсорів однакової «потужності» у вершинах регулярної сітки призводить до близьких до оптимальних розв'язків задачі (19)–(21). Тому далі вважаємо, що  $u_j \equiv 1$ , та розглянемо задачу (22)–(24).



**ЧИСЛОВИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ БЛИЗЬКОГО ДО ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ СЕНСОРІВ**

Розглянемо задачу (22)–(24) та відповідний числовий метод розміщування сенсорів в області  $W$ . Результатом роботи методу є план розміщення однотипних сенсорів, що задовольняє умови (23), (24), та є асимптотично оптимальним розв’язком. Вважаємо, що область  $W$ , величина  $I$  та функція  $\varphi(d)$ ,  $d \geq 0$ , задовольняють умови, що описані в попередньому розділі. Ідея методу полягає в тому, що сенсори розміщують у вершинах регулярної сітки, а на межі області  $W$  розміщують додаткові сенсори. Розглянемо тільки регулярну сітку, утворену квадратами (див. рис. 1). Числові методи для регулярних сіток, утворених правильними трикутниками або шестикутниками, будують подібним способом.

Позначимо  $Q$  регулярну сітку, утворену квадратами з довжиною сторони  $q$ ,  $r > 3q/\sqrt{2}$ . Нехай  $Y_Q$  — множина всіх вершин сітки  $Q$ ;  $C_Q$  — множина всіх квадратів  $C$  сітки  $Q$ , для яких виконується співвідношення  $W \cap \text{int } C \neq \emptyset$ , де  $\text{int } C$  — внутрішня частина множини  $C$ ;  $\tilde{Y}_Q$  — множина всіх вершин сітки  $Q$ , що належать квадратам з множини  $C_Q$ .

Позначимо  $W_0 = W_0(r)$  множину точок  $X \in W$ , для яких відстань до межі множини  $W$  не більша за  $r$ . Нехай  $C_Q^0$  — множина всіх квадратів  $C$  сітки  $Q$ , для яких виконується співвідношення  $W_0 \cap \text{int } C \neq \emptyset$ ;  $\tilde{Y}_Q^0$  — множина всіх вершин сітки  $Q$ , що належать квадратам з множини  $C_Q^0$ .

Так само розглянемо сформовану квадратами із стороною  $s$  регулярну сітку  $S$ , для якої величина  $s$  визначається алгоритмом. Позначимо  $Y_S$  множину вершин сітки  $S$ . Вважаємо, що лінії сітки  $S$  паралельні або перпендикулярні лініям сітки  $Q$  і що множина вершин сітки  $S$  належить множині вершин сітки  $Q$ , тобто  $s/q \in \mathbb{Z}$ .

Розглянемо метод [9], що будує допустимий розв’язок  $G = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  задачі (22)–(24), близький до оптимального.

**Крок 1.** Розв’яжемо задачу

$$\max s, \tag{36}$$

$$\sum_{X \in Y_S} \varphi(\|Y - X\| + q/\sqrt{2}) \geq I \quad \forall Y \in C \cap Y_Q, \tag{37}$$

$$s/q \in \{1, 2, \dots, n, \dots\}, \tag{38}$$

де змінна  $s$  — довжина сторони квадрату сітки  $S$  і  $C$  — квадрат сітки  $S$ . Фіксуємо оптимальне значення змінної  $s$  і далі вважаємо, що сітка  $S$  утворена квадратами з довжиною сторін  $s$ . Виберемо

$$G = Y_S \cap W. \tag{39}$$

**Крок 2.** Якщо виконуються нерівності

$$\sum_{X \in G} \varphi(\|Y - X\| + q/\sqrt{2}) \geq I \quad \forall Y \in \tilde{Y}_Q^0, \tag{40}$$

роботу методу зупиняємо.

**Крок 3.** Виберемо точку  $Y \in \tilde{Y}_Q^0$ , що максимізує вираз

$$I - \sum_{X \in G} \varphi(\|Y - X\| + q/\sqrt{2}).$$

Включимо в розв’язок  $G$  проєкцію  $\Pi_W(Y)$  точки  $Y$  на множину  $W$ . Переходимо до кроку 2.

Зауважимо, що описаний метод скінченний. Дійсно, оскільки  $r > 3q/\sqrt{2}$  і для кожної точки  $Y$  з множини  $\tilde{Y}_Q^0$  справедлива нерівність  $\|Y - \Pi_W(Y)\| \leq \sqrt{2}q$ , зна-



чення  $I - \sum_{X \in G} \varphi(\|Y - X\| + q/\sqrt{2})$  на кроці 3 для вибраної точки  $Y \in \tilde{Y}_Q^0$  зменшується як мінімум на величину  $\varphi(\sqrt{2}q + q/\sqrt{2}) = \varphi(3q/\sqrt{2}) > 0$ . Оскільки множина  $\tilde{Y}_Q^0$  скінченна, нерівність (40) буде справедливою після скінченної кількості ітерацій.

Легко довести, що побудований розглянутим методом розв'язок  $G = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  є допустимим розв'язком задачі (22)–(24), тобто

$$\sum_{j=1}^n \varphi(\|Y - X_j\|) \geq I \quad \forall Y \in W. \quad (41)$$

Дійсно, для кожної точки  $Y \in W$  найближча до цієї точки вершина  $Y' \in Y_Q$  належить множині  $\tilde{Y}_Q^0$ . Якщо  $Y' \notin \tilde{Y}_Q^0$ , то з (36)–(39) випливає

$$\sum_{j=1}^n \varphi(\|Y' - X_j\| + q/\sqrt{2}) \geq I. \quad (42)$$

Якщо  $Y' \in \tilde{Y}_Q^0$ , то (42) випливає з (40). Оскільки функція  $\varphi(d)$  незростаюча та  $\|Y - Y'\| \leq q/\sqrt{2}$ , маємо

$$\sum_{j=1}^n \varphi(\|Y - X_j\|) \geq \sum_{j=1}^n \varphi(\|Y' - X_j\| + q/\sqrt{2}) \geq I,$$

звідки випливає (41).

Зауважимо, що в задачі (22)–(24) не беруть до уваги перешкоди, що можуть бути між сенсорами та ціллю в області  $W$ . Тому побудований розв'язок  $G$  можна вважати достатньо якісним тільки для випадків, коли область  $W$  є близькою до опуклої.

Справедливою є теорема про асимптотичну оптимальність побудованого розглянутим методом розв'язку  $G$ . Нехай  $\bar{f}^*(r)$  — оптимальне значення цільової функції задачі (22)–(24),  $\bar{f}^0(r, q) = n = |G|$  — значення цільової функції цієї задачі для розв'язку  $G$ .

**Теорема 2.** Нехай  $W, I, L$  залишаються незмінними,  $\varphi(0) \geq br$  для деякої константи  $b > 0$ , справедливі співвідношення  $r \rightarrow 0, q \rightarrow 0, q/r^{3/2} \rightarrow 0$ . Тоді

$$\frac{\bar{f}^0(r, q)}{\bar{f}^*(r)} \rightarrow 1.$$

Доведення теореми наведено в [9]. Теорема про асимптотичну оптимальність не гарантує якісної роботи методу у випадку, коли величини  $r, q$  не є близькими до нуля. В [9] описано числові експерименти, за допомогою яких наведений метод порівнюють з евристичним методом з роботи [4]. Розглянемо ідею методу, наведеного в [4]. Виберемо точку  $Y \in W$ , в якій нерівність (23) має найбільшу похибку, та розмістимо сенсор у точці  $Y$ . Повторюємо цей крок до тих пір, доки обмеження не будуть виконані. Числові експерименти показали, що в середньому описаний метод буде за цільовою функцією розв'язок приблизно на 25 % кращий, ніж метод з роботи [4].

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Molyboha A., Zabarankin M. Stochastic optimization of sensor placement for diver detection. *Operations Research*. 2012. Vol. 60, N 2. P. 292–312.
2. Iyer S., Rao D.V. Genetic algorithm based optimization technique for underwater sensor network positioning and deployment. *Proc. of the IEEE Underwater Technology (UT'15)*. Chennai, India, February 2015. P. 1–6.

3. Hua Cheng Bing, Zhao Wei, Chang Zi Nan. Underwater acoustic sensor networks deployment using improved self-organize map algorithm. *Cybernetics and Information Technologies*. 2014. Vol. 14, N 5. P. 63–77.
4. Dhillon S.S., Chakrabarty K. Sensor placement for effective coverage and surveillance in distributed sensor networks. *Wireless Communications and Networking*. 2003. Vol. 3. P. 1609–1614.
5. Mhatre V.P., Rosenberg C., Kofman D., Mazumdar R., Shroff, N. A minimum cost heterogeneous sensor network with a lifetime constraint. *IEEE Transactions on Mobile Computing*. 2005. Vol. 4, N 1. P. 4–15.
6. Zou Y., Chakrabarty K. Sensor deployment and target localization based on virtual forces. Twenty-second annual joint conference of the IEEE computer and communications (INFOCOM 2003). *IEEE Societies*. 2003. Vol. 2. P. 1293–1303.
7. Zou Y., Chakrabarty K. Sensor deployment and target localization in distributed sensor networks. *ACM Transactions on Embedded Computing Systems*. 2004. Vol. 3, N 1. P. 61–91.
8. Felemban M. Optimal node placement in underwater acoustic sensor network: Doctoral dissertation. King Abdullah University of Science and Technology. Thuwal, Kingdom of Saudi Arabia. October 2011.
9. Pashko S., Molyboha A., Zabaranin M., Gorovy S. Optimal sensor placement for underwater threat detection. *Naval Research Logistics*. 2008. Vol. 55, N 7. P. 684–699.
10. Burdic W.S. Underwater acoustic system analysis. New York: Prentice Hall, 1991. 452 p.
11. Ширяев А.Н. Вероятность. Москва: Наука, 1980. 574 с.
12. Вальд А. Последовательный анализ. Москва: Мир, 1960. 328 с.

*Надійшла до редакції 15.08.2017*

### **С.В. Пашко**

#### **ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ МНОГОСЕНСОРНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ УГРОЗЫ**

**Аннотация.** Описан алгоритм детектирования подводной угрозы с помощью системы акустических сенсоров, а также экстремальные задачи размещения сенсоров. Рассмотрены методы решения таких задач, доказана теорема об асимптотической оптимальности построенных планов размещения сенсоров. Из результатов численных экспериментов следует, что построенный метод превосходит известный метод решения задач размещения сенсоров.

**Ключевые слова:** сенсор, многосенсорная система, алгоритм детектирования угрозы, оптимальное расположение сенсоров, асимптотическая оптимальность.

### **S.V. Pashko**

#### **OPTIMAL PLACEMENT OF MULTISENSOR SYSTEM FOR THREAT DETECTION**

**Abstract.** We consider the mathematical models for underwater acoustic sensors, the algorithm for threat detection by a multisensory system, and optimization problems for placement of such systems. The mathematical methods for optimal sensor placement is developed. The limit theorem on the optimality of sensor placement is proved. The numerical experiments demonstrate that the algorithm outperforms the available mathematical method for optimal sensor placement.

**Keywords:** sensor, multisensor system, algorithm for threat detection, optimal sensor placement, asymptotic optimality.

**Пашко Сергій Володимирович,**  
кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник Інституту програмних систем НАН України,  
Київ, e-mail: pashko55@yahoo.com.