УДК 519.21

**В.О. БОЛДЫРЕВА, Г.М. ШЕВЧЕНКО**

# О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕРАЗОРЕНИЯ ОТ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫПЛАТ В КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РИСКА

**Аннотация.** В качестве модели деятельности страховой компании рассмотрена модель Крамера–Лундберга. Поскольку получить в явном виде решение для функции вероятности неразорения страховой компании при произвольном распределении величин страховых исков на данный момент пока не представляется возможным, рассматривается задача нахождения оценки сходимости изначальной вероятности неразорения к той, что будет получена после аппроксимации функции распределения величин исков.

**Ключевые слова:** модель Крамера–Лундберга, процесс риска, сходимость, вероятность разорения.

## ВВЕДЕНИЕ

При работе с реальными статистическими данными страховых компаний исследователи часто сталкиваются с проблемой трудоемкости обработки полученных эмпирических функций распределения случайных величин. Поскольку при сборе и сортировке данных в любом случае возникают неточности, применение различных аппроксимаций закономерно. Для анализа данных о деятельности страховых компаний используют математические модели. Работы Ф. Лундберга [1, 2] считаются базовыми исследованиями, посвященными построению математических моделей работы страховых компаний. В них страхование рассматривается как процесс, зависящий от времени работы компании и ее капитала.

В данной статье в качестве модели работы страховой компании используем классическую модель риска (модель Крамера–Лундберга). Динамикой капитала в ней называют случайный процесс

$$\xi_x(t) = x + ct - S(t),$$

где $x$ — начальное значение капитала, $\xi_x(t)$ — капитал страховой компании в момент времени $t$, $c$ — скорость поступления премий от клиентов, $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$ — случайный процесс [3], определяющий сумму выплаченных компанией страховых требований на выбранном отрезке времени, $Y_1, \ldots, Y_k$ — одинаково распределенные независимые величины исков с функцией распределения $F(x)$, $N(t)$ — количество полученных исков, описываемых пуассоновским процессом с параметром $\lambda$. Момент, когда сумма капитала компании опустится ниже нуля, назовем разорением. Вероятность того, что на бесконечном интервале времени $[0, +\infty)$ функционирования страховая компания разорится, задается выражением

$$\psi(x) = P\{\xi_x(t) < 0 \text{ при некотором } t > 0\}.$$

Соответственно функция вероятности неразорения $\varphi(x) = 1 - \psi(x)$ выражает вероятность того, что на интервале времени $[0, +\infty)$ разорения не произойдет.

Поскольку интегро-дифференциальное уравнение, описывающее вероятность неразорения в классической модели риска

$$c\varphi'(x) = \lambda\varphi(x) - \lambda\int_0^x \varphi(x-y)\,dF(y), \tag{1}$$

для произвольной функции распределения на данный момент в явном виде пока неразрешимо, представляет интерес задача о нахождении его приближенного решения и оценки скорости аппроксимации.

#### ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

**Лемма 1** (неравенство Крамера–Лундберга) [4]**.** Пусть уравнение

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} e^{Ry}\overline{F}(y)dy=1, \tag{2}$$

где $\overline{F}(y)=1-F(y)$, имеет корень $R>0$ (коэффициент Лундберга). Тогда при всех $x>0$ выполняется неравенство

$$\psi(x)\le e^{-Rx}. \tag{3}$$

**Лемма 2.** Уравнение для вероятности неразорения в классической модели риска запишем в интегральном виде [4]

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^x \varphi(x-y)[1-F(y)]dy. \tag{4}$$

**Доказательство.** Перепишем уравнение (1) в виде

$$\varphi'(x)=\frac{\lambda}{c}\varphi(x)-\frac{\lambda}{c}\int_0^x \varphi(x-y)dF(y). \tag{5}$$

Проинтегрируем по $x$ обе части уравнения (5) и получим

$$\varphi(x)-\varphi(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^x \varphi(z)dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^x\left\{\int_0^z \varphi(z-y)d[1-F(y)]\right\}dz=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\int_0^x\left\{\varphi(z)+\int_0^z \varphi(z-y)d[1-F(y)]\right\}dz=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\int_0^x\left\{\varphi(z)+\varphi(z-y)[1-F(y)]\Big|_0^z+\int_0^z \varphi'(z-y)[1-F(y)]dy\right\}dz=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\left\{\int_0^x \{\varphi(z)+\varphi(0)[1-F(z)]-\varphi(z)[1-F(0)]+\int_0^z \varphi'(z-y)[1-F(y)]dy\right\}dz=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\varphi(0)\int_0^x [1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^x\left\{\int_0^z \varphi'(z-y)[1-F(y)]dy\right\}dz. \tag{6}$$

Поменяем во втором интеграле в (6) порядок интегрирования:

$$\varphi(x)-\varphi(0)=\frac{\lambda}{c}\varphi(0)\int_0^x [1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^x\left\{[1-F(y)]\int_y^x \varphi'(z-y)dz\right\}dy=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\varphi(0)\int_0^x [1-F(z)]dz+\frac{\lambda}{c}\int_0^x [1-F(y)][\varphi(x-y)-\varphi(0)]dy=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\int_0^x \varphi(x-y)[1-F(y)]dy.$$

Таким образом, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^x \varphi(x-y)[1-F(y)]dy.$$

В явном виде решение для вероятности неразорения в классической модели риска находится только для нескольких частных случаев, например экспоненциального [5], гамма-распределения [6], смеси экспоненциальных распределений [7], вырожденного распределения. В связи с этим рассмотрим модель, в которой риски имеют функцию распределения $F_\varepsilon(y)$, близкую к $F(y)$ в некотором смысле (подробнее обсуждается далее). Одним из возможных вариантов является приближение функции распределения смесью сдвинутых экспоненциальных распределений таким образом, что они будут отличаться не более чем на $\varepsilon$ в смысле расстояния Леви. В работе [8] обосновано построение такого приближения, а в [7] показано использование данной смеси для получения дифференциального уравнения из интегро-дифференциального, а также построена оценка сближения решений.

Основная цель данной статьи заключается в нахождении оценки приближения полученной функции вероятности неразорения в модели Крамера–Лундберга к исходной, когда для функции распределения исков $F(y)$ используется некоторая аппроксимация $F_\varepsilon(y)$ [9].

Известно, что функция вероятности неразорения $\varphi(x)$ в классической модели риска удовлетворяет интегральному уравнению (4). Для приближенной вероятности $\varphi_\varepsilon(x)$ интегральное уравнение получаем аналогично:

$$\varphi_\varepsilon(x)=\varphi_\varepsilon(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^x \varphi_\varepsilon(x-y)[1-F_\varepsilon(y)]\,dy.$$

Обозначим приближенную вероятность разорения $\psi_\varepsilon(x)=1-\varphi_\varepsilon(x)$; для удобства также введем обозначения $\overline{F}(x)=1-F(x)$ и $\overline{F}_\varepsilon(x)=1-F_\varepsilon(x)$.

Пусть выполнены условия невырожденности распределения требований, т.е. $F(0)\neq 1$, и положительности дохода:

$$\lambda\int_0^{+\infty}\overline{F}(y)\,dy<c, \tag{7}$$

иначе при любом $x$ произойдет разорение с вероятностью единица. Полагаем также, что выполняются предположения (2) и (3) неравенства Крамера–Лундберга (лемма 1).

**Теорема 1.** Пусть выполнены предположения (2) и (3) и для некоторого $\mu\in(0,R)$, где $R$ — коэффициент Лундберга, выполнено условие

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \int_0^{+\infty} e^{\mu y}\overline{F}_\varepsilon(y)\,dy\le\frac{c}{\lambda}. \tag{8}$$

Тогда имеет место оценка точности приближения вероятности разорения

$$|\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)|=|\psi(x)-\psi_\varepsilon(x)|\le K\delta_\varepsilon e^{-\mu x},$$

где

$$\delta_\varepsilon=\int_0^{+\infty} e^{\mu y}|\overline{F}(y)-\overline{F}_\varepsilon(y)|\,dy,\;\; K=\left(\frac{c}{\lambda}-\int_0^{+\infty} e^{\mu y}\overline{F}(y)\,dy\right)^{-1}.$$

**Доказательство.** Запишем уравнение (4) с помощью обозначений вероятности разорения с учетом

$$\varphi(0)=1-\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty}\overline{F}(y)\,dy.$$

Получим

$$\varphi(x)=1-\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty}\bar F(y)dy+\frac{\lambda}{c}\int_0^x\varphi(x-y)\bar F(y)dy,$$

$$1-\psi(x)=1-\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty}\bar F(y)dy+\frac{\lambda}{c}\int_0^x[1-\psi(x-y)]\bar F(y)\,dy,$$

$$\psi(x)=\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty}\bar F(y)dy-\frac{\lambda}{c}\int_0^x[1-\psi(x-y)]\bar F(y)dy,$$

$$\psi(x)=\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty}\bar F(y)dy-\frac{\lambda}{c}\int_0^x\bar F(y)dy+\frac{\lambda}{c}\int_0^x\psi(x-y)\bar F(y)dy,$$

$$\psi(x)=\frac{\lambda}{c}\int_x^{+\infty}\bar F(y)dy+\frac{\lambda}{c}\int_0^x\psi(x-y)\bar F(y)dy.$$

Аналогично из уравнения (6) имеем

$$\psi_\varepsilon(x)=\frac{\lambda}{c}\int_x^{+\infty}\bar F_\varepsilon(y)dy+\frac{\lambda}{c}\int_0^x\psi_\varepsilon(x-y)\bar F_\varepsilon(y)dy.$$

Тогда

$$|\psi(x)-\psi_\varepsilon(x)|=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\left|\int_x^{+\infty}(\bar F(y)-\bar F_\varepsilon(y))dy+\int_0^x\psi(x-y)\bar F(y)dy-\int_0^x\psi_\varepsilon(x-y)\bar F_\varepsilon(y)dy\right|. \qquad (9)$$

Прибавив и вычтя в (9) под знаком модуля слагаемое

$$\int_0^x\psi_\varepsilon(x-y)\bar F(y)dy,$$

продолжим оценивание:

$$|\psi(x)-\psi_\varepsilon(x)|\le$$

$$\le\frac{\lambda}{c}\int_x^{+\infty}|\bar F(y)-\bar F_\varepsilon(y)|\,dy+\frac{\lambda}{c}\int_0^x|\psi(x-y)-\psi_\varepsilon(x-y)|\,\bar F(y)dy+$$

$$+\frac{\lambda}{c}\left|\int_0^x\psi_\varepsilon(x-y)\bar F(y)dy-\int_0^x\psi_\varepsilon(x-y)\bar F_\varepsilon(y)dy\right|\le$$

$$\le\frac{\lambda}{c}\int_x^{+\infty}|\bar F(y)-\bar F_\varepsilon(y)|\,dy+\frac{\lambda}{c}\int_0^x|\psi(x-y)-\psi_\varepsilon(x-y)|\,\bar F(y)dy+$$

$$+\frac{\lambda}{c}\int_0^x\psi_\varepsilon(x-y)|\bar F(y)-\bar F_\varepsilon(y)|\,dy. \qquad (10)$$

Заметим, что из условия (8) следует

$$\psi(x)\le e^{-\mu x}. \qquad (11)$$

Действительно, заменяя распределение $F_\varepsilon$ требований таким распределением $\widetilde{F}_\varepsilon \le F_\varepsilon$, что

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} e^{\mu y}(1-\widetilde{F}_\varepsilon(y))dy = 1,$$

не уменьшаем вероятность разорения.

Таким образом, из неравенства Крамера–Лундберга получим (11).

Обозначим

$$\Delta_\varepsilon = \sup_{x\ge 0}\{e^{\mu x}|\psi(x)-\psi_\varepsilon(x)|\}.$$

Из (11) следует $\Delta_\varepsilon < \infty$. Запишем с помощью (10)

$$\Delta_\varepsilon \le \frac{\lambda}{c}\sup_{x\ge 0}\left[e^{\mu x}\int_x^{+\infty}|\overline{F}(y)-\overline{F}_\varepsilon(y)|\,dy + e^{\mu x}\int_0^x \psi_\varepsilon(x-y)|\overline{F}(y)-\overline{F}_\varepsilon(y)|\,dy + \right.$$

$$\left. + e^{\mu x}\int_0^x |\psi(x-y)-\psi_\varepsilon(x-y)|\,\overline{F}(y)\,dy\right] = \frac{\lambda}{c}\sup_{x\ge 0}\left[\int_x^{+\infty} e^{\mu x}|\overline{F}(y)-\overline{F}_\varepsilon(y)|\,dy + \right.$$

$$+\int_0^x e^{\mu(x-y)}\psi_\varepsilon(x-y)e^{\mu y}|\overline{F}(y)-\overline{F}_\varepsilon(y)|\,dy +$$

$$\left. +\int_0^x e^{\mu(x-y)}|\psi(x-y)-\psi_\varepsilon(x-y)|\,e^{\mu y}\overline{F}(y)dy\right] \le$$

$$\le \frac{\lambda}{c}\sup_{x\ge 0}\left[\int_x^{+\infty} e^{\mu x}|\overline{F}(y)-\overline{F}_\varepsilon(y)|\,dy + \int_0^x e^{\mu(x-y)}\psi_\varepsilon(x-y)e^{\mu y}|\overline{F}(y)-\overline{F}_\varepsilon(y)|\,dy\right] +$$

$$+\frac{\lambda}{c}\sup_{x\ge 0}\int_0^x e^{\mu(x-y)}|\psi(x-y)-\psi_\varepsilon(x-y)|\,e^{\mu y}\overline{F}(y)dy. \tag{12}$$

Далее оценим каждое из полученных слагаемых в (12). В силу (11)

$$\sup_{x\ge 0}\left[\int_x^{+\infty} e^{\mu x}|\overline{F}(y)-\overline{F}_\varepsilon(y)|\,dy + \int_0^x e^{\mu(x-y)}\psi_\varepsilon(x-y)e^{\mu y}|\overline{F}(y)-\overline{F}_\varepsilon(y)|\,dy\right] \le$$

$$\le \int_0^{+\infty} e^{\mu y}|\overline{F}(y)-\overline{F}_\varepsilon(y)|\,dy = \delta_\varepsilon.$$

Заметим, что

$$e^{\mu(x-y)}|\psi(x-y)-\psi_\varepsilon(x-y)| \le \Delta_\varepsilon,$$

тогда

$$\sup_{x>0}\int_0^x e^{\mu(x-y)}|\psi(x-y)-\psi_\varepsilon(x-y)|\,e^{\mu y}\overline{F}(y)\,dy \le \Delta_\varepsilon \sup_{x>0}\int_0^x e^{\mu y}\overline{F}(y)dy.$$

Объединяя полученные неравенства и подставляя их в (12), имеем

$$\Delta_\varepsilon \le \frac{\lambda}{c}\left(\delta_\varepsilon + \Delta_\varepsilon\int_0^x e^{\mu y}\overline{F}(y)dy\right),\ \ \Delta_\varepsilon\left[\frac{c}{\lambda} - \int_0^x e^{\mu y}\overline{F}(y)dy\right] \le \delta_\varepsilon.$$

Из невырожденности распределения требований следует

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} e^{\mu y}\overline{F}(y)dy < \frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} e^{Ry}\overline{F}(y)dy = 1 .$$

Таким образом, получаем

$$\Delta_\varepsilon \le \left[\frac{c}{\lambda} - \int_0^x e^{\mu y}\overline{F}(y)dy\right]^{-1} \delta_\varepsilon = K\delta_\varepsilon ,$$

откуда $\forall x \ge 0$

$$|\psi(x) - \psi_\varepsilon(x)| \le K\delta_\varepsilon e^{-\mu x},$$

что и требуется доказать.

**Замечание 1.** Предполагая дополнительно, что

$$\delta_\varepsilon \to 0,\ \varepsilon \to 0, \tag{13}$$

получаем сходимость исходной и приближенной вероятностей неразорения

$$|\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)| = |\psi(x) - \psi_\varepsilon(x)| \le K\delta_\varepsilon e^{-\mu x} \to 0,\ \varepsilon \to 0+.$$

Отметим, что в предположении (13) условие (8) автоматически выполнено для достаточно малых положительных $\varepsilon$, поскольку

$$\int_0^{+\infty} e^{\mu y}\overline{F}_\varepsilon(y)dy \to \int_0^{+\infty} e^{\mu y}\overline{F}(y)dy < \frac{c}{\lambda},\ \varepsilon \to 0+ .$$

**Замечание 2.** Легко видеть, что вместо равенства (2) достаточно требовать выполнения неравенства

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^{+\infty} e^{Ry}\overline{F}(y)dy \le 1.$$

В свою очередь, это предположение выполнено для некоторого $R > 0$, если выполнено (7) и для некоторого $r > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{ry}\overline{F}(y)dy < \infty .$$

В случае, когда все экспоненциальные моменты требований бесконечны, т.е.

$$\forall r > 0 \quad \int_0^{+\infty} e^{ry}\overline{F}(y)dy = +\infty,$$

с помощью аналогичных рассуждений можно получить оценку слабее. А именно, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.** Предположим, что выполнены условия невырожденности распределения требований, условие положительности дохода (7), а также

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \int_0^{+\infty} \overline{F}_\varepsilon(y)dy < \frac{c}{\lambda} .$$

Тогда $|\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)| = |\psi(x) - \psi_\varepsilon(x)| \le \widetilde{K}\widetilde{\delta}_\varepsilon$, где

$$\widetilde{\delta}_\varepsilon = \int_0^{+\infty} |\overline{F}(y) - \overline{F}_\varepsilon(y)|\, dy,\ \widetilde{K} = \left(\frac{c}{\lambda} - \int_0^{+\infty} \overline{F}(y)dy\right)^{-1} .$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена классическая модель риска, описывающая деятельность страховой компании. Функция вероятности неразорения компании аппроксимирована с помощью произвольной функции распределения величин исков. Найдены условия, при которых получена близкая сходимость решений для вероятности неразорения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Lundberg F.I. Approximerad Framstallning av Sannolikhetsfunktionen, II. Aterforsakring av Kollektivrisker. Uppsala: Almqvist & Wiksell, 1903. 53 S.
2. Lundberg F. I. Forsakringsteknisk Riskutjamning. Stockholm: F. Englunds boktryckeri A. B., 1926. 103 S.
3. Beard R.E., Pentikainen T., Pesonen E. Risk theory. The stochastic basis of insurance. 3-rd ed. London; New York: Chapman and Hall, 1984. 408 p.
4. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. К.: Інформтехніка, 1995. 380 с.
5. Asmussen S., Albrecher H. Ruin probabilities: sec. ed. Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability. Singapore: World Scientific, 2010. Vol. 14. 621 p.
6. Бондарев Б.В., Жмыхова Т.В. Вероятность неразорения страховой компании для модели Крамера–Лундберга и Г-распределенных выплат. *Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика*. 2005. № 1–2. С. 54–70.
7. Бондарев Б.В., Болдырева В.О. Аппроксимация вероятности неразорения для модели Крамера–Лундберга. *Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика*. 2012. № 1. С. 13–22.
8. Тымко А.В. Аппроксимация распределения положительной случайной величины смесью сдвинутых экспоненциальных распределений. *Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки.* 2006. Вип. 1. С. 20–25.
9. Болдырева В.О. Моделирование и анализ деятельности страховых компаний, которые работают на $(B, S)$-рынке: дис. … канд. физ.-мат. наук. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. Киев, 2015. 152 с.


*Надійшла до редакції 13.02.2017*

**В.О. Болдирєва, Г.М. Шевченко**

**ПРО НЕПЕРЕРВНУ ЗАЛЕЖНІСТЬ ІМОВІРНОСТЕЙ НЕБАНКРУТСТВА ВІД ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ВИПЛАТ У КЛАСИЧНІЙ МОДЕЛІ РИЗИКУ**

**Анотація.** Як модель діяльності страхової компанії розглянуто модель Крамера–Лундберга. Оскільки отримати в явному вигляді розв’язок для функції ймовірності небанкрутства страхової компанії для довільного розподілу величин страхових позовів на даний момент поки що не є можливим, досліджується задача знаходження оцінки збіжності початкової ймовірності небанкрутства до ймовірності, яку буде отримано після апроксимації функції розподілу величин позовів.

**Ключові слова:** модель Крамера–Лундберга, процес ризику, збіжність, ймовірність банкрутства.

**V.O. Boldyreva, G.M. Shevchenko**

**ON THE CONTINUOUS DEPENDENCE OF NON-BANKRUPTCY PROBABILITY ON PAYMENT DISTRIBUTION FUNCTION IN THE CLASSICAL RISK MODEL**

**Abstract.** The Cramer–Lundberg model is considered as a model of insurance company. Since it is impossible to obtain an explicit solution for the function of non-bankruptcy probability of insurance company for an arbitrary distribution of the values of insurance claims, the authors consider the problem of estimating the convergence of the original non-bankruptcy probability to one that would be obtained by approximating the values of claim distribution function.

**Keywords:** Cramer–Lundberg model, risk process, convergence, ruin probability.

**Болдырева Валерия Олеговна,**
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Донецкого национального университета имени Васыля Стуса, Винница, e-mail: valery.boldyreva@gmail.com.

**Шевченко Георгий Михайлович,**
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: zhoraster@gmail.com.