

## СИНТЕЗ ЗОНАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ НАГРЕВА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В НЕРАЗДЕЛЕННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

**Аннотация.** Рассматривается задача синтеза управления для объектов с распределенными параметрами с использованием непрерывного наблюдения за фазовым состоянием объекта в определенных его точках на примере управления процессом нагрева трубчатого теплообменника в паровой рубашке. Для решения рассматриваемой задачи синтеза управления предлагается использовать численные методы первого порядка. Выводятся формулы для компонент градиента целевого функционала в пространстве оптимизируемых параметров. Получены результаты проведенных численных экспериментов.

**Ключевые слова:** синтез управления, зональное управление, обратная связь, распределенная система, трубчатый теплообменник, градиент функционала.

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных разделов в современной теории автоматического управления и регулирования является теория управления системами с распределенными параметрами. Задачи синтеза управления для распределенных систем являются в большинстве случаев более сложными по сравнению с сосредоточенными системами ввиду специфики распределенных объектов. К распределенным объектам управления относятся многие химико-технологические, радиационные, аэродинамические и гидродинамические процессы, процессы теплопроводности и диффузии, процессы, связанные с движением упругих конструкций, и др. Ввиду отсутствия формализованного методологического подхода для решения задач управления объектами с распределенными параметрами перед исследователями возникают проблемы, требующие использования нестандартных методов исследования и принятия решений в каждом конкретном случае. Основной вклад в развитие теории систем управления с распределенными параметрами обеспечили фундаментальные результаты, полученные в [1–7] и др. Современные технические средства измерительной и вычислительной техники, позволяющие в режиме реального времени выполнять большой объем работы, сыграли ключевую роль в развитии систем управления с обратной связью и их широкого практического внедрения.

В настоящей статье рассматривается задача синтеза управления объектом с распределенными параметрами на специальных классах управляющих воздействий. Специфика исследуемого объекта заключается в том, что в нем участвует запаздывающий аргумент. Для синтезируемых управлений введено понятие зональности, т.е. постоянство значений синтезируемых параметров управления в каждом подмножестве (зоне), на которые заранее разбито все множество возможных состояний объекта или временной интервал функционирования процесса (объекта). Значения управляющих воздействий определяются также видом обратной связи и классом функциональной зависимости управления от текущего наблюдаемого значения состояния или текущего времени наблюдения. Анализируется случай непрерывной обратной связи с использованием непрерывного наблюдения за фазовым состоянием объекта в определенных его точках.

Постоянство параметров зональных управляющих воздействий (самых зональных управлений или зональных коэффициентов усиления при линейной зависимости управления от состояния процесса) обуславливает робастность системы управления, обеспечивает реализуемость с достаточно высокой точностью синтезированных управляющих воздействий и улучшает технические показатели функционирования оборудования, задействованного в контуре управления.

Принцип зональности управляющих параметров положен нами в основу численных методов решения таких специфических оптимизационных и обратных задач, как задача оптимального размещения добывающих и нагнетательных скважин и оптимального управления их дебитами при эксплуатации нефтяного пласта в режиме водонапорного поршневого вытеснения [8], задачи идентификации коэффициента гидравлического сопротивления при неустановившемся режиме движения вязких жидкостей по трубопроводам [9], а также задач синтеза управления и идентификации объектов с сосредоточенными параметрами [10–13].

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Процесс нагрева жидкости в трубчатом теплообменнике в паровой рубашке опишем уравнением [14]

$$u_t(x, t) + a \cdot u_x(x, t) = -\alpha \cdot [u(x, t) - \vartheta(t)], \quad (x, t) \in Q = [0, l] \times (0, T], \quad (1)$$

где  $a = \text{const}$  — заданная скорость движения жидкости в теплообменнике и обогревательной системе;  $l$  — длина части теплообменника, находящейся в паровой рубашке;  $\vartheta(t)$  — температура, создаваемая внутри паровой рубашки и являющаяся кусочно-непрерывной функцией времени;  $\alpha = \text{const}$  — коэффициент теплопередачи;  $u(x, t)$  — температура жидкости в точке  $x \in [0, l]$  теплообменника в момент времени  $t$ , определяемая непрерывно дифференцируемой по  $x$  и кусочно-непрерывно дифференцируемой по  $t$  функцией.

Начальные и граничные условия заданы в следующей виде:

$$u(x, \tau) = u_0(x, \tau) \in U_0, \quad x \in [0, l], \quad \tau \in [-\Delta, 0], \quad (2)$$

$$u(0, t) = (1 - \gamma) \cdot u(l, t - \Delta), \quad t \in (0, T], \quad (3)$$

где  $\gamma = \gamma(t) \in \Gamma_1 = (0, \delta)$ ,  $0 < \delta < 1$ , — параметр, характеризующий величину потери тепла при прохождении жидкости по обогревательной системе;  $\Delta$  — транспортное запаздывание, определяемое длиной  $L$  обогревательной системы, которая находится вне паровой рубашки ( $\Delta = L/a$ ). Здесь непрерывная функция  $u_0(x, \tau)$  и параметр  $\gamma$  заданы неточно, но их значения принадлежат некоторым заданным множествам  $U_0$ ,  $\Gamma_1$  с известными функциями плотности распределения  $\rho_{U_0}(u_0(x, \tau))$ ,  $\rho_{\Gamma_1}(\gamma)$ .

Внутри печи вдоль теплообменника установлены термомпары (датчики) для измерения температуры жидкости в заданных  $N$  точках  $\bar{x}_j \in [0, l]$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , в целях проведения необходимой коррекции температуры паровой рубашки  $\vartheta(t)$ . Датчики реализуют оперативное наблюдение и ввод в блок управления информации о состоянии процесса нагрева в этих точках, определяемого вектором

$$\bar{u}(t) = (\bar{u}_1(t), \dots, \bar{u}_N(t))^* = (u(\bar{x}_1, t), \dots, u(\bar{x}_N, t))^*, \quad t \in (0, T]. \quad (4)$$

Для управления процессом нагрева жидкости в паровой рубашке требуется синтезировать регулятор, который по результатам измерений температуры в точках  $\bar{x}_j \in [0, l]$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , теплообменника обеспечивал бы поддержание выходной температуры жидкости  $u(l, t)$  на заданном уровне за счет поддержания необходимой температуры  $\vartheta(t)$  в паровой рубашке. Исходя из технологических

условий задано множество допустимых значений управлений:

$$V = \{\vartheta(t) : \underline{\vartheta} \leq \vartheta(t) \leq \bar{\vartheta}, t \in [0, T]\}, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

где  $\underline{\vartheta}$ ,  $\bar{\vartheta}$  — заданные значения.

Рассматриваемая задача управления процессом нагрева жидкости с обратной связью заключается в определении температуры паровой рубашки, зависящей от замеренных значений состояния в наблюдаемых точках:

$$\vartheta(t) = w(\bar{u}(t)) \in V, \quad t \in (0, T], \quad (6)$$

минимизирующей критерий качества управления, который задан, например, в виде следующего функционала:

$$J(w) = \int_{U_0 \Gamma_1} \int_{T_0}^T \left\{ \beta_1 \int [u(l, t; w, u_0, \gamma) - \tilde{u}(t)]^2 + \beta_2 \|\vartheta(t)\|_{L^2([0, T])}^2 dt \right\} d\rho_{\Gamma_1}(\gamma) d\rho_{U_0}(u_0). \quad (7)$$

Здесь  $u(x, t) = u(x, t; w, u_0, \gamma)$  — решение задачи (1)–(3), соответствующее выбранным начальному и граничному условиям, определяемых  $u_0(x, \tau)$ ,  $\gamma$ , а также допустимым значениям управления  $w(\bar{u}(t))$ ;  $\tilde{u}(t)$  — заданная функция, характеризующая желаемые значения температуры жидкости на правом конце (выходе) теплообменника в течение всего процесса нагрева жидкости;  $\beta_1, \beta_2 \geq 0$  — весовые коэффициенты.

Функционал (7) характеризует качество управления процессом в среднем, исходя из множеств всех возможных начальных состояний  $U_0$  и потерь тепла, определяемого множеством значений  $\Gamma_1$  в обогревательной системе. Величина  $T_0 \in [0, T]$  определяется временем, по истечении которого начальные условия  $u_0(x, \tau) \in U_0$  на процесс  $u(x, t)$ ,  $x \in [0, l]$ , при  $t \geq T_0$  влияния практически не оказывают.

Следует учитывать специфику задачи, которая заключается в запаздывающем влиянии значений краевого условия на правом конце на значения краевого условия на левом конце. Величина времени запаздывания определяется заданной скоростью движения жидкости в системе. Поэтому очевидно, что время «забывания» начальных условий  $T_0$  зависит от скорости движения жидкости  $a$ , причем  $T_0 > \Delta$ . Величина  $T_0$  зависит также от технологических и технических параметров теплообменника, и для их конкретных значений величину  $T_0$  можно определить с помощью вычислительных экспериментов. Отметим, что начало исследований эволюционных процессов с диссипативным членом без заданных начальных условий было изложено в работе [15]. Далее исследования были проведены, в частности, для соответствующих задач управления процессами в работе [16].

Пусть значения температуры жидкости в паровой рубашке  $u(x, t)$ ,  $x \in (0, l)$ , при различных допустимых значениях температуры в печи удовлетворяют условию

$$u(x, t) \in [u_{\min}, u_{\max}], \quad (x, t) \in Q, \quad v(t) \in V,$$

где  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$  заданы. Разобьем отрезок  $[u_{\min}, u_{\max}]$  произвольно выбранными точками  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M-1$ , на  $M$  частей, где  $u_0 = u_{\min}$  и  $u_M = u_{\max}$ .

В  $N$ -мерном фазовом пространстве  $\bar{u}(t) \in R^N$  текущих замеренных значений температуры в точках теплообменника введем следующие  $N$ -мерные параллелепипеды (зоны):

$$P_{i_1 i_2 \dots i_N} = \{(u_1, \dots, u_N) : u_{i_j-1} \leq u \leq u_{i_j}, 1 \leq i_j \leq M, j = 1, 2, \dots, N\}, \quad (8)$$

число которых равно  $M^N$ . Обозначим через  $I$   $N$ -мерный мультииндекс,  $I = (i_1, i_2, \dots, i_N)$ , который определяет номер соответствующего параллелепипеда.

Оптимизируемые управляющие воздействия  $\vartheta(t)$  вида (6) будем искать на классе кусочно-постоянных во времени функций, значения которых определяются в зависимости от номера (мультииндекса) параллелепипеда (8), которому принадлежит вектор текущих измеренных значений температуры в точках замера, а именно

$$\vartheta(t) = w(\bar{u}(t)) = \omega_{i_1 i_2 \dots i_N} = \omega_I = \text{const} \quad (9)$$

при  $u_{i_j-1} \leq \bar{u}_{i_j}(t) \leq u_{i_j}$ ,  $i_j = 1, 2, \dots, M$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $t \in [0, T]$ , т.е. если  $\bar{u}(t) \in P_{i_1 i_2 \dots i_N} = P_I$ .

Число различных значений  $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_N}$ , которые может принять управляющий вектор  $w(\bar{u}(t))$ , равно количеству параллелепипедов (зон), определяемых неравенствами (8), т.е.  $M^N$ .

Рассматриваемая задача заключается в отыскании минимума функционала (7) при ограничениях (5)  $M^N$ -мерного вектора управляющих параметров  $\omega = (\omega_{11\dots 1}, \dots, \omega_{MM\dots M})$ , определяющего постоянные во времени значения управления для всех параллелепипедов (8), пока вектор измеренных значений принадлежит соответствующему параллелепипеду.

Рассматриваемая задача синтеза управления (1)–(3), (5), (7)–(9) является задачей параметрического оптимального управления системой с распределенными параметрами. Ее специфическими особенностями являются, во-первых, отсутствие конкретно заданных начальных условий, во-вторых, наличие запаздывания в неразделенных краевых условиях, в-третьих, конечномерность отыскиваемого управляющего вектора, в-четвертых, формирование управления в зависимости от значений текущего состояния процесса в точках замера, а более точно — в зависимости от мультииндекса, определяющего параллелепипед (зону) фазового пространства, которому принадлежат текущие значения замеров.

#### МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для численного решения поставленной задачи синтеза оптимального управления (1)–(8), т.е. определения зависимости вида (6), используем подход, предложенный в [9].

Очевидно, что управление вида (6), в частности (9), предполагает наличие обратной связи. В случае (9) значение управления в процессе нагрева жидкости меняется только в моменты времени, когда вектор состояния  $\bar{u}(t)$  в наблюдаемых точках переходит из одной зоны (в данном случае параллелепипеда) в другую. Поэтому управления вида (9) назовем зональными.

Таким образом, рассматриваемая задача управления процессом нагрева в теплообменнике (1)–(3) с обратной связью (4) на классе кусочно-постоянных функций вида (9) состоит в определении  $M^N$ -мерного вектора  $\omega = (\omega_{i_1 i_2 \dots i_N})_{i_j=1, 2, \dots, M, j=1, 2, \dots, N}$ , минимизирующего функционал (7).

Для определения оптимальных значений зональных управлений с учетом обратной связи используем численные методы, основанные на построении минимизирующей последовательности  $\{\omega^k\}$  с применением итерационных процедур оптимизации первого порядка, например метода проекции сопряженных градиентов [17]:

$$\begin{aligned} \omega^{k+1} &= P_{(S)}(\omega^k + \mu_k S^k), \quad \mu_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad S^0 = -\text{grad } J(\omega^0), \\ S^{k+1} &= -\text{grad } J(\omega^{k+1}) + \eta S^k, \quad \eta = \|\text{grad } J(\omega^{k+1})\|^2 / \|\text{grad } J(\omega^k)\|^2, \quad (10) \end{aligned}$$

где  $\omega^0 \in R^{M^N}$  — некоторое допустимое начальное приближение оптимизируемого вектора;  $\text{grad } J(\cdot)$  — градиент целевого функционала задачи;  $\mu_k$  — величина шага до минимума функционала в направлении вектора  $S^k$ ;  $P_{(5)}(\cdot)$  — оператор проектирования на допустимое множество, определяемое условием (5).

Для построения процедуры (10) получим формулы для компонент градиента целевого функционала, используя известную методику вариации оптимизируемых параметров функционала [18, 19].

На основании взаимной независимости начальных функций  $u_0(x, \tau)$  из  $U_0$  и параметров  $\gamma(t)$  из  $\Gamma_1$  очевидно, что

$$\text{grad}_{\omega} J(\omega) = \beta_1 \int \int_{U_0 \Gamma_1} [\text{grad}_{\omega} \Phi(\omega; u_0, \gamma) + 2\beta_2 \omega] d\rho_{\Gamma_1}(\gamma) d\rho_{U_0}(u_0),$$

$$\Phi(\omega; u_0, \gamma) = \int_{T_0}^T [u(l, t; \omega, u_0, \gamma) - \tilde{u}(t)]^2 dt.$$

Поэтому для простоты выкладок достаточно рассмотреть одну функцию  $u_0(x, \tau)$  из множества  $U_0$ , которую обозначим  $\varphi(x, \tau)$ , и одно значение  $\gamma$  из множества  $\Gamma_1$ . Используем следующее обозначение для решения соответствующей начально-краевой задачи (1)–(3):  $u(x, t) = u(x, t; \omega, \varphi, \gamma)$ .

Предположим, что только одна компонента с мультииндексом  $\tilde{I}$  вектора параметров зональных управляющих воздействий  $\omega \in R^{M^N}$  получила допустимое приращение  $\Delta \omega_{\tilde{I}}$ , а остальные компоненты остались без изменения, т.е.  $\Delta \omega_I = 0, I \neq \tilde{I}$ . Соответственно получают приращения  $\delta \bar{u}(t)$  — значения состояния  $u(\bar{x})$  в точках замера  $\bar{x}$ , а следовательно, изменится управление с обратной связью:

$$\delta \bar{u}(t) = (\delta u_1(t), \delta u_2(t), \dots, \delta u_N(t)),$$

$$\delta w(t) = w(\bar{u}(t) + \delta \bar{u}(t)) - w(\bar{u}(t))$$

и в целом состояние процесса в теплообменнике:

$$\delta u(x, t) = u(x, t; \omega + \delta \omega) - u(x, t; \omega).$$

Очевидно, что  $\delta u(x, t)$  является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial \delta u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial \delta u(x, t)}{\partial x} = -\alpha [\delta u(x, t) - \delta w(t)],$$

$$\delta u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\delta u(0, t) = \begin{cases} 0, & t \leq \Delta, \\ (1 - \gamma) \delta u(l, t - \Delta), & t > \Delta. \end{cases} \quad (11)$$

Оценим приращение целевого функционала  $\Phi(\omega; \varphi, \gamma)$ , пользуясь известной методикой, изложенной, например, в [17–19]:

$$\delta \Phi(\omega; \varphi, \gamma) = 2 \int_{T_0}^T [u(l, t) - \tilde{u}(t)] \delta u(l, t) dt + \int_0^T [\tilde{u}(t)]^2 dt.$$

Введем в рассмотрение функцию Лагранжа

$$L(\omega; u, \psi) = \Phi(\omega; \varphi, \gamma) + \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \left\{ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \alpha [u(x, t) - w(t)] \right\} dx dt,$$

где  $\psi(x, t)$  — пока произвольная функция. Оценим приращение функции Лагранжа, получаемое ввиду приращения вектора оптимизируемых параметров  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \delta L(\omega; u, \psi) = & 2 \int_{T_0}^T [u(l, t) - \tilde{u}(t)] \delta u(l, t) dt + \int_{T_0}^T [\delta u(l, t)]^2 dt + \\ & + \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \frac{\partial \delta u(x, t)}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_0^l a \psi(x, t) \frac{\partial \delta u(x, t)}{\partial x} dx dt + \\ & + \int_0^T \int_0^l \alpha \psi(x, t) [\delta u(x, t) - \delta w(t)] dx dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \delta_1 L(\omega; u, \psi) &= \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \frac{\partial \delta u(x, t)}{\partial t} dx dt, \\ \delta_2 L(\omega; u, \psi) &= \int_0^T \int_0^l a \psi(x, t) \frac{\partial \delta u(x, t)}{\partial x} dx dt, \\ \delta_3 L(\omega; u, \psi) &= \int_0^T \int_0^l \alpha \psi(x, t) [\delta u(x, t) - \delta w(t)] dx dt. \end{aligned}$$

Интегрируя первые два выражения по частям с учетом (11), получаем

$$\begin{aligned} \delta_1 L(\omega; u, \psi) &= \int_0^l \psi(x, T) \delta u(x, T) dx - \int_0^T \int_0^l \delta(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} dx dt, \\ \delta_2 L(\omega; u, \psi) &= a \int_0^T [\psi(l, t) \delta u(l, t) - \psi(0, t) \delta u(0, t)] dt - a \int_0^T \int_0^l \delta(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} dx dt = \\ &= a \int_0^T \psi(l, t) \delta u(l, t) dt - a(1-\gamma) \int_{\Delta}^T \psi(0, t) \delta u(l, t - \Delta) dt - a \int_0^T \int_0^l \delta(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} dx dt. \end{aligned}$$

В (12) группируем члены по  $\delta u(x, t)$  и получаем

$$\begin{aligned} \delta L(\omega; u, \psi) = & - \int_0^T \int_0^l \left[ \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - \alpha \psi(x, t) \right] \delta u(x, t) dx dt - \\ & - \alpha \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \delta w(t) dx dt + 2 \int_{T_0}^T [u(l, t) - \tilde{u}(t)] \delta u(l, t) dt + \int_0^l \psi(x, T) \delta u(x, T) dx + \\ & + \int_{T_0}^T [\delta u(l, t)]^2 dt + a \int_0^T \psi(l, t) \delta u(l, t) dt - a(1-\gamma) \int_{\Delta}^T \psi(0, t) \delta u(l, t - \Delta) dt. \end{aligned}$$

Предположим, что функция  $\psi(x, t)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} - \alpha \psi(x, t) = 0, \\ \psi(x, T) = 0, \quad x \in [0, l].$$

Тогда для приращения функции Лагранжа получим выражение

$$\delta L(\omega; u, \psi) = -\alpha \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \delta w(t) dx dt + 2 \int_{T_0}^T [u(l, t) - \tilde{u}(t)] \delta u(l, t) dt + \int_{T_0}^T [\delta u(l, t)]^2 dt + \\ + a \int_0^T \psi(l, t) \delta u(l, t) dt - a(1-\gamma) \int_{\Delta}^T \psi(0, t) \delta u(l, t - \Delta) dt.$$

Введем обозначение:

$$\delta_0 L(\omega; u, \psi) = \int_{T_0}^T \{2[u(l, t) - \tilde{u}(t)] + a\psi(l, t)\} \delta u(l, t) dt - \\ - a(1-\gamma) \int_{\Delta}^T \psi(0, t) \delta u(l, t - \Delta) dt + \int_0^{T_0} a\psi(l, t) \delta u(l, t) dt.$$

Проведя во втором интеграле в правой части этой формулы замену переменной  $t - \Delta = \theta$ ,  $dt = d\theta$ , получим

$$a(1-\gamma) \int_{\Delta}^T \psi(0, t) \delta u(l, t - \Delta) dt = a(1-\gamma) \int_0^{T-\Delta} \psi(0, \theta + \Delta) \delta u(l, \theta) d\theta,$$

откуда с учетом первоначальной переменной  $t$  имеем

$$a(1-\gamma) \int_{\Delta}^T \psi(0, t) \delta u(l, t - \Delta) dt = a(1-\gamma) \int_0^{T-\Delta} \psi(0, t + \Delta) \delta u(l, t) dt.$$

Таким образом,

$$\delta_0 L(\omega; u, \psi) = \int_{T_0}^T \{2[u(l, t) - \tilde{u}(t)] + a\psi(l, t)\} \delta u(l, t) dt - \\ - a(1-\gamma) \int_0^{T-\Delta} \psi(0, t + \Delta) \delta u(l, t) dt + \int_0^{T_0} a\psi(l, t) \delta u(l, t) dt.$$

Пусть  $\psi(x, t)$  удовлетворяет следующему краевому условию:

$$\psi(l, t) = -\frac{2}{a}[u(l, t) - \tilde{u}(t)], \quad t \in (T - \Delta, T], \\ \psi(l, t) = (1-\gamma)\psi(0, t + \Delta) - \frac{2}{a}[u(l, t) - \tilde{u}(t)], \quad t \in (T_0, T - \Delta], \\ \psi(l, t) = (1-\gamma)\psi(0, t + \Delta), \quad t \in (0, T_0].$$

Тогда для приращения функции Лагранжа получим

$$\delta L(\omega; u, \psi) = -\alpha \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \delta w(t) dx dt + \int_0^T [\delta u(l, t)]^2 dt.$$

Выделив в последнем выражении линейную относительно  $\delta w(t)$  часть, получим формулу для компонент градиента функционала  $L(\omega; u, \psi)$  по оптимизируемым параметрам (8), (9):

$$\frac{\partial L(\omega; u, \psi)}{\partial \omega_{\tilde{I}}} = - \int_{\Pi_{\tilde{I}}(t; \omega)} \int_0^l \alpha \psi(x, t) dx dt.$$

Здесь мультииндекс  $\tilde{I} = (\tilde{i}_1, \tilde{i}_2, \dots, \tilde{i}_N)$ ,  $\tilde{i}_j = 1, 2, \dots, M$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , определяет номер соответствующего параллелепипеда,  $\Pi_{\tilde{I}}(t; \omega)$  представляет объединение всех тех временных интервалов из  $[0, T]$ , в которых значения температуры в наблюдаемых точках теплообменника принадлежат  $\tilde{I}$ -му параллелепипеду, т.е. выполнялось условие

$$u_{\tilde{i}_j-1} \leq u(\bar{x}_j, t) < u_{\tilde{i}_j}, \quad \tilde{i}_j = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

иными словами,  $\Pi_{\tilde{I}}(t; \omega) = \{t \in [0, T] : \bar{u}(t) \in P_{\tilde{I}}\}$ .

Обобщая полученные результаты на случай множеств  $U_0$  и  $\Gamma_1$ , получаем выражение для компонент градиента целевого функционала (7)

$$\frac{\partial J(\omega)}{\partial \omega_I} = -\beta_1 \int_{U_0} \int_{\Gamma_1} \int_{\Pi_I(t; \omega; u_0, \gamma)} \int_0^l \alpha \psi(x, t; \omega, u_0, \gamma) dx dt d\rho_{\Gamma_1}(\gamma) d\rho_{U_0}(u_0) + 2\beta_2 \omega.$$

Важную роль при определении оптимальных зональных значений управляющей функции  $\vartheta(t)$  с применением подхода, описанного выше, играет выбор как количества, так и конкретно самих зон (8). Рекомендуется следующий подход, в котором сначала произвольно выбирается начальное значение  $M$  и назначаются какие-либо зоны (8). Решив поставленную выше задачу синтеза управления, проводится анализ полученных оптимальных зональных значений управляющего воздействия по всем соседним зонам. В случае, если оптимизируемые параметры в каких-либо двух смежных зонах различаются незначительно, то эти смежные зоны можно объединить в одну, уменьшив, таким образом, число  $M$ , а следовательно, и число переключений управления печью. В случае, если оптимизируемые параметры в двух смежных зонах различаются существенно, то, наоборот, следует разбить каждую из этих смежных зон, например, на две зоны, т.е. увеличить число  $M$ , и вновь решать поставленную выше задачу синтеза управления. Увеличение количества зон следует проводить до тех пор, пока значение целевого функционала не перестанет существенно меняться (уменьшаться).

#### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Выше нами были проведены многочисленные вычислительные эксперименты на примере решения тестовых модельных задач. Ниже приведем некоторые результаты, полученные на основании этих экспериментов.

Рассмотрим процесс нагрева жидкости в трубчатом теплообменнике длиной  $l = 1$ , находящейся в паровой рубашке. Скорость движения жидкости в теплообменнике и обогревательной системе примем  $a = 1$ . Коэффициент теплопередачи примем  $\alpha = 1$ .

Пусть множество начальных условий  $U_0$  состоит из пяти функций, определяемых следующим образом:

$$U_0 = \{u_0^1(x, \tau) = 20 + \sin(2\pi x), u_0^2(x, \tau) = 20 + \cos(2\pi x), u_0^3(x, \tau) = 20 + e^{x^2 - x}, \\ u_0^4(x, \tau) = 20 + \ln(\pi x + 0.3), u_0^5(x, \tau) = 20 + x^2\}, \quad x \in [0, l], \quad \tau \in [-\Delta, 0].$$

Величину транспортного запаздывания примем  $\Delta = 2$ .



Предположим, что множество параметров  $\Gamma_1$  состоит из трех функций, определяемых следующим образом:

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(t) = 0.25 + 0.1 \cos(0.5t), \gamma_2(t) = 0.25 + 0.1 \sin(0.5t), \\ \gamma_3(t) = 0.25 + 0.1 \sin(0.5t) \cos(0.5t)\}, t \in (0, T].$$

Допустимые значения управления  $\vartheta(t)$  задаются неравенством вида  $0 \leq \vartheta(t) \leq 100$ ,  $t \in [0, T]$ , время управления процессом  $T = 20$ .

Функция  $\tilde{u}(t)$ , определяющая желаемые значения температуры жидкости на выходе теплообменника в течение всего процесса нагрева жидкости, имеет постоянное значение:  $\tilde{u}(t) = \text{const} = 30$ .

Проведены предварительные численные эксперименты по определению момента времени  $T_0 \in [0, T]$ , после которого значения начальных условий  $u_0(x, \tau)$  несущественно влияют на процесс  $u(x, t)$ ,  $t \in [T_0, T]$ . Для  $T_0$  получено значение, равное четырем. Приведенные на рис. 1–3 графики подтверждают правильность назначенного значения для  $T_0$ .

Множество всевозможных значений температуры разобьем на  $M = 10$  полуинтервалов:

$$\{(0; 20], (20; 24], (24; 27], (27; 29], (29; 30], (30; 31], (31; 33], (33; 36], (36; 40], (40; 100]\}.$$

Предположим, что внутри теплообменника установлены два ( $N = 2$ ) термодатчика в точках  $\xi_1 = 0.25$  и  $\xi_2 = 0.75$ .

Управление  $\vartheta(t)$  будем искать на классе кусочно-постоянных функций, имеющих вид (9). Таким образом, количество управляющих параметров, а также и число зон в задаче равно  $M^N = 100$ .

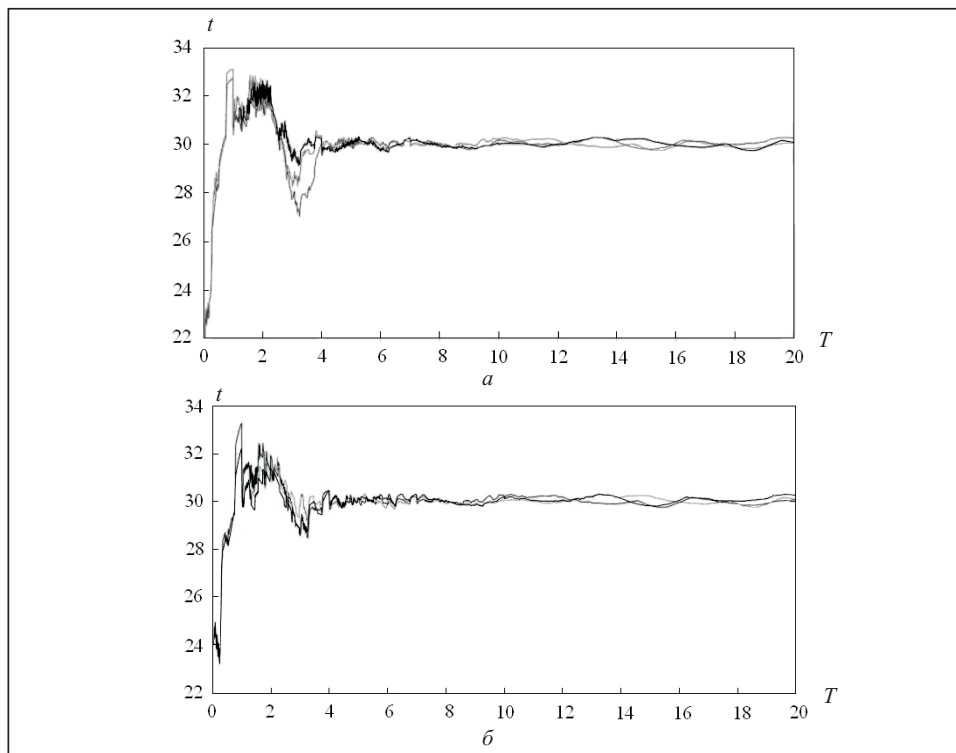


Рис. 1. Графики полученных значений температуры жидкости на выходе теплообменника при начальных распределениях температуры  $u_1^0(x, \tau)$  (а) и  $u_2^0(x, \tau)$  (б) и трех значений параметров внешней среды  $\gamma(t) \in \Gamma_1$  при  $\omega = \omega^*$

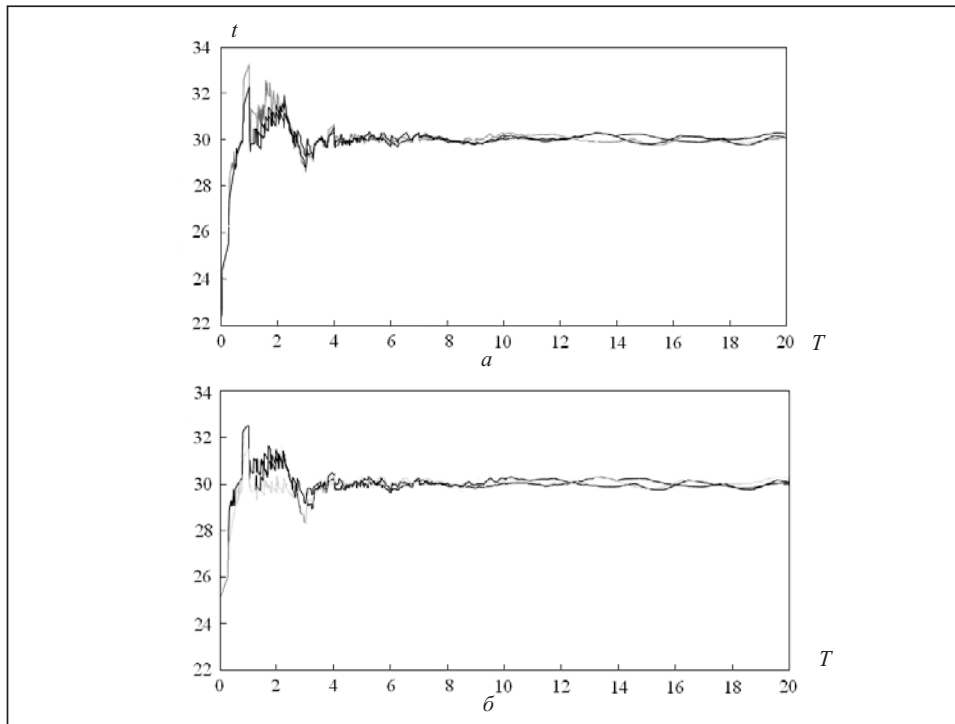


Рис. 2. Графики полученных значений температуры жидкости на выходе теплообменника при начальных распределениях температуры  $u_3^0(x, \tau)$  (а) и  $u_4^0(x, \tau)$  (б) и трех значений параметров внешней среды  $\gamma(t) \in \Gamma_1$  при  $\omega = \omega^*$

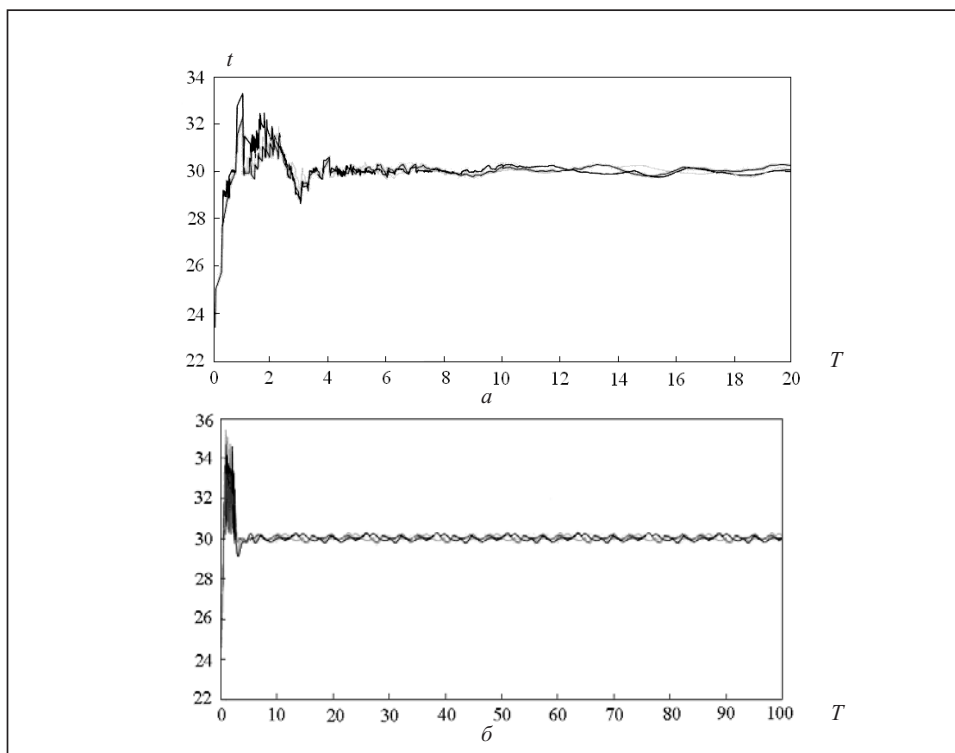


Рис. 3. Графики полученных значений температуры жидкости на выходе теплообменника при начальных распределениях температуры  $u_5^0(x, \tau)$  (а) и  $u_1^0(x, \tau)$  (б) и трех значений параметров внешней среды  $\gamma(t) \in \Gamma_1$  при  $\omega = \omega^*$  на длительном промежутке времени

**Таблица 1.** Зональные значения управляющих параметров

$I$	$\omega_I^*$	$I$	$\omega_I^*$	$I$	$\omega_I^*$	$I$	$\omega_I^*$	$I$	$\omega_I^*$
1, 1	57.954	3, 1	99.018	5, 1	33.052	7, 1	5.2728	9, 1	8.7959
1, 2	49.031	3, 2	90.613	5, 2	4.0541	7, 2	3.3957	9, 2	15.601
1, 3	1.0199	3, 3	30.529	5, 3	32.719	7, 3	5.5885	9, 3	15.090
1, 4	2.2547	3, 4	0.6150	5, 4	32.597	7, 4	5.4864	9, 4	5.8945
1, 5	3.9991	3, 5	2.4801	5, 5	4.0344	7, 5	14.311	9, 5	15.432
1, 6	2.5101	3, 6	0.7897	5, 6	2.4800	7, 6	25.145	9, 6	6.3877
1, 7	1.2115	3, 7	2.5598	5, 7	0.8634	7, 7	15.835	9, 7	0.0047
1, 8	2.6341	3, 8	1.5664	5, 8	4.8750	7, 8	7.0788	9, 8	31.950
1, 9	2.0433	3, 9	38.982	5, 9	17.582	7, 9	6.7330	9, 9	19.610
1, 10	1.1293	3, 10	6.5279	5, 10	3.1818	7, 10	17.480	9, 10	3.4590
2, 1	90.066	4, 1	99.917	6, 1	19.333	8, 1	9.4756	10, 1	12.460
2, 2	91.398	4, 2	35.817	6, 2	21.084	8, 2	4.8995	10, 2	12.427
2, 3	5.2083	4, 3	34.881	6, 3	46.942	8, 3	22.370	10, 3	0.6147
2, 4	1.4118	4, 4	33.762	6, 4	20.811	8, 4	3.2504	10, 4	12.436
2, 5	18.225	4, 5	4.7033	6, 5	1.4484	8, 5	16.920	10, 5	55.899
2, 6	0.9936	4, 6	3.0069	6, 6	11.334	8, 6	16.876	10, 6	18.058
2, 7	2.6675	4, 7	1.6927	6, 7	3.9572	8, 7	20.933	10, 7	45.959
2, 8	0.0001	4, 8	1.0525	6, 8	2.9469	8, 8	2.4923	10, 8	20.423
2, 9	0.1034	4, 9	4.8493	6, 9	0.1861	8, 9	20.862	10, 9	1.7078
2, 10	0.1027	4, 10	0.3743	6, 10	8.6061	8, 10	33.998	10, 10	66.001

Численное решение начально-краевой задачи относительно уравнения (1) проводилось с применением неявной схемы метода сеток с шагами по переменным  $x$  и  $t$ , равными соответственно  $h_x = 0.01$  м и  $h_t = 0.01$ . Для решения задачи оптимизации использовалась процедура (10) при следующих параметрах оптимизации: точность решения одномерной задачи минимизации  $10^{-4}$ , точность решения многомерной задачи минимизации  $10^{-3}$ . Во всех тестовых задачах начальными значениями управляющих параметров является нулевой вектор, т.е.  $\omega^0 = (\omega_{i_1 i_2}^0)_{i_j=1, 2, \dots, 10, j=1, 2} = (0)_{i_j=1, 2, \dots, 10, j=1, 2}$ . Значение целевого функционала в тестовой задаче в начальной точке  $\omega^0$  равно  $J^0 \approx 14085$ .

В табл. 1 приведены зональные значения управляющих параметров, полученные в результате решения задачи оптимизации. Значение целевого функционала в полученной точке  $\omega^*$  равно  $J^* \approx 0.2981$ .

На рис. 1–4 представлены графики изменения температуры жидкости на выходе теплообменника в течение всего процесса нагрева жидкости при параметрах управляющих воздействий  $\omega = \omega^*$ .

Представляют практический интерес результаты анализа, определяющего, насколько робастными являются полученные зональные значения управляющего воздействия. Для этого можно, например, проследить за изменением значения температуры жидкости на выходе теплообменника на более длительном, чем  $[0, T]$  промежутке времени, на котором решалась задача (1)–(5). На рис. 3, б представлен график изменения температуры жидкости на выходе теплообменника в течение промежутка времени  $[0, 5T]$  при одних и тех же значениях управляющих воздействий  $\omega = \omega^*$  для одного начального условия из  $U_0$  и трех значений параметров  $\gamma(t) \in \Gamma_1$ , определяющих температуру внешней среды. На рис. 4

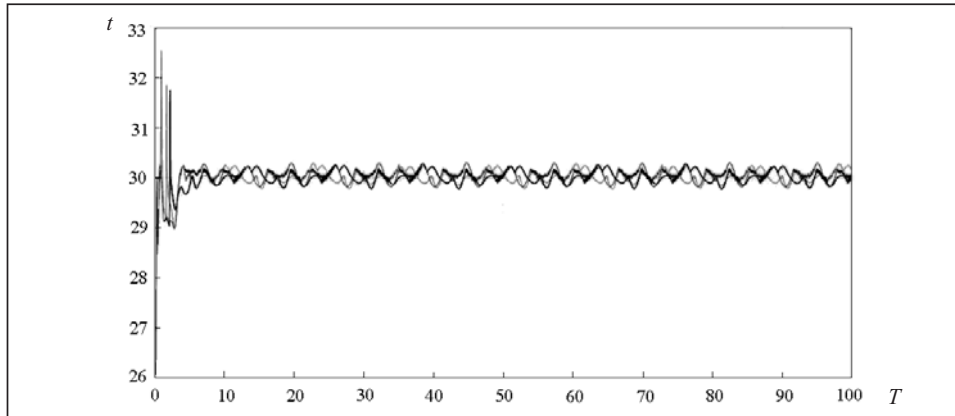


Рис. 4. Графики полученных значений температуры жидкости на выходе теплообменника при начальном распределении температуры  $u^0(x, \tau) = 25 + \cos(2\pi x) \cdot \sin(2\pi x) \notin G_0$  и трех значений параметров внешней среды  $\gamma(t) \in \Gamma_1$  при  $\omega = \omega^*$  на длительном промежутке времени

представлены графики изменения температуры жидкости на выходе теплообменника в течение промежутка времени  $[0, 5T]$  при начальном условии, которое не принадлежит множеству  $U_0$ , и параметрах  $\gamma(t) \in \Gamma_1$  и при тех же значениях управляющих воздействий  $\omega = \omega^*$ . Из этих графиков следует, что полученные управления устойчивы по отношению к изменениям температуры внешней среды.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен подход к оптимальному синтезу управления процессом нагрева обогревательной системой, описываемого гиперболическим уравнением первого порядка. Особенность задачи заключается в наличии неразделенных краевых условий с транспортным запаздыванием во времени на одном из концов. Синтез управления осуществляется на классе зональных управляющих воздействий. Синтезируемые параметры принимают постоянные значения в подобластях множества всевозможных значений состояния процесса в точках контроля (обратной связи).

Предложенные постановка задачи и подход к синтезу управления, методика получения расчетных формул могут быть использованы во многих системах управления и регулирования объектами с распределенными параметрами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. Москва: Наука, 1975. 568 с.
2. Егоров А.И. Основы теории управления. Москва: Физматлит, 2004. 502 с.
3. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. Москва: Наука, 1977. 480 с.
4. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Москва: Мир, 1972. 416 с.
5. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. Москва: Наука, 1971. 424 с.
6. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. Москва: Наука, 1975. 480 с.
7. Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. Москва: Высшая школа, 2009. 677 с.
8. Айда-заде К.Р., Кулиев С.З. Оптимизация размещения и режимов работы скважин нефтепромысла. *Вычислительные технологии*. 2005. Т. 10, № 4. С. 52–62.

9. Айда-заде К.Р., Кулиев С.З. Задача идентификации коэффициента гидравлического сопротивления трубопровода. *Автоматика и телемеханика*. 2016. № 7. С. 123–141.
10. Айда-заде К.Р., Кулиев С.З. Численное решение нелинейных коэффициентно-обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. *Вычислительная математика и математическая физика*. 2011. Т. 51, № 5. С. 858–871.
11. Айда-заде К.Р., Кулиев С.З. О численном решении одного класса обратных задач для разрывных динамических систем. *Автоматика и телемеханика*. 2012. № 5. С. 25–38.
12. Кулиев С.З. Синтез управления в нелинейных системах при различных видах обратной связи и стратегий управления. *Проблемы управления и информатики*. 2013. № 4. С. 63–74.
13. Айда-заде К.Р., Кулиев С.З. Синтез зональных управлений для нелинейных систем с нелинейной обратной связью. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 1. С. 52–65.
14. Рей У. Методы управления технологическими процессами. Москва: Мир, 1983. 368 с.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1977. 735 с.
16. Ашрафова Е.Р., Мамедов В. Численное исследование состояния эволюционных процессов при незадаанных начальных условиях. *Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-мат. наук*. 2013. Т. 33, № 6. С. 30–38.
17. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Москва: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
18. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. Москва: Наука, 1983. 384 с.
19. Габасов Р., Кириллова Ф. Принцип максимума в теории оптимального управления. Москва: Либроком, 2011. 271 с.

*Надійшла до редакції 16.01.2017*

### **С.З. Кулієв**

#### **СИНТЕЗ ЗОНАЛЬНИХ КЕРУВАНЬ ДЛЯ ОДНІЄІ ЗАДАЧІ НАГРІВАННЯ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ У НЕРОЗДІЛЕНИХ КРАЙОВИХ УМОВАХ**

**Анотація.** Розглянуто задачу синтезу керування для об'єктів з розподіленими параметрами з використанням безперервного спостереження за фазовим станом об'єкта в певних його точках на прикладі керування процесом нагрівання трубчастого теплообмінника в паровій сорочці. Для розв'язання цієї задачі синтезу керування запропоновано використовувати чисельні методи першого порядку. Виведено формули для компонентів градієнта цільового функціонала в просторі оптимізованих параметрів. Отримано результати чисельних експериментів.

**Ключові слова:** синтез керування, зональне керування, зворотний зв'язок, розподілена система, трубчастий теплообмінник, градієнт функціонала.

### **S.Z. Guliyev**

#### **ZONAL FEEDBACK CONTROL FOR A HEATING PROBLEM WITH DELAY IN NON-SEPARATED BOUNDARY CONDITIONS**

**Abstract.** We consider the feedback control problem for objects with distributed parameters using continuous observation of the phase state of the object at its certain points by the example of control of the heating process in a tubular heat exchanger in a steam jacket. For numerical solution of the considered feedback control problem, we propose to use first-order numerical methods. For this purpose, we derive formulas for the components of the gradient of the objective functional in the space of the parameters being optimized. The results of the numerical experiments are given.

**Keywords:** control synthesis, zonal control, feedback, distributed system, tubular heat exchanger, gradient of functional.

#### **Кулиев Самир Закирович,**

кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института систем управления НАН Азербайджана, доцент Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, Баку, e-mail: copal@gmail.com.