

МЕТОД И АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНФИГУРАЦИИ ВЕКТОРОВ ПЛОТНОСТИ ТОКОВ В МАГНИТОКАРДИОГРАФИИ

Аннотация. Пространственному распределению величин параметров магнитного поля сердца человека, измеренному в точках плоскости наблюдения, ставится в соответствие распределение вектора плотности токов в плоскости, параллельной плоскости измерений и секущей по отношению сердца. Обратная задача решена с помощью аппарата интегральных преобразований Фурье. Работа алгоритма промоделирована на реальных данных магнитометрических исследований сердца человека.

Ключевые слова: магнитокардиография, обратная задача магнитостатики, преобразование Фурье, фурье-образ, СКВИД-градиентометр.

ВВЕДЕНИЕ

Измерение электромагнитных полей, создаваемых токами в окружающем пространстве, — один из способов получения информации о распределении тока в исследуемом объекте и, таким образом, о самом объекте. Так, регистрация значений параметров магнитного поля на поверхности Земли и их анализ могут дать информацию о подстилающих геологических структурах [1] или состоянии технических объектов (например, трубопроводов). Измеряя параметры магнитного поля над грудной клеткой человека, можно получить (при соответствующей обработке данных) диагностическую информацию о работе сердца (магнитокардиография, МКГ). Магнитокардиография — это один из новых методов диагностики в кардиологии, который предполагает анализ параметров магнитного поля сердца человека, бесконтактно зарегистрированных сверхчувствительной магнитометрической аппаратурой в воздухе над грудной клеткой пациента. Для получения диагностической информации разработаны и применяются магнитометрические системы (магнитокардиографы) на основе сверхпроводниковых квантовых интерференционных датчиков (СКВИД). Высокая чувствительность СКВИД магнитокардиографических измерений, корректное решение обратной задачи магнитостатики (по данным измерений МКГ) для источника биомагнитного сигнала в виде пространственно-временного распределения вектора плотности токов выявляют одну или несколько областей в сердце, которые имеют, например, аномально высокие либо аномально низкие амплитуды плотности тока и/или направления тока, которые не соответствуют физиологическому процессу в сердце «для нормы» в заданный момент времени кардиоцикла. Это позволяет обнаружить и оценить более слабые отклонения от нормы в работе сердца человека на более ранних стадиях (по сравнению с потенциальными методами, например ЭКГ), когда процессы изменения еще обратимы.

Таким образом, интерпретация данных магнитометрических измерений в приведенных задачах связана с решением обратной задачи — нахождением распределения вектора плотности токов по измеренному распределению величин параметров магнитного поля в заданных точках окружающего пространства.

ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В работах [2–4] нами рассмотрены постановка и решение обратной задачи магнитостатики для источника поля в виде одного [2, 3] или N [4] магнитных

диполей. Аналитические методы и алгоритмы решения этой задачи не накладывают ограничений на области применения и могут быть использованы в случае, когда заданная модель источника поля является корректной.

Обоснование модели источника поля — довольно сложная задача и в каждом конкретном случае требует дополнительных исследований. Если пространство V , где известен вектор \mathbf{j} плотности тока, однородно и бесконечно, то вектор $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ магнитной индукции в точке \mathbf{r} окружающего пространства (в воздухе) определяется законом Био–Савара:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV, \quad (1)$$

где $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ — вектор плотности тока в точке \mathbf{r}' .

Известно, что восстановление (нахождение) произвольного трехмерного распределения вектора плотности тока по результатам измерения соответствующего магнитного поля имеет неоднозначный характер. Поэтому в случае трехмерных задач налагают ряд ограничений на распределение тока, например предполагают, что вектор плотности тока имеет двумерную структуру. При таком допущении и соответствующих условиях распределение вектора плотности тока можно однозначно найти по его магнитному полю. Такой подход применим при расчете распределения электрических токов в срезах активной биологической ткани, электронных микросхемах, местах сварки деталей транспортных средств и при исследовании других систем с помощью неразрушающих методов [1].

Итак, предположим, что вектор $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ плотности тока распределен тонким слоем в плоскости XOY , а магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ измеряют в точках, расположенных на расстоянии r_z в плоскости, параллельной плоскости XOY (рис. 1). Полагая распределение тока квазистатическим, а $\text{div } \mathbf{j} = 0$, магнитное поле в точках измерения можно найти, используя закон Био–Савара:

$$B_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[j_x(\mathbf{r})(y - y')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[j_y(\mathbf{r}')(x - x')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV. \quad (2)$$

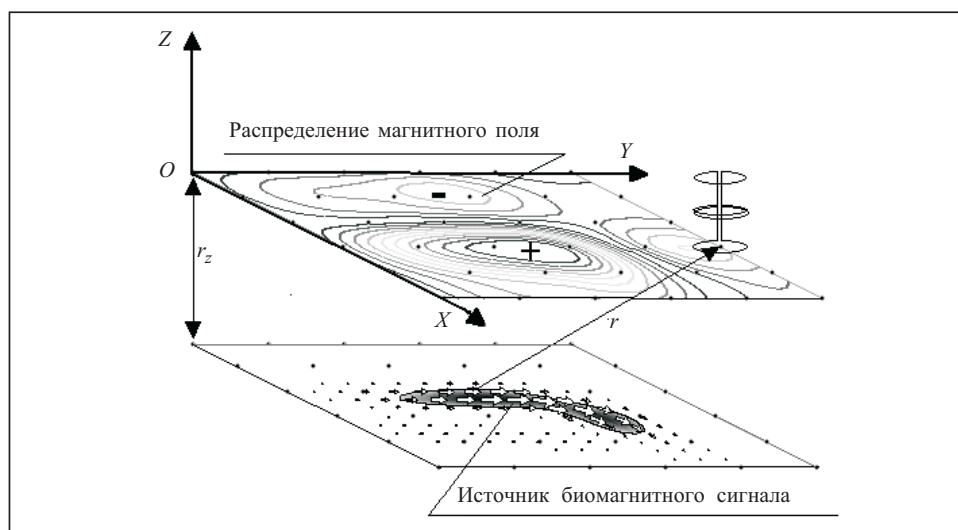


Рис. 1. Схема расположения в пространстве источника поля, плоскости измерений и одного из положений трансформатора магнитного потока измерителя

Тогда обратную задачу можно сформулировать так: считая, что магнитное поле в точках наблюдения (измерения) описывается уравнением (2) и источник поля расположен в плоскости $z = r_z$, требуется найти пространственную конфигурацию плоской системы токов, магнитное поле которой соответствует измеренному.

**АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ
ДЛЯ ИСТОЧНИКА ПОЛЯ В ВИДЕ СИСТЕМЫ ТОКОВ, РАСПРЕДЕЛЕННЫХ
В ПЛОСКОСТИ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ**

Учитывая постановку задачи и раскрывая векторное произведение в (1), выражение для составляющей поля, например B_x , в точке наблюдения можно записать в виде

$$B_x(x, y, z) = \frac{\mu_0 r_z}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j_y(x', y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + r_z^2]^{3/2}} dx' dy'. \quad (3)$$

Применим к левой и правой частям (3) двойное преобразование Фурье, которое определяется следующим образом [5]:

прямое преобразование:

$$f(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) \exp(-ik_x x - ik_y y) dx dy; \quad (4)$$

обратное преобразование:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k_x, k_y, z) \exp(ik_x x + ik_y y) dk_x dk_y. \quad (5)$$

В (4), (5) $f(x, y, z)$ и $f(k_x, k_y, z)$ — функция координат и ее фурье-образ; k_x и k_y — компоненты волнового вектора k .

Далее, согласно теореме о свертке [5] из уравнения (3) следует, что фурье-образы составляющих вектора магнитной индукции и вектора плотности тока связаны соотношением

$$b_x(k_x, k_y, r_z) = g(k_x, k_y, r_z) j_y(k_x, k_y),$$

где $b_x(k_x, k_y, r_z) = F[B_x]$ и $j_y(k_x, k_y) = F[j_y]$ — фурье-образы компоненты магнитного поля и вектора плотности тока соответственно, $g(k_x, k_y, r_z)$ — фурье-образ функции Грина $g(x-x', y-y', r_z) = g(\mathbf{r})$,

$$g(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 r_z}{4\pi} \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + r_z^2]^{3/2}}. \quad (6)$$

Применяя прямое преобразование Фурье к (6), получаем следующее выражение для фурье-образа функции Грина:

$$g(\mathbf{r}) \Rightarrow g(k_x, k_y, r_z) = (\mu_0 / 2) \exp(-kr_z),$$

где $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ — модуль волнового вектора.

Раскрывая векторное произведение (1) и применяя прямое преобразование Фурье, аналогично можно получить выражения и для других составляющих вектора поля в волновой плоскости:

$$F[B_y] = b_y(k_x, k_y, r_z) = -(\mu_0 / 2) \exp(-k \cdot r_z) F[i_j];$$

$$F[B_z] = b_z(k_x, k_y, r_z) = i(\mu_0 / 2) \exp(-k \cdot r_z) \left(\frac{k_y}{k} F[j_x] - \frac{k_x}{k} F[j_y] \right). \quad (7)$$

В практических задачах наиболее часто измеряемой величиной является z — компонента вектора магнитной индукции поля, которая, как видно из (7), зависит от линейной комбинации составляющих j_x и j_y вектора плотности тока. Учитывая уравнение непрерывности тока $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и применяя двойное интегральное преобразование Фурье, в волновой плоскости получим

$$-i \cdot k_x \cdot F[j_x] - i \cdot k_y \cdot F[j_y] = 0.$$

Таким образом, составляющие вектора плотности тока в волновой плоскости получим по «измеренным» значениям $F[B_z]$ из следующих алгебраических выражений:

$$F[j_x] = g_x \cdot F[B_z], \quad (8)$$

$$F[j_y] = g_y \cdot F[B_z], \quad (9)$$

$$g_x = -i \cdot 4\pi / \mu_0 \exp(k \cdot r_z) \cdot k_y / 2k,$$

$$g_y = i \cdot 4\pi / \mu_0 \exp(k \cdot r_z) \cdot k_x / 2k.$$

Если известны координата r_z и фурье-образ z -й составляющей вектора магнитной индукции, то, применяя обратное преобразование Фурье, можно определить значения составляющих вектора плотности тока в заданной системе координат XYZ .

Итак, восстановление пространственной структуры вектора плотности токов в плоскости будет однозначным, если в (8), (9) известен параметр r_z — расстояние (координата) между плоскостью измерений и плоскостью, в которой определяют вектор плотности тока. Если такой подход используют в задачах неразрушающего контроля, то координата r_z известна (может быть определена прямым измерением). При исследовании активности мозга (магнитоэнцефалография, МЭГ) координату r_z иногда можно найти, используя данные томографии (координаты патологического фокуса, если они определены).

В магнитокардиографии (МКГ) в [6] используется алгоритм, включающий два этапа:

1) анализируется пространственное распределение параметров магнитного поля в плоскости измерений, выделяются точки, по отношению к которым выполняется аналитическое решение обратной задачи и локализуется «эффективный» источник поля [3];

2) на глубине «эффективного» источника (координата r_z) располагается плоскость, которая является «секущей» по отношению к сердцу и параллельной плоскости измерений. В этой плоскости (в сердце) с помощью двойного интегрального преобразования Фурье определяется пространственная конфигурация системы векторов плотности тока.

Такой пошаговый алгоритм при исследовании МКГ уже реализован при создании программно-инструментальных средств магнитокардиографа [7, 8]. Данный подход позволяет реальный электрофизиологический процесс, происходящий в сердце человека, свести к анализу его «образа» в виде пространственного распределения вектора плотности токов в плоскости, параллельной плоскости измерений, которая является секущей по отношению к сердцу.

ОСОБЕННОСТИ МАГНИТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ, УЧЕТ ВЛИЯНИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТРАНСФОРМАТОРОВ МАГНИТНОГО ПОТОКА

Алгоритм решения обратной задачи магнитостатики для модели источника поля (в данном случае двумерный слой тока) определяется как математическим методом, так и способом измерения параметров его магнитного поля. Суть состоит в том, что при выполнении измерений СКВИД регистрирует магнитное поле не непосредственно, а косвенно с использованием петли, например, из сверхпроводящей проволоки, называемой трансформатором (или преобразователем) магнитного потока (см. рис. 1). В задачах, где источник измеряемого поля является «внешним» и принципиально не может быть экранирован сверхпроводящим экраном (как, например, в магнитокардиографии при регистрации величин параметров магнитного поля сердца), основным методом борьбы с помехами является реализация приемной катушки трансформатора потока в виде градиентометра первого или более высоких порядков [1]. Другими словами, приемная катушка СКВИД-датчика представляет собой набор идентичных витков, расположенных на некотором расстоянии один от другого и включенных навстречу друг другу. Магнитное поле от далеко расположенных источников (в том числе и от источников помех) является относительно однородным и, следовательно, создает в витках равные по величине и противоположные по направлению потоки. Близко расположенные источники (расстояние до точки измерения сравнимо с расстоянием между витками) дают разные потоки через витки и ненулевой полный поток, который и фиксируется магнитометрической системой.

Будем считать, как и ранее, что начало декартовой системы координат XYZ находится в объеме источника магнитного поля (для определенности — в сердце человека), а направление оси OZ совпадает с направлением нормали к поверхности плоскости с распределением вектора плотности токов. Тогда большинство существующих конструкций трансформаторов магнитного потока СКВИД-градиентометрической системы (одноканальной или многоканальной) можно разделить на две группы.

1. Все приемные катушки градиентометра расположены в плоскости $z = z_0$ (z_0 — координата плоскости измерений) и могут быть выполнены в планарной технологии, в том числе и на основе высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП). В этом случае трансформаторы магнитного потока включены по одной из следующих схем:

$$d_{lx} = B_z(x-l, y, z_0) - B_z(x+l, y, z_0);$$

$$d_{ly} = B_z(x, y-l, z_0) - B_z(x, y+l, z_0),$$

где d_{lx} и d_{ly} пропорциональны выходному сигналу СКВИД-градиентометра и определяются соответствующей разностью компонент магнитного поля, созданного источником в точке наблюдения; l — расстояние («база») между витками трансформатора потока по оси X и Y соответственно.

2. Приемные катушки градиентометра расположены вдоль оси OZ в плоскостях $z = z_0$, $z = z_0 + l$, $z = z_0 + 2l$ и соединены таким образом, что выходной сигнал датчика пропорционален величинам

$$d_{1z} = B_z(x, y, z_0) - B_z(x, y, z_0 + l) \quad (10)$$

или

$$d_{2z} = B_z(x, y, z_0) - 2B_z(x, y, z_0 + l) + B_z(x, y, z_0 + 2l). \quad (11)$$

Если выходной сигнал градиентометра связан с направлением, ортогональным нормали к плоскости $z = z_0$ и пропорционален

$$d_{1zx} = B_x(x, y, z_0) - B_x(x, y, z_0 + l)$$

или

$$d_{1xx} = B_x(x-l, y, z_0) - B_x(x+l, y, z_0),$$

то обработка данных согласно предлагаемому алгоритму имеет подобную структуру как и для двух выделенных групп СКВИД-градиентометров.

Как было отмечено, при исследовании магнитного поля сердца человека на первом шаге анализируется пространственное распределение параметров магнитного поля в плоскости измерений, выделяются точки, относительно которых выполняется аналитическое решение обратной задачи и локализуется «эффективный» магнитный источник [4]. Если в качестве модели источника биомагнитного сигнала использовать модель магнитного диполя, то решение обратной задачи можно получить аналитически. Идея аналитического метода решения обратной задачи основана на использовании свойств тензора пространственных производных вектора \mathbf{B} магнитной индукции в однородной, немагнитной, непроводящей среде (в точках измерения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, $\operatorname{curl} \mathbf{B} = 0$). В этом случае тензоры первых (D_1) и вторых (D_{2i} , $i = x, y, z$) пространственных производных вектора \mathbf{B} симметричны, не имеют следа и обладают следующими свойствами: их собственные значения вещественны и различны; собственные векторы независимы и ортогональны; в системе координат, базисом которой служат собственные векторы, тензоры имеют диагональный вид. Другими словами, если в качестве базиса новой системы координат принять нормированные собственные векторы тензора D_1 или D_2 , можно получить аналитическое решение обратной задачи сначала в собственной системе координат, а затем обратным переходом — в заданной системе. Исследования в [2, 3] показывают, что для полного аналитического решения обратной задачи магнитостатики в такой постановке (источник — магнитный диполь) необходима магнитометрическая система, которая позволила бы измерить одновременно в одной точке наблюдения все независимые элементы тензоров D_1 или D_{2i} . Если магнитометрическая система состоит из градиентометров первого порядка, то независимыми будут пять элементов тензора: три недиагональных ($\partial B_x / \partial y$, $\partial B_x / \partial z$, $\partial B_y / \partial z$) и два диагональных ($\partial B_x / \partial x$, $\partial B_y / \partial y$). Чтобы определить расстояние до источника, необходимо знать также значение компоненты B_x . Таким образом, для локализации дипольного источника сигнала требуется 6-канальная магнитометрическая система. В [2, 3] также показано, что задача решается полностью аналитически, если известны (измерены) пять независимых элементов одного из тензоров D_{2i} и соответствующая первая производная. Для локализации диполя в этом случае достаточно использовать 6-канальную магнитометрическую систему.

Поскольку для измерения величин параметров магнитного поля сердца (в данном случае в открытом пространстве) применяют магнитокардиографы на основе СКВИД-градиентометров второго порядка с аксиальными трансформаторами магнитного потока, то результаты измерений в заданных точках плоскости однородны и не соответствуют исходным данным для аналитического решения обратной задачи (вектор магнитной индукции и его пространственные производные первого и второго порядков). Поэтому эти величины необходимо определить по результатам измерений с учетом пространственной конфигурации преобразователя магнитного потока и особенностей алгоритма измерений. Другими словами, в процессе предварительной обработки данных измерений необходимо решить следующую задачу: по результатам измерений биомагнитного сигнала $B_s = \{d_{1z}, d_{1x}, d_{1y}, d_{1zx}, d_{1xx}, d_{2z}\}$ в узлах (точках измерения) плоской регулярной решетки «восстановить» значения z -й составляющей вектора магнитной индукции с учетом конструкции трансформатора магнитного потока СКВИД-градиен-

тометра, определить значения компонент B_x, B_y вектора \mathbf{B} , его первых ($D_1; D_{1ij} = \partial B_i / \partial r_j, i, j = x, y, z$) и (или) вторых ($D_{2x}, D_{2y}, D_{2z}; D_{2zij} = \partial^2 B_z / \partial r_i \partial r_j$) пространственных производных в каждой точке наблюдения.

Так как магнитное поле произвольной системы токов, ограниченное поверхностью S , не имеет точек разрыва на протяжении всего пространства вне объема источника и силовые линии магнитного поля всегда замкнуты, то интеграл от любого перечисленного параметра биомагнитного сигнала в плоскости $z = z_0$ равен нулю (предполагая, что размеры плоскости не ограничены). Поэтому существует фурье-образ $F[B_s]$, и его значения в заданных точках волновой плоскости $(k_x, k_y, 0)$ можно найти с помощью двойного интегрального преобразования Фурье. Учитывая ряд особенностей и условий определения B_s , получаем выражения фурье-образов величин d_{1x}, d_{1y}, d_{1xx} , связанные с фурье-образом соответствующей компоненты вектора магнитной индукции простыми соотношениями:

$$\begin{aligned} F[B_z] &= 2iF[d_{1x}] / \sin(k_x \cdot l) = 2iF[d_{1y}] / \sin(k_y \cdot l); \\ F[B_x] &= 2iF[d_{1xx}] / \sin(k_x \cdot l), \quad k_x, k_y \neq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично используя формулы преобразования Фурье и принятые условия, получаем следующие выражения для фурье-образа составляющей вектора магнитной индукции:

$$\begin{aligned} F[B_z] &= F[d_{1z}] / [1 - \exp(-k \cdot l)] = F[d_{2z}] / [1 - 2\exp(-k \cdot l) + \exp(-2k \cdot l)]; \\ F[B_x] &= F[d_{1zx}] / [1 - \exp(-k \cdot l)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Выполнив обратное преобразование Фурье, получим в тех же точках плоскости измерений значения B_z или B_x в явном виде с учетом вклада в полезный сигнал всех катушек трансформатора потока.

Полученной информации достаточно для решения второй части поставленной задачи — определения величин $B_x, B_y, B_z, \partial B_i / \partial r_j, \partial^2 B_z / \partial r_i \partial r_j$. Поскольку измерения выполняются в однородной, немагнитной, непроводящей среде, то тензоры $D_1, D_{2x}, D_{2y}, D_{2z}$ пространственных производных вектора магнитной индукции симметричны и для вектора магнитной индукции справедливы уравнения Максвелла $\text{curl } \mathbf{B} = 0, \text{div } \mathbf{B} = 0$. Отсюда следует, что фурье-образы составляющих этого вектора линейно зависимы и определяются с помощью значений $F[B_z]$ (или $F[B_x]$ в случае (12), (13)) исходя из простых алгебраических соотношений:

$$\begin{aligned} F[dB_z / dx] &= ik_x F[B_z], \\ F[dB_z / dy] &= ik_y F[B_z], \\ F[dB_z / dz] &= -ik F[B_z], \\ ik_x F[B_x] + ik_y F[B_y] - ik F[B_z] &= 0, \\ ik_x F[B_z] - k_x F[B_x] &= 0, \\ -ik_y F[B_z] - ik F[B_y] &= 0, \\ ik_y F[B_x] - ik_x F[B_y] &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда в волновой плоскости получаем

$$\begin{aligned} F[\partial B_x / \partial x] &= k_x^2 F[B_z] / k, \quad F[\partial B_y / \partial y] = k_y^2 F[B_z] / k, \\ F[\partial B_x / \partial y] &= k_x k_y F[B_z] / k, \quad F[\partial B_x / \partial z] = ik_x F[B_z], \end{aligned}$$

$$F[\partial B_y / \partial z] = ik_y F[B_z], \quad F[\partial^2 B_z / \partial x^2] = -k_x^2 F[B_z],$$

$$F[\partial^2 B_z / \partial y^2] = -k_y^2 F[B_z], \quad F[\partial^2 B_z / \partial x \partial y] = -k_x k_y F[B_z],$$

$$F[\partial^2 B_z / \partial x \partial z] = -ik_x F[B_z], \quad F[\partial^2 B_z / \partial y \partial z] = -ik_y F[B_z].$$

Таким образом, выполнив обратное преобразование Фурье в заданных точках плоскости наблюдений, будем иметь измеренные значения биомагнитного сигнала, составляющие B_x, B_y, B_z вектора магнитной индукции и их пространственные производные первого и второго порядков, а также значения фурье-образов этих величин в точках волновой плоскости $(k_x, k_y, 0)$. Это дает полное решение поставленной задачи.

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА В МАГНИТОКАРДИОГРАФИИ

Принципиальная схема алгоритма обработки магнитного сигнала сердца человека показана на рис. 2. Схема алгоритма преобразования магнитометрической информации показана в предположении, что измерителем параметров магнитного поля сердца является СКВИД-градиентометр второго порядка с аксиальным трансформатором магнитного потока (выходной сигнал соответствует d_{2z}). Его особенность заключается в том, что при определении параметров биомагнитного источника в дипольном приближении и в модели плоского слоя токов используются аналитические (точные) выражения, за исключением этапов алгоритма, связанных с вычислением величин при переходах «система координат XYZ — волновая плоскость» и «волновая плоскость — система координат XYZ».

Первый такой переход выполняется при вычислении фурье-образа z -й составляющей вектора магнитной индукции. Возникающая при этом систематическая погрешность в значительной степени обусловлена тем, что биомагнитный сигнал измерен в ограниченной области плоскости $z = z_0$. Таким образом, для уменьшения погрешности вычислений необходимо корректно учитывать значения магнитного поля за пределами области наблюдения.

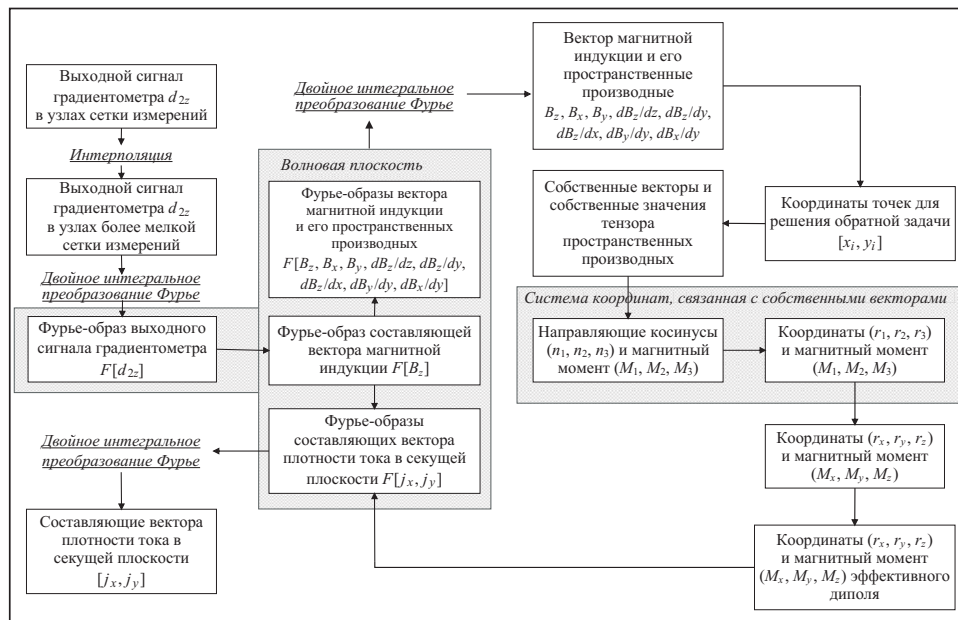


Рис. 2. Структурная схема алгоритма локализации дипольного источника кардиомагнитного сигнала и восстановления источника поля в виде двумерного распределения вектора плотности токов

Как показано в [9], амплитуда биомагнитного сигнала приближается к нулю (убывает практически до нуля) за пределами области наблюдения на расстоянии, равном тройному размеру сетки измерений. Используя значения поля на границах области наблюдения в предположении линейного закона убывания сигнала, можно вычислить аналитически интегралы, с помощью которых и скорректировать значения фурье-образов магнитного поля.

Можно использовать также другой подход. Значения $F[B_z]$ являются «измеренными» величинами и при решении системы уравнений (8), (9). Тогда в соответствии с дипольной моделью источника сигнала, принятой на первом этапе решения задачи, будем считать, что во всех точках вне области наблюдения магнитное поле совпадает с полем диполя, параметры которого найдены в результате решения обратной задачи. Вычислив эти значения с учетом конструктивных параметров трансформаторов магнитного потока СКВИД-датчика и учитывая их при переходе в волновую плоскость, получаем практически точные значения фурье-образов магнитного поля.

Фурье-образ измеренного сигнала B_s можно найти аналитически, выполнив следующие шаги.

1. Разбиваем плоскость измерений на N_{ij} элементарных площадок со стороны L (i, j — число разбиений вдоль осей OX и OY соответственно).

2. Считаем, что в пределах «элементарной» площадки значение $B_{s_{ij}}$ постоянно. Используя (4), фурье-образ измеренных данных B_s (для площадки с номером i, j) можно получить аналитически в следующем виде:

$$F[B_{s_{ij}}] = 4 \cdot B_{s_{ij}} \cdot \exp[-i \cdot k_x x_i - i \cdot k_y y_i] \frac{\sin(k_x \cdot L/2) \cdot \sin(k_y \cdot L/2)}{k_x k_y}$$

при $k_x, k_y \neq 0$;

$$F[B_{s_{ij}}] = 2 \cdot B_{s_{ij}} \cdot \exp[-i \cdot k_x x_i] \cdot L \cdot \frac{\sin(k_x \cdot L/2)}{k_x}$$

при $k_y = 0, k_x \neq 0$;

$$F[B_{s_{ij}}] = B_{s_{ij}} \cdot L^2$$

при $k_x, k_y = 0$.

3. Зная конструкцию трансформаторов потока, с использованием, например, соотношений (10), (11) можно найти фурье-образ B_z ($F[B_z]$) в точке измерения.

При вычислении фурье-образов составляющих вектора плотности токов (8), (9), необходимо учитывать, что параметры магнитного поля измеряют СКВИД-градиентометром, имеющим трансформатор магнитного потока с радиусом R ($R = 0.8 \div 1.5$ см) витка. Это значит, что параметры $g_x(k)$, $g_y(k)$ необходимо уточнить с учетом размеров витков.

Действительно, магнитный поток через приемную катушку в волновой плоскости можно представить сверткой площади катушки и вектора магнитной индукции. Рассмотрим круговую катушку, расположенную в плоскости XOY . Для любой точки в плоскости определим функцию витков $G(x, y)$, равную числу витков катушки, окружающих точку (x, y) . Если катушка состоит из N одинаковых витков (диаметром самого провода пренебрегаем), расположенных симметрично относительно начала координат, то функция витков будет иметь вид

$$G(\rho) = N, \quad \rho < R, \tag{14}$$

$$G(\rho) = 0, \quad \rho > R,$$

где ρ — радиальная координата в плоскости XY ; R — радиус витка.

Используя функцию витков (14), можно выразить магнитный поток $\Phi_\rho(x, y)$ через приемную катушку в следующем виде:

$$\Phi_\rho(x, y) = \int_{-\infty - \infty}^{+\infty + \infty} \int G(x - x', y - y') B(x', y') dx' dy'.$$

Согласно теореме свертка двух функций может быть записана в виде произведения их фурье-образов

$$\Phi_\rho(k_x, k_y) = G(k_x, k_y) B(k_x, k_y), \quad (15)$$

где $\Phi_\rho(k_x, k_y)$ и $B(k_x, k_y) = F[B_z]$ — фурье-образы магнитного потока и составляющей вектора магнитной индукции; $G(k_x, k_y)$ — фурье-образ функции витков.

Исходя из (15), свертка вектора магнитного поля с функцией витков эквивалентна фильтрации фурье-образа магнитного поля с помощью функции фильтра. Используя формулу (4), получаем следующие выражения, необходимые для определения фурье-образов вектора плотности тока:

$$g_x = -i4\pi / \mu_0 \exp(kr_z) k_y RN / J_1(kR),$$

$$g_y = i4\pi / \mu_0 \exp(kr_z) k_x RN / J_1(kR),$$

где $i = \sqrt{-1}$; $J_1(kR)$ — функция Бесселя.

Известно, что при малых значениях аргумента функция Бесселя $J_1(kR)$ приблизительно равна $kR/2$ [5, 10], поэтому величина $G(0, 0)$ в (15) равна площади витка πR^2 (или $\pi R^2 N$, если количество витков равно N). В данном случае интерес представляют нули функции Бесселя, так как фурье-образы токов могут обращаться в бесконечность. Ввиду осциллирующего характера функция Бесселя $J_1(kR)$ имеет бесконечно много нулей и первый нуль располагается при $k_1 = 3.83/R$ [5] (второй нуль — при $k_2 = 7.02/R$). Другими словами, свойства функции фильтра тесно связаны с пространственным разрешением катушки трансформатора потока. Обычно R выбирают таким, чтобы сигнал СКВИД был пропорционален магнитному полю. Такая пропорциональность соблюдается лишь в том случае, если магнитное поле практически постоянно по всей площади приемной катушки. А это равносильно требованию, чтобы частоты, дающие значительный вклад в фурье-преобразование магнитного поля, были меньше k_1 . Для выполнения этого условия необходимо, чтобы радиус приемной катушки был намного меньше $3.83/k_{\max}$, где k_{\max} — наибольшая пространственная частота, которую необходимо учитывать в магнитном поле. При решении обратной задачи для источника, связанного с деятельностью сердца, это ограничение снимается. В произвольный момент кардиоцикла можно выделить граничную частоту, выше которой фурье-спектр биомагнитного сигнала практически равен нулю (на уровне точности вычислений). Ее значения не превышают единицы, если задать шаг решетки в волновой плоскости равным $2\pi/L$, где $L = 20$ см — размер области наблюдения, и, следовательно, заведомо меньшим значения $3.83/R$.

В процессе работы с реальными данными важно учитывать присутствие магнитного шума. Поэтому деление на нуль не допускается. Однако если уровень полезного сигнала становится меньше $G(k_x, k_y)$, то некоторые частотные компоненты не могут быть найдены, т.е. часть информации будет потеряна. При определении составляющих вектора плотности тока (применяя обратное преобразование Фурье) возможно усиление шумовых составляющих. Один из вариантов решения этой проблемы — использование в частотной области окна Ханнинга [10].

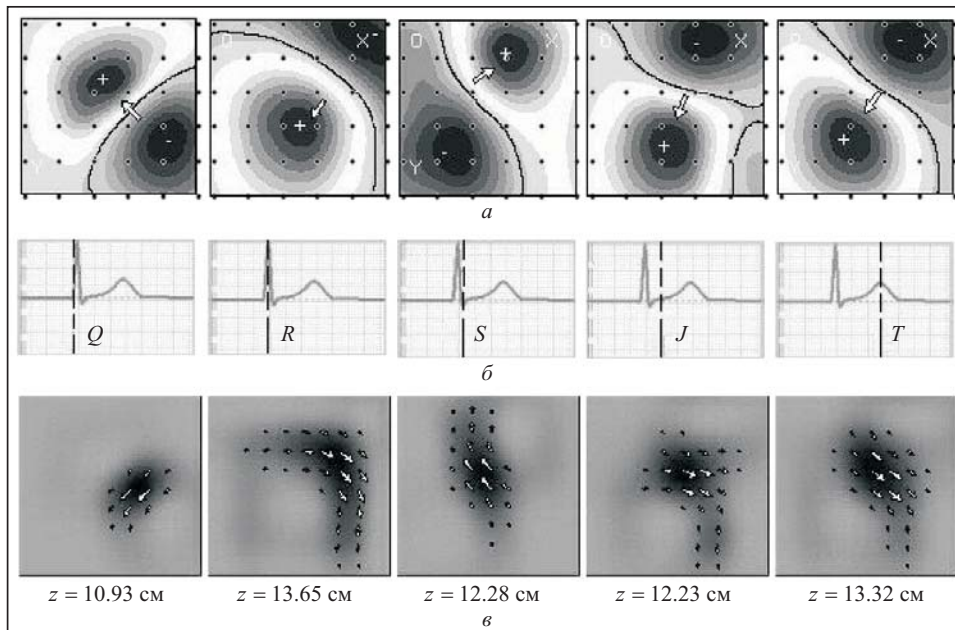


Рис. 3. Пример решения обратной задачи магнитостатики для источника поля в виде двумерного распределения вектора плотности тока

Для восстановления функций по фурье-спектрам поля и плотности тока, которые не имеют особенностей и точек разрыва и заданы во всей области волновой плоскости, где $F[B_z] \neq 0$, предложена следующая схема:

1) разбиваем заданную область волновой плоскости на элементарные площадки, в пределах которых фурье-образ поля можно считать постоянным;

2) для каждой элементарной площадки вычисляем произведение фурье-образа $F[B_z]$ в центре площадки на соответствующий интеграл от функций g_x, g_y ; сумма полученных значений дает интеграл обратного преобразования Фурье для плотности тока;

3) находим аналитически интеграл обратного преобразования Фурье от функций g_x, g_y по элементарной площадке волновой плоскости с центром в точке с текущими координатами $(k_x, k_y, 0)$;

4) по известным значениям $F[B_z]$ в текущей точке волновой плоскости и интегралу от функций g_x, g_y вычисляем значение плотности тока в плоскости измерений с помощью стандартных методик, которые позволяют устранить взаимное влияние соседних областей спектра при коммутативной свертке.

На рис. 3 показаны результаты обработки биомагнитного сигнала, связанного с деятельностью сердца здорового пациента. Исходными данными являются результаты измерений в неэкранированном помещении величин параметров магнитного поля сердца человека, зарегистрированные девятиканальной магнитометрической системой, измерительные каналы которой представляют собой СКВИД-градиентометры второго порядка [8]. Для заданных моментов кардиокомплекса отображено: распределение магнитного поля в плоскости измерений (стрелкой показана проекция источника поля дипольной модели, локализованного в сердце) (рис. 3, а); магнитокардиограмма в одной из точек сетки измерений с отметками моментов времени Q, R, S, J, T , для которых восстановлено распределение токов в сердце (рис. 3, б); пространственная конфигурация системы токов в плоскости, параллельной плоскости измерений, найденная после решения обратной задачи (рис. 3, в); координата z плоскости, которая параллельна плоскости измерений и является секущей для сердца (см. рис. 1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В магнитокардиографии носителем информации о электрофизиологических событиях в сердце являются параметры магнитного поля, значения которых регистрируются бесконтактно над грудной клеткой человека. Применяя новые компьютерные технологии обработки и преобразования магнитометрической информации, можно выявить патологические изменения в сердце на ранних стадиях, когда лечение наиболее эффективно, а процесс развития заболевания является еще обратимым. Разработанные в настоящей статье алгоритмы обработки данных магнитокардиографических измерений реализованы в виде программных блоков и входят в состав программного обеспечения магнитокардиографов, которые используются для исследовательских и диагностических целей. Результаты практического применения этих алгоритмов в программном обеспечении магнитокардиографов [7, 8, 11, 12] позволили решить задачу классификации групп пациентов, прошли публичную апробацию при обсуждении специалистами в области биофизики и кардиологами и получили положительную оценку [13].

Заметим, что предложенные математические модели и методы решения обратной задачи не ориентированы на конкретную магнитометрическую систему и могут быть использованы в любой области приложений, где корректна данная постановка задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fagaly R.L. Superconducting quantum interference device instruments and applications. *Rev. Sci. Instrum.* 2006. Vol. 77. P. 101101-1–101101-45.
2. Примин М.А., Гуменюк-Сычевский В.И., Недайвода И.В. Методы и алгоритмы локализации источника магнитного поля. Киев: Наук. думка, 1992. 92 с.
3. Primin M., Nedayvoda I. Mathematical model and measurement algorithms for a dipole source location. *Int. J. Applied Elektromagn. and Mechanics.* 1997. N 8. P. 119–131.
4. Primin M., Nedayvoda I. Inverse problem solution algorithms in magnetocardiography: new analytical approaches and some results. *Int. J. Applied Elektromagn. and Mechanics.* 2009. Vol. 29, N 2. P. 65–81.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: Наука, 1970. 720 с.
6. Primin M., Gumeniuk-Sychevskij V., Nedayvoda I. Mathematical models and algorithms of information conversion in spatial analysis of weak magnetic fields. *Int. J. Applied Elektromagn. and Mechanics.* 1994. N 5. P. 311–319.
7. Voitovych I.D., Primin M.A., Sosnytskyu V.N. Application of SQUIDS for registration of biomagnetic signals. *Low Temperature Physics.* 2012. Vol. 38. P. 311–320.
8. Primin M., Chaikovskiy I., Berndt C., Nedayvoda I. Layer-to-layer heart electrical image based on magnetocardiography data in comparison with perfusion image based on PET. *Int. J. of Bioelectromagn.* 2003. Vol. 5, N 1. P. 27–28.
9. Maslennikov Yu.V., Primin M.A., Nedayvoda I.V. et al. The DC-SQUID-based magnetocardiographic systems for clinical use. *Physics Procedia.* 2012. Vol. 36. P. 88–93.
10. Roth B., Sepulveda N., Wikswo J., Jr. Using a magnetometer to image a two-dimensional current distribution. *J. Appl. Phys.* 1989. Vol. 65. P. 361–372.
11. Nedayvoda I.V., Primin M.A., Vasylyev V.E., Voytovych I.D. Supersensitive magnetocardiographic system for early identification and monitoring of heart diseases (software). *VCuM.* 2005. № 2. С. 43–56.

12. Primin M.A., Nedaivoda I.V., Maslennikov Yu.V., Gulyaev Yu.V. Software for the magnetocardiographic complex for the early diagnostics and monitoring of heart diseases. *J. of Communications Technology and Electronics*. 2010. Vol. 55, N 10. P. 1169–1186.
13. Chaikovsky I., Primin M., Nedayvoda I., Budnyk M. Magnetocardiography in unshielded setting: heart electrical image based on 2-D and 3-D data in comparison with perfusion image based on PET results-clinical cases. *Coronary artery diseases* (Eds. I. Chaikovsky and N.N. Sydorova), 2012, InTech, Croatia. P. 43–58.

Надійшла до редакції 21.12.2016

М.А. Примін, І.В. Недайвода

**МЕТОД І АЛГОРИТМ ВІДНОВЛЕННЯ ПРОСТОРОВОЇ КОНФІГУРАЦІЇ ВЕКТОРІВ
ГУСТИНИ СТРУМІВ У МАГНІТОКАРДІОГРАФІЇ**

Анотація. Просторовому розподілу величин параметрів магнітного поля серця людини, вимірюваному в точках площини спостережень, поставлено у відповідність розподіл вектора густини струмів у площині, паралельній площині вимірювань, і яка є січною відносно серця. Обернену задачу розв'язано за допомогою апарату інтегральних перетворень Фур'є. Роботу алгоритму промодельовано на реальних даних магнітометричних досліджень серця людини.

Ключові слова: магнітокардіографія, обернена задача магнітостатики, перетворення Фур'є, фур'є-образ, СКВІД-градієнтметр.

M.A. Primin, I.V. Nedayvoda

**THE METHOD AND ALGORITHM TO RECONSTRUCT THE SPATIAL STRUCTURE
OF CURRENT DENSITY VECTORS IN MAGNETOCARDIOGRAPHY**

Abstract. Current density vectors distribution at the plane parallel to the measurement plane and intersecting for heart is associated with the spatial distribution of the values of parameters of magnetic field of human heart, measured in observation plane. Inverse problem is solved with the use of Fourier integral transform. The algorithm is simulated using real data of magnetometric investigations of human heart.

Keywords: magnetocardiography, magnetostatic inverse problem, Furie transformation, Furie image, SQUID-gradiometer.

Примін Михайл Андреевич,

доктор техн. наук, заведуючий відделом Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: d220@meta.ua.

Недайвода Ігорь Владимирович,

научний співробітник Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: d220@meta.ua.