

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. Рассматривается класс обратных задач для параболического уравнения. В частности, к данному классу приводятся краевые задачи с нелокальными условиями. Предлагаемый численный подход основан на применении метода прямых для сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, к решению которой применяется аналог метода переноса краевых условий. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: обратная задача, нелокальные условия, метод прямых, параболическое уравнение, параметрическая идентификация.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование обратных задач математической физики проводится в различных направлениях, и в последние годы количество работ, начиная от теоретических до конкретных прикладных задач, существенно возросло [1–19]. К исследуемым коэффициентно-обратным задачам приводит рассмотренный в работе важный класс краевых задач с нелокальными условиями [16–23]. Нелокальность условий обусловлена невозможностью на практике проводить замеры измеряемых параметров состояния объекта (процесса) мгновенно или в его отдельно взятых точках.

Одним из наиболее распространенных подходов к решению обратных задач является приведение их к вариационным постановкам с дальнейшим использованием методов оптимизации и оптимального управления [8–10]. Применение этого подхода связано во-первых, с проблемами получения формул для градиента функционала вариационной задачи, а во-вторых, с необходимостью использования итерационных методов минимизации функционала.

Другой подход заключается в использовании построения фундаментального решения задачи и приведения ее к интегральному уравнению. В случае, когда фигурирующие в задаче функции имеют общий вид, использованию такого подхода препятствует ряд трудностей [6, 14–16].

Представляет интерес также применение метода сеток (явных или неявных) [24]. Недостатком такого подхода является большая размерность получаемой системы алгебраических уравнений.

В настоящей статье рассматриваются класс коэффициентно-обратных задач и приводимые к этому классу краевые задачи с нелокальными условиями. Наиболее существенным является то, что предлагаемый подход к численному решению исследуемого класса обратных задач не использует итерационных алгоритмов. Отметим, что ранее в работах [8–10] для решения таких задач были использованы аппарат теории оптимального управления и соответствующие численные итерационные методы оптимизации первого порядка.

Другая специфика рассматриваемых классов обратных задач заключается в том, что, во-первых, восстанавливаемые коэффициенты находятся при свободном члене, и, во-вторых, они зависят или только от временной, или только от пространственной координаты. Эта специфика позволяет с помощью метода прямых [25–27] свести решение исходных задач к решению специально построен-

ных задач Коши [28, 29] относительно системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящей статье приводятся результаты численных экспериментов и их анализ.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Рассмотрим коэффициентно-обратную задачу относительно параболического уравнения:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + a_1(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + a_2(x, t)v(x, t) + f(x, t) + F(x, t),$$

$$(x, t) \in \Omega = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}, \quad (1)$$

где

$$F(x, t) = \sum_{s=1}^L B_s(x, t)C_s(x), \quad (2)$$

при следующих начально-краевых условиях и дополнительных условиях:

$$v(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

$$v(0, t) = \psi_0(t), \quad v(l, t) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$v(x, \bar{t}_s) = \varphi_{1s}(x), \quad x \in [0, l], \quad \bar{t}_s \in (0, T], \quad s = 1, \dots, L. \quad (5)$$

Здесь $L > 0$ — заданное целое число; $\bar{t}_s \in (0, T]$, $s = 1, \dots, L$, — заданные моменты времени; заданные функции $a_0(x, t) > 0$, $a_1(x, t)$, $a_2(x, t)$, $f(x, t)$, $B_s(x, t)$, $\varphi_0(x)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\varphi_{1s}(x)$, $s = 1, \dots, L$, равномерно непрерывны и ограничены по x и t ; $B_s(x, t)$ — линейно независимые функции, дифференцируемые по t , причем $a_2(x, t) \leq 0$, $B_s(x, t) \geq 0$, $\frac{\partial B_s(x, t)}{\partial t} \geq 0$. Функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_{1s}(x)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ удовлетворяют условиям согласования:

$$\varphi_0(0) = \psi_0(0), \quad \varphi_0(l) = \psi_1(0), \quad \varphi_{1s}(0) = \psi_0(\bar{t}_s), \quad \varphi_{1s}(l) = \psi_1(\bar{t}_s), \quad s = 1, \dots, L.$$

Задача (1)–(5) заключается в определении неизвестной непрерывной L -мерной вектор-функции $C(x) = (C_1(x), \dots, C_L(x))^*$ и соответствующего решения краевой задачи $v(x, t)$ — дважды непрерывно дифференцируемой по x и один раз непрерывно дифференцируемой по t при $(x, t) \in \Omega$, удовлетворяющих условиям (1)–(5). Известно, что при сделанных выше предположениях обратная задача (1)–(5) имеет решение, причем оно является единственным [11, 12].

Возможен случай коэффициентно-обратной задачи, когда в уравнении (1) функция $F(x, t)$ имеет вид

$$F(x, t) = \sum_{s=1}^L C_s(x, t)B_s(t), \quad (6)$$

где функции $C_s(x, t)$ — заданы, коэффициенты $B_s(t)$ идентифицируются, а вместо дополнительного условия (5) может быть задано, например, условие

$$v(\bar{x}_s, t) = \psi_{2s}(t), \quad \bar{x}_s \in (0, l), \quad t \in [0, T], \quad s = 1, \dots, L. \quad (7)$$

К частному случаю задачи (1)–(5) приводится следующая краевая задача с нелокальным (интегральным) начальным условием:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a_1(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + a_2(x) u(x, t) + \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (8)$$

$$k_1 u(x, 0) + \int_0^T e^{k\tau} u(x, \tau) d\tau = \varphi_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (9)$$

$$u(0, t) = \tilde{\psi}_0(t), \quad u(l, t) = \tilde{\psi}_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

где k, k_1 — заданные постоянные, $\tilde{f}(x, t)$, $\varphi_0(x)$, $\tilde{\psi}_0(t)$, $\tilde{\psi}_1(t)$ — заданные функции. Некоторые частные случаи задачи (8)–(10) рассматривались, например, в работах [17, 18].

Для сведения задачи (8)–(10) к задаче (1)–(5) введем функцию

$$v(x, t) = k_1 u(x, 0) + \int_0^t e^{k\tau} u(x, \tau) d\tau. \quad (11)$$

Дифференцируя (11) по t , имеем

$$u(x, t) = e^{-kt} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}. \quad (12)$$

Из (9)–(12) получим

$$v(x, 0) = k_1 \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t},$$

$$v(0, t) = k_1 \tilde{\psi}_0(0) + \int_0^t e^{k\tau} \tilde{\psi}_0(\tau) d\tau = \psi_2(t),$$

$$v(x, T) = \varphi_0(x),$$

$$v(l, t) = k_1 \tilde{\psi}_1(0) + \int_0^t e^{k\tau} \tilde{\psi}_1(\tau) d\tau = \psi_1(t). \quad (13)$$

Дифференцируя $u(x, t)$ из (12) один раз по t и дважды по x и подставляя результаты в уравнение (8), после некоторых несложных преобразований получаем

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} - a(x) \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial t \partial x^2} - a_1(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t \partial x} - (a_2(x) + k) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - e^{kt} \tilde{f}(x, t) = 0. \quad (14)$$

Интегрируя обе части (14) по t , получаем равенство с точностью до некоторой произвольной функции $C(x)$:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + a_1(x) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + (a_2(x) + k)v(x, t) + f(x, t) + C(x), \quad (15)$$

где $f(x, t) = \int_0^t e^{k\tau} \tilde{f}(x, \tau) d\tau$. Функции $v(x, t)$, $C(x)$ должны удовлетворять уравнению (15) и условиям (13).

Задача (13), (15) отличается от задачи параметрической идентификации (1)–(5) лишь начальным условием при $t=0$.

К виду задачи (1), (3), (4), (6), (7) приводит, например, следующая задача с нелокальным краевым условием:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a_1(t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + a_2(t) u(x, t) + \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (16)$$

$$u(0, t) = \psi_2(t), \quad \int_0^l e^{k\xi} u(\xi, t) d\xi = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (17)$$

$$u(x, 0) = \tilde{\varphi}_0(x), \quad x \in [0, l]. \quad (18)$$

Решение задачи вида (16)–(18) рассмотрено, например, в работах [16, 17].

Для приведения задачи (16)–(18) к виду (1), (3), (4), (6), (7) введем функцию

$$v(x, t) = \int_0^x e^{k\xi} u(\xi, t) d\xi. \quad (19)$$

Дифференцируя (19) по x , получаем

$$u(x, t) = e^{-kx} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}. \quad (20)$$

Дифференцируя (20) один раз по t и дважды по x и подставляя это выражение в (16), после несложных преобразований имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t \partial x} &= a(t) \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} + (a_1(t) - 2ka(t)) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \\ &+ (k^2 a(t) - ka_1(t) + a_2(t)) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + e^{kx} \tilde{f}(x, t). \end{aligned}$$

Интегрируя обе части этого уравнения по x , получаем уравнение с точностью до произвольной функции $B(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} &= a(t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + (a_1(t) - 2ka(t)) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \\ &+ (k^2 a(t) - ka_1(t) + a_2(t)) v(x, t) + f(x, t) + B(t), \end{aligned} \quad (21)$$

при этом использовано обозначение

$$f(x, t) = \int_0^x e^{k\xi} \tilde{f}(\xi, t) d\xi.$$

Из (17)–(20) имеем следующие начальные и краевые условия:

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T]; \quad (22)$$

$$v(x, 0) = \varphi_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (23)$$

где

$$\varphi_0(x) = \int_0^x e^{k\xi} \tilde{\varphi}_0(\xi) d\xi;$$

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = \psi_2(t), \quad t \in [0, T]. \quad (24)$$

Полученная коэффициентно-обратная задача (21)–(24) является частным случаем задачи (1), (3), (4), (6), (7).

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

В настоящей статье предлагается подход к численному решению задач (1)–(5) и (1), (3), (4), (6), (7), основанный на использовании метода прямых. Например, задача (1)–(5) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами.

В области Ω проведем прямые $x_i = ih_x$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h_x = l / N$. На этих прямых определим функции $v_i(t) = v(x_i, t)$ $t \in [0, T]$, $i = 0, 1, \dots, N$, для которых согласно (3)–(5) справедливы

$$v_i(0) = \varphi_0(x_i) = \varphi_{0i}, \quad i = 0, \dots, N, \quad (25)$$

$$v_0(t) = \psi_0(t), \quad v_N(t) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (26)$$

$$v_i(\bar{t}_s) = \varphi_{1s}(x_i) = \varphi_{1s,i}, \quad \bar{t}_s \in (0, T], \quad s = 1, \dots, L, \quad i = 0, \dots, N. \quad (27)$$

На прямых $x = x_i$ аппроксимируем производные $\partial v / \partial x$, $\partial^2 v / \partial x^2$ с использованием центральных разностных схем:

$$\left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \frac{v_{i+1}(t) - v_{i-1}(t)}{2h_x} + O(h_x^2), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (28)$$

$$\left. \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} = \frac{v_{i+1}(t) - 2v_i(t) + v_{i-1}(t)}{2h_x^2} + O(h_x^2), \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (29)$$

Далее используем обозначения

$$a_i(t) = a(x_i, t), \quad \bar{f}_i(t) = f(x_i, t), \quad a_{1i}(t) = a_1(x_i, t), \quad a_{2i}(t) = a_2(x_i, t),$$

$$B_{si}(t) = B_s(x_i, t), \quad C_{si} = C_s(x_i), \quad s = 1, \dots, L, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Подставляя (28), (29) в (1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений $(N-1)$ -го порядка с неизвестным (идентифицируемым) вектором параметров $C_s = (C_{s1}, \dots, C_{s,N-1})^T$:

$$\begin{aligned} v_i'(t) = & \frac{a_i(t)}{h_x^2} [v_{i+1}(t) - 2v_i(t) + v_{i-1}(t)] + \frac{a_{1i}(t)}{2h_x} [v_{i+1}(t) - v_{i-1}(t)] + \\ & + a_{2i}(t)v_i(t) + \bar{f}_i(t) + \sum_{s=1}^L B_{si}(t)C_{si}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Эту систему с учетом (25), (26) можно записать в векторно-матричном виде

$$\dot{v}(t) = A(t)v(t) + f(t) + \sum_{s=1}^L E_{sB}(t)C_s, \quad t \in (0, T], \quad (30)$$

$$v(0) = \varphi_0, \quad (31)$$

$$v(\bar{t}_s) = \varphi_{1s}, \quad s = 1, \dots, L, \quad (32)$$

где $v(t) = (v_1(t), \dots, v_{N-1}(t))^T$, $B_s(t) = (B_{s1}(t), \dots, B_{s, N-1}(t))^T$, $\varphi_0 = (\varphi_{01}, \dots, \varphi_{0, N-1})^T$, $\varphi_{1s} = (\varphi_{1s,1}, \dots, \varphi_{1s, N-1})^T$, $E_{sB(t)}$ — $(N-1)$ -мерная квадратная матрица, в которой i -й элемент главной диагонали равен i -й компоненте вектора $B_s(t)$, т.е. $B_{si}(t)$; все остальные элементы равны нулю. Ненулевые элементы квадратной $(N-1)$ -мерной трехдиагональной матрицы A имеют вид

$$\tilde{a}_{ii}(t) = \frac{1}{h_x^2} [-2a_i(t) + h_x^2 a_{2i}(t)], \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$\tilde{a}_{i, i+1}(t) = \frac{1}{h_x^2} [a_i(t) + \frac{h_x}{2} a_{1i}(t)], \quad i = 1, \dots, N-2,$$

$$\tilde{a}_{i, i-1}(t) = \frac{1}{h_x^2} [a_i(t) - \frac{h_x}{2} a_{1i}(t)], \quad i = 2, \dots, N-1.$$

Вектор $f(t)$ определяется следующим образом:

$$f(t) = \left(\bar{f}_1(t) + \left(\frac{a_1(t)}{h_x^2} - \frac{a_{11}(t)}{2h_x} \right) \psi_0(t), \bar{f}_2(t), \dots, \bar{f}_{N-2}(t), \bar{f}_{N-1}(t) + \left(\frac{a_{N-1}(t)}{h_x^2} + \frac{a_{1, N-1}(t)}{2h_x} \right) \psi_1(t) \right)^T.$$

Задача (30)–(32) при налагаемых условиях на коэффициенты уравнения (1) и функции в начально-краевых условиях аппроксимирует задачу (1)–(5) с точностью $O(h_x^2)$ (вопросы сходимости решения задачи (30)–(32) к решению задачи (1)–(5) и оценки погрешности рассмотрены в работе [30]). Отметим, что погрешность $O(h_x^2)$ можно улучшить за счет использования схем аппроксимации производных по x более высокого порядка [26, 27].

Обозначим $0_{(N-1) \times (N-1)}$ нулевую $(N-1)$ -мерную квадратную матрицу.

Теорема. Пусть $\alpha_s(t)$, $s = 1, \dots, L$, — квадратная матричная, а $\gamma(t)$ — векторная функции размерности $(N-1)$ являются решением задач Коши:

$$\dot{\alpha}_s(t) = A(t)\alpha_s(t) + E_{sB(t)}, \quad s = 1, \dots, L, \quad (33)$$

$$\alpha_s(0) = 0_{(N-1) \times (N-1)}, \quad s = 1, \dots, L, \quad (34)$$

$$\dot{\gamma}(t) = A(t)\gamma(t) + f(t), \quad (35)$$

$$\gamma(0) = \varphi_0. \quad (36)$$

Тогда для произвольного постоянного $(N-1)$ -мерного вектора C_s решением задачи Коши (30), (31) будет следующая вектор-функция:

$$v(t) = \sum_{s=1}^L \alpha_s(t) C_s + \gamma(t). \quad (37)$$

Доказательство. С учетом (34), (36) очевидно, что функция $v(t)$, определенная из (37), для произвольного вектора $C_s \in R^{N-1}$, $s = 1, \dots, L$, удовлетворяет на-

чальному условию (31). Дифференцируя обе части равенства (37) с учетом (33), (35), имеем

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= \sum_{s=1}^L \dot{\alpha}_s(t) C_s + \dot{\gamma}(t) = \sum_{s=1}^L [A(t)\alpha_s(t) + E_{sB(t)}] C_s + [A(t)\gamma(t) + f(t)] = \\ &= A(t) \left(\sum_{s=1}^L \alpha_s(t) C_s + \gamma(t) \right) + \sum_{s=1}^L E_{sB(t)} C_s + f(t) = \\ &= A(t)v(t) + \sum_{s=1}^L E_{sB(t)} C_s + f(t). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $v(t)$ удовлетворяет уравнению (30).

Решив независимо матричную задачу Коши (33), (34) для определения $\alpha_s(t)$, $s=1, \dots, L$, и задачу Коши (35), (36) относительно векторной функции $\gamma(t)$ и используя условие (32) и представление (37), получим равенство

$$v(\bar{t}_s) = \varphi_{1s} = \sum_{s=1}^L \alpha_s(\bar{t}_s) C_s + \gamma(\bar{t}_s), \quad s=1, \dots, L, \quad (38)$$

представляющее собой алгебраическую систему уравнений порядка $(N-1)$, из которой можно определить идентифицируемый вектор C_s , $s=1, \dots, L$.

Далее, используя значения компонент вектора $C_s = (C_s(x_1), \dots, C_s(x_{N-1}))^T$, $s=1, \dots, L$, и применяя определенный метод интерполяции или аппроксимации, можно восстановить искомую функцию $C_s(x)$, $s=1, \dots, L$, на заданном классе функций.

В случае необходимости определения самого решения $v(x, t)$ краевой задачи (1)–(5) достаточно решить задачу Коши (30), (31). Предложенный подход можно аналогичным образом использовать для решения задачи (1), (3), (4), (6), (7).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Приведем результаты решения следующих задач параметрической идентификации.

Задача 1. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} &= x^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + e^t C(x), \quad (x, t) \in \Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq 1\}, \\ v(x, 0) &= x^2 \cos x, \quad v(x, 1) = e x^2 \cos x, \quad x \in [0, 1], \\ v(0, t) &= 0, \quad v(1, t) = e^t \cos 1, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Точным решением данной задачи являются функции

$$C(x) = x^2(x^2 - 1)\cos x + 4x^3 \sin x, \quad v(x, t) = e^t x^2 \cos x.$$

Численные эксперименты проводились при различных числах N прямых $x = x_i$, $i=1, \dots, N$. Для решения вспомогательных задач Коши использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка при различных шагах h_t . Были проведены расчеты при наличии случайных помех в функции $v(x, 1)$, которые определялись следующим образом:

$$v^\sigma(x, 1) = v(x, 1)(1 + \sigma \text{rand}),$$

Таблица 1

| i | x_i | Значение $C(x)$ для задачи 1 | | | | |
|----|-------|------------------------------|--------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
| | | Точное значение | Полученное значение для σ (%) | | | |
| | | | $\sigma = 0,0$ | $\sigma = 1,0$ | $\sigma = 3,0$ | $\sigma = 5,0$ |
| 1 | 0.05 | -0.002466 | -0.002459 | -0.002474 | -0.002504 | -0.002535 |
| 2 | 0.10 | -0.009451 | -0.009427 | -0.009610 | -0.009978 | -0.010345 |
| 3 | 0.15 | -0.019729 | -0.019675 | -0.020085 | -0.020904 | -0.021724 |
| 4 | 0.20 | -0.031277 | -0.031182 | -0.031389 | -0.031803 | -0.032217 |
| 5 | 0.25 | -0.041309 | -0.041165 | -0.039985 | -0.037625 | -0.035264 |
| 6 | 0.30 | -0.046326 | -0.046126 | -0.041688 | -0.032811 | -0.023934 |
| 7 | 0.35 | -0.042170 | -0.041910 | -0.032199 | -0.012779 | 0.006641 |
| 8 | 0.40 | -0.024100 | -0.023778 | -0.007624 | 0.024685 | 0.056993 |
| 9 | 0.45 | 0.013128 | 0.013510 | 0.035243 | 0.078708 | 0.122173 |
| 10 | 0.50 | 0.075166 | 0.075603 | 0.098996 | 0.145783 | 0.192570 |
| 11 | 0.55 | 0.167971 | 0.168454 | 0.186165 | 0.221585 | 0.257006 |
| 12 | 0.60 | 0.297694 | 0.298211 | 0.300125 | 0.303952 | 0.307779 |
| 13 | 0.65 | 0.470558 | 0.471092 | 0.446190 | 0.396386 | 0.346582 |
| 14 | 0.70 | 0.692733 | 0.693263 | 0.632543 | 0.511105 | 0.389666 |
| 15 | 0.75 | 0.970201 | 0.970703 | 0.870646 | 0.670534 | 0.470421 |
| 16 | 0.80 | 1.308624 | 1.309067 | 1.174817 | 0.906317 | 0.637817 |
| 17 | 0.85 | 1.713198 | 1.713549 | 1.560817 | 1.255352 | 0.949888 |
| 18 | 0.90 | 2.188515 | 2.188739 | 2.043520 | 1.753082 | 1.462644 |
| 19 | 0.95 | 2.738424 | 2.738473 | 2.633984 | 2.425005 | 2.216027 |

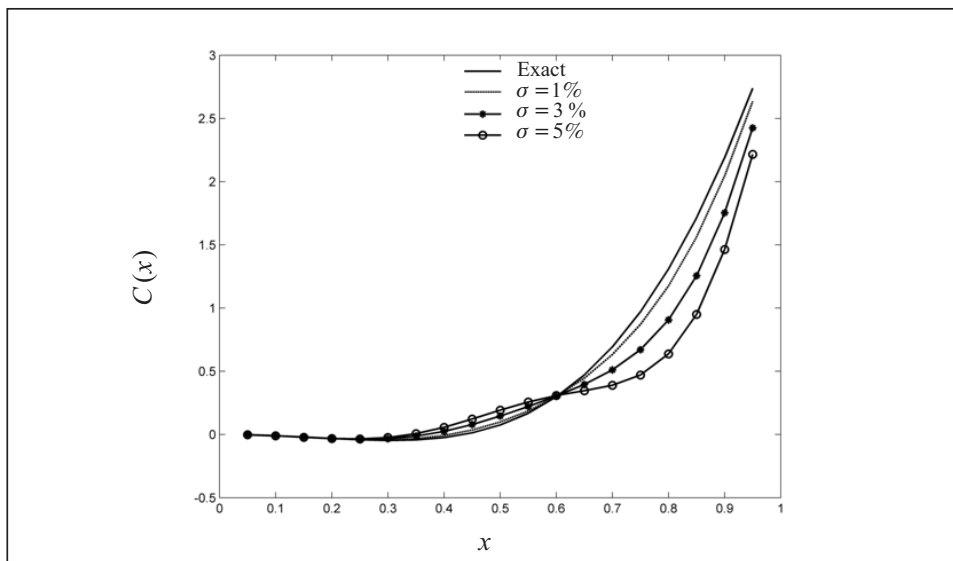


Рис. 1. Графики точного (Exact) и полученного численными методами коэффициента $C(x)$ при различных уровнях шума для задачи 1

где σ — процент уровня шума, rand — случайные числа, сгенерированные с помощью функции MATLAB rand для равномерного распределения на интервале $[-1, 1]$.

В табл. 1 приведены результаты решения задачи 1 при $N = 20$, $h_t = 0.001$ для уровней шума, равных $\sigma = 1\%$, $\sigma = 3\%$ и $\sigma = 5\%$, а также без наличия шума, т.е. $\sigma = 0\%$. На рис. 1 даны графики точного (аналитическое решение) и полученного численными методами (приведенными в разд. 2) коэффициента $C(x)$ при различных уровнях шума σ на основе данных табл. 1 для задачи 1.

Таблица 2

| i | x_i | Значение $C(x)$ для задачи 2 | | | | |
|-----|-------|------------------------------|--------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
| | | Точное значение | Полученное значение для σ (%) | | | |
| | | | $\sigma = 0,0$ | $\sigma = 1,0$ | $\sigma = 2,0$ | $\sigma = 3,0$ |
| 1 | 0.05 | -1.743674 | -1.743183 | -1.926269 | -2.109355 | -2.292442 |
| 2 | 0.10 | -1.479520 | -1.478955 | -1.618075 | -1.757195 | -1.896315 |
| 3 | 0.15 | -1.214737 | -1.214098 | -1.273793 | -1.333488 | -1.393183 |
| 4 | 0.20 | -0.955937 | -0.955225 | -0.913545 | -0.871866 | -0.830186 |
| 5 | 0.25 | -0.708616 | -0.707837 | -0.560934 | -0.414031 | -0.267128 |
| 6 | 0.30 | -0.476853 | -0.476010 | -0.239053 | -0.002096 | 0.234860 |
| 7 | 0.35 | -0.263224 | -0.262322 | 0.033230 | 0.328783 | 0.624335 |
| 8 | 0.40 | -0.068919 | -0.067964 | 0.243995 | 0.555953 | 0.867911 |
| 9 | 0.45 | 0.106028 | 0.107033 | 0.389588 | 0.672144 | 0.954699 |
| 10 | 0.50 | 0.262461 | 0.263511 | 0.474531 | 0.685552 | 0.896572 |
| 11 | 0.55 | 0.401822 | 0.402913 | 0.510222 | 0.617531 | 0.724840 |
| 12 | 0.60 | 0.525907 | 0.527034 | 0.512829 | 0.498623 | 0.484418 |
| 13 | 0.65 | 0.636672 | 0.637834 | 0.500783 | 0.363731 | 0.226679 |
| 14 | 0.70 | 0.736099 | 0.737293 | 0.492252 | 0.247210 | 0.002169 |
| 15 | 0.75 | 0.826093 | 0.827316 | 0.502910 | 0.178504 | -0.145902 |
| 16 | 0.80 | 0.908433 | 0.909689 | 0.544241 | 0.178792 | -0.186656 |
| 17 | 0.85 | 0.984738 | 0.986000 | 0.622436 | 0.258872 | -0.104693 |
| 18 | 0.90 | 1.056458 | 1.057802 | 0.738219 | 0.418636 | 0.099053 |
| 19 | 0.95 | 1.124878 | 1.126169 | 0.886732 | 0.647295 | 0.407859 |

Задача 2. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + e^{2t+x+1} (2x^2 + 1)C(x),$$

$$(x, t) \in \Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq 1\},$$

$$v(x, 0) = e^{x+1} (\sin x + 2x - x^2), \quad v(x, 1) = e^{x+3} (\sin x + 2x - x^2), \quad x \in [0, 1],$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = e^{2t+2} (\sin 1 + 1), \quad t \in [0, 1],$$

где $a(x) = e^x / 2$. Точным решением данной задачи являются функции

$$C(x) = \frac{2(\sin x + 2x - x^2) - a(x)(2 \cos x + 2 - 2x - x^2)}{2x^2 + 1},$$

$$v(x, t) = e^{2t+x+1} (\sin x + 2x - x^2).$$

В табл. 2 приведены результаты решения задачи 2 при $N = 20$, $h_t = 0.001$ для уровней шума, равных $\sigma = 1\%$, $\sigma = 2\%$ и $\sigma = 3\%$, а также без наличия шума, т.е. $\sigma = 0\%$. На рис. 2 даны графики точного (аналитическое решение) и полученного численными методами коэффициента $C(x)$ при различных уровнях шума σ на основе данных табл. 2 для задачи 2.

Точность решения обратных задач, как и следовало ожидать, существенно зависит от числа используемых прямых N в методе прямых для аппроксимации исходной краевой задачи.

В задаче определения $C(x)$ увеличение числа прямых приводит к увеличению порядка системы дифференциальных уравнений с обыкновенными произ-

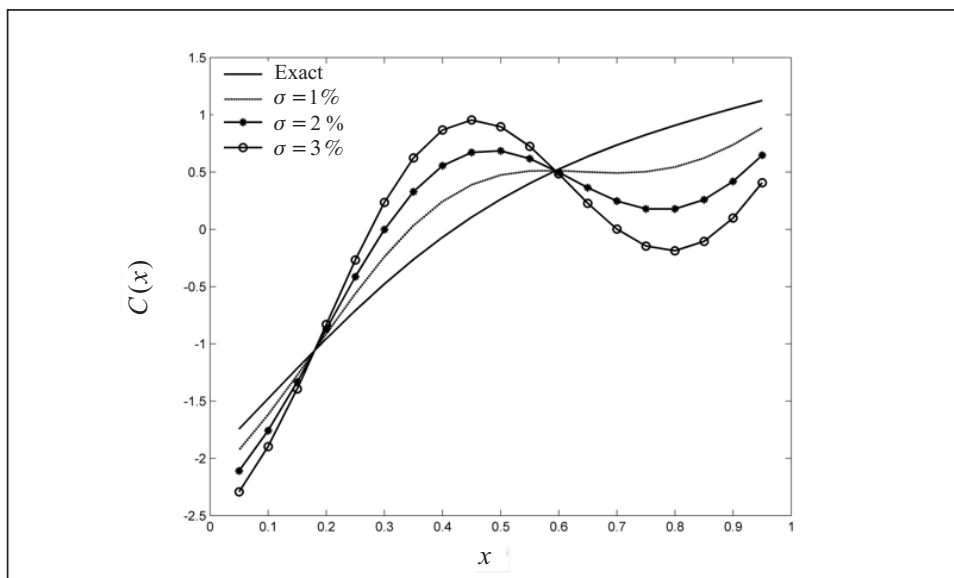


Рис. 2. Графики точного (Ехact) и полученного численными методами коэффициента $C(x)$ при различных уровнях шума для задачи 2

водными, равной N^2 . Это вызывает существенное увеличение объема вычислений, а следовательно и увеличение погрешности вычислительного характера. Поэтому при решении конкретной задачи идентификации коэффициента $C(x)$ для выбора числа прямых необходимо провести дополнительный численный анализ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемые в настоящей работе численные методы решения задач параметрической идентификации для параболического уравнения целесообразны, поскольку они приводятся к решению вспомогательных, хорошо исследованных задач Коши и не требуют построения итерационных процедур. Для этого может быть использовано стандартное программное обеспечение, в частности MATLAB. К рассмотренным классам задач сводятся часто встречающиеся на практике задачи с нелокальными начальными и граничными условиями.

Важно отметить, что предлагаемая методика построения численных методов может быть использована для других типов уравнений с частными производными с другими заданными видами начально-краевых условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cannon J.R., Duchateau P. Structural identification of an unknown source term in a heat equation. *Inverse Problems*. 1998. V. 14. P. 535–551.
2. Fatullayev A.G. Numerical solution of the inverse problem of determining an unknown source term in a two-dimensional heat equation. *Appl. Math. Comput.* 2004. Vol. 152. P. 659–666.
3. Liu C.-S. An two-stage LGSM to identify time dependent heat source through an internal measurement of temperature. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2009. Vol. 52. P. 1635–1642.
4. Liu C.-S. A Lie-group shooting method for reconstructing a past time-dependent heat source. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2012. Vol. 55. P. 1773–1781.

5. Yang L., Deng Z.-C., Yu J.-N., and Luo G.-W. Optimization method for the inverse problem of reconstructing the source term in a parabolic equation. *Math. Comput. Simul.* 2009. Vol. 80. P. 314–326.
6. Farcas A. and Lesnic D., The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable. *J. Eng. Math.* 2006. Vol. 54. P. 375–388.
7. Ling L., Yamamoto M., and Hon Y.C. Identification of source locations in two-dimensional heat equations. *Inverse Problems.* 2006. Vol. 22. P. 1289–1305.
8. Johansson T. and Lesnic D. A variational method for identifying a spacewise-dependent heat source. *IMA J. Appl. Math.* 2007. Vol. 72. P. 748–760.
9. Hasanov A. Identification of spacewise and time dependent source terms in 1D heat conduction equation from temperature measurement at a final time. *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2012. Vol. 55. P. 2069–2080.
10. Hasanov A. An inverse source problem with single Dirichlet type measured output data for a linear parabolic equation. *Appl. Math. Lett.* 2011. Vol. 24. P. 1269–1273.
11. Прилепко А.И., Костин А.Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением. *Матем. сб.* 1992. Т. 183, № 4. С. 49–68.
12. Саватеев Е.Г. О задаче идентификации коэффициента параболического уравнения. *Сиб. матем. журн.* 1995. Т. 36, № 1. С. 177–185.
13. Ivanchov M.I. The inverse problem of determining the heat source power for a parabolic equation under arbitrary boundary conditions. *Journal of Mathematical Sciences.* 1998. Vol. 88, N 3. P. 432–436.
14. Yan L., Fu C.L., and Yang F.L. The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem. *Eng. Anal. Boundary Elements.* 2008. Vol. 32. P. 216–222.
15. Ahmadabadi M. Nili, Arab M., Maalek Ghaini F.M. The method of fundamental solutions for the inverse space-dependent heat source problem. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2009. Vol. 33. P. 1231–1235.
16. Ismailov M.I., Kanca F., and Lesnic D., Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions. *Appl. Math. Comput.* 2011. Vol. 218. P. 4138–4146.
17. Пулькина Л.С. Об одном классе нелокальных задач и их связи с обратными задачами. Тр. Третьей Всерос. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Математическое моделирование и краевые задачи». Ч. 3. Самара: Изд. СамГТУ, 2006. С. 190–192.
18. Камынин В.Л. Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения. *Матем. заметки.* 2005. Т. 77, № 4, С. 522–534.
19. Прилепко А.И., Ткаченко Д.С. Корректность обратной задачи об источнике для параболических систем. *Дифференциальные уравнения.* 2004. Т. 40, № 11. С. 1540–1547.
20. Mohebbia A., Abbasia M. A fourth-order compact difference scheme for the parabolic inverse problem with an overspecification at a point. *Inverse Problems in Science and Engineering.* 2015. Vol. 23, N 3. P. 457–478.
21. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференциальные уравнения.* 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
22. Bouziani A., Benouar N.-E. Probleme mixte avec conditions integrales pour une classe d'equations paraboliques. *C. R. Acad. Sci. Paris. Serie 1.* 1995. Vol. 321. P. 1177–1182.
23. Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения. *Дифференциальные уравнения.* 2004. Т. 40, № 4. С. 547–564.
24. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Москва: Наука, 1978. 592 с.
25. Schiesser W.E. The numerical method of lines: Integration of partial differential equations. San Diego: Academic Press, 1991. 326 p.

26. Самусенко А.В., Фролова С.В. Многоточечные схемы продольного варианта метода прямых повышенной точности для решения некоторых задач математической физики. *Вестні НАН Белорусі*. Сер. фіз.-мат. наук. 2009. № 3. С. 31–39.
27. Лисковец О.А. Метод прямых. *Дифференциальные уравнения*. 1965. Т. 1, № 12. С. 1662–1678.
28. Aida-zade K.R., Rahimov A.B. An approach to numerical solution of some inverse problems for parabolic equations. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2014. Vol. 22, N 1. P. 96–111.
29. Айда-заде К.Р., Рагимов А.Б. Решение классов коэффициентно-обратных задач и задач с нелокальными условиями для параболических уравнений. *Дифференциальные уравнения*. 2015. Т. 51, № 1. С. 84–94.
30. Будак Б.М. О методе прямых для некоторых квазилинейных краевых задач параболического типа. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1961. Т. 1, № 6. С. 1105–1112.

Надійшла до редакції 20.10.2016

А.Б. Рагімов
ПРО ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОГО КЛАСУ
ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Анотація. Розглянуто клас обернених задач для параболического рівняння. Зокрема, до цього класу зводяться крайові задачі з нелокальними умовами. Запропонований чисельний підхід базується на застосуванні методу прямих для зведення до системи звичайних диференціальних рівнянь, для розв'язання якої застосовують аналог методу перенесення крайових умов. Наведено результати чисельних експериментів.

Ключові слова: обернена задача, нелокальні умови, метод прямих, параболическе рівняння, параметрична ідентифікація.

A.B. Rahimov
NUMERICAL SOLUTION TO A CLASS OF INVERSE PROBLEMS
FOR PARABOLIC EQUATION

Abstract. A class of inverse problems for parabolic equation is considered. In particular, boundary value problems with nonlocal conditions are reduced to such class of problems. The proposed numerical approach is based on the method of lines to reduce the problem to a system of ordinary differential equations. To solve this system, the analogue of the transfer method for boundary conditions is applied. The results of numerical experiments are given.

Keywords: inverse problem, nonlocal conditions, method of lines, parabolic equation, parametric identification.

Рагимов Анар Бейбала оглы,
 кандидат физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института систем управления НАН Азербайджана, Баку; Университет Экс-Марсель, Институт Френеля, Марсель, Франция,
 e-mail: anar_r@yahoo.com; anar.rahimov@fresnel.fr.