УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, Т.Н. БАРБОЛИНА

ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ В ЧАСТИЧНО КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ

Аннотация. Обоснован метод построения лексикографической эквивалентности для решения частично комбинаторных оптимизационных задач на размещениях с дробно-линейной целевой функцией и линейными дополнительными ограничениями. Метод предусматривает направленный перебор классов эквивалентности, полученных при разбиении многогранного множества на основе отношения эквивалентности. Предложены как точные, так и приближенный алгоритмы. Последний позволяет получать значение целевой функции, отличающееся от оптимума не больше, чем на заданную величину.

Ключевые слова: евклидова задача комбинаторной оптимизации, задача оптимизации на размещениях, лексикографическая эквивалентность, дробно-линейная функция.

ВВЕДЕНИЕ

Оптимизационные задачи на множествах комбинаторной природы исследуются во многих научных публикациях (см., например, [1–14]). При этом актуальным направлением является изучение оптимизационных задач на основе погружения комбинаторных множеств в евклидово пространство, которое осуществляется в рамках евклидовой комбинаторной оптимизации. Важный класс евклидовых задач комбинаторной оптимизации составляют задачи на общем множестве размещений. В работах [8–14] и других исследованы свойства общего множества размещений и его выпуклой оболочки, методы решения отдельных классов евклидовых задач комбинаторной оптимизации на размещениях.

Один из подходов к решению оптимизационных задач на размещениях состоит в разбиении пространства на классы эквивалентности с последующим их направленным перебором. Для линейных полностью комбинаторных задач оптимизации на размещениях этот подход обоснован в [10, 11], а в [12] обобщено отношение эквивалентности, с помощью которого многогранное множество разбивается на классы эквивалентности, и предложены алгоритмы метода построения лексикографической эквивалентности (далее метода ПоЛЭ) решения частично комбинаторных линейных задач.

В [13, 14] рассмотрена возможность применения метода ПоЛЭ для решения комбинаторных задач оптимизации на размещениях с дробно-линейной целевой функцией и линейными дополнительными ограничениями. Настоящая статья посвящена развитию указанных идей и разработке приближенного алгоритма решения таких задач.

Терминология для лексикографической эквивалентности точек пространства используется согласно [12], для евклидовых задач комбинаторной оптимизации — преимущественно из [8]. В частности, под мультимножеством понимается совокупность элементов, среди которых могут быть и одинаковые. Упорядоченной k-выборкой из мультимножества $G=\{g_1,\dots,g_\eta\}$ называется набор $(g_{i_1},\dots,g_{i_k})$, где $g_{i_j}\in G$, $i_j\ne i_t$ $\forall i_j, i_t\in J_\eta$, $\forall j,t\in J_k$ (здесь и далее J_n обозначает множество n первых натуральных чисел). Множество всех упорядоченных k-выборок из мультимножества G называется общим множество размещений $E_\eta^k(G)$.

ПОСТАНОВКА И СВОЙСТВА ЗАДАЧ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ

Рассмотрим частично комбинаторную задачу лексикографической оптимизации на размещениях с дробно-линейной целевой функцией $\Phi(x)=\dfrac{\sum_{j=1}^{u} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{u} d_j x_j + d_0}$ и дополнительными линейными ограничениями, т.е. задачу поиска пары $\langle \Phi(x^*), x^* \rangle$ такой, что

$$\Phi(x^*)=\underset{x\in R^u}{\operatorname{lexmax}} \frac{\sum_{j=1}^{u} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{u} d_j x_j + d_0}\,;\; x^* = \arg \underset{x\in R^u}{\operatorname{lexmax}} \frac{\sum_{j=1}^{u} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{u} d_j x_j + d_0} \tag{1}$$

при комбинаторном условии

$$(x_1,\ldots,x_k)\in E_\eta^k(G) \tag{2}$$

и дополнительных линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{u} a_{ij} x_j \le b_i,\; i\in J_m\,. \tag{3}$$

Предположим, что выполняется условие $\sum_{j=1}^{u} d_j x_j + d_0 > 0$ для любой точки, удовлетворяющей (3).

В алгоритмах метода ПоЛЭ как вспомогательная используется задача, которая получается из исходной комбинаторной задачи заменой комбинаторного условия (2) условием принадлежности выпуклой оболочке множества размещений — общему многограннику размещений. Последний описывается [8] такой системой ограничений:

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \le \sum_{t\in\omega} x_t \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1} \quad \forall \omega \subset J_k\,, \tag{4}$$

где $|\omega|$ — количество элементов во множестве ω. Для задачи (1)–(3) соответствующая задача состоит в поиске пары (1) при условиях (3), (4). Как известно (см., например, [13]), задачу максимизации функции $\Phi(x)$ при условиях (3), (4) можно заменить эквивалентной задачей линейного программирования. Для этого к задаче применяется преобразование ψ вида

$$y_0=\frac{1}{\sum_{t=1}^{u} d_t x_t + d_0}\,,\; y_t = x_t y_0 \quad \forall t\in J_u, x\in R^u, \tag{5}$$

которое приводит к задаче поиска пары $\langle \Phi'(\tilde{y}), \tilde{y}\rangle$ такой, что

$$\Phi'(\tilde{y})=\max_{y\in R^{u+1}} \sum_{t=0}^{u} c_t y_t,\;\; \tilde{y}=(\tilde{y}_0,\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_u)=\arg\max_{y\in R^{u+1}} \sum_{t=0}^{u} c_t y_t \tag{6}$$

при условиях

$$\sum_{t=1}^{u} a_{it} y_t - b_i y_0 \le 0,\, i\in J_m\,, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j y_0 \le \sum_{t\in\omega} y_t \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1} y_0 \quad \forall \omega \in J_k, \tag{8}$$

$$\sum_{t=1}^{u} d_t y_t + d_0 y_0 = 1,\ y_0 > 0\,. \tag{9}$$

Имея $\tilde{y}$ — максималь в задаче (6)–(9), точку $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_u)$ — максималь функции $\Phi(x)$ на множестве (3), (4) — можно получить по правилу $\tilde{x}_t = \dfrac{\tilde{y}_t}{y_0}$ $\forall t \in J_u$, вытекающему из преобразования (5). Действительно, пусть x' — произвольная точка множества (3), (4), тогда $y' = \psi(x')$ удовлетворяет условиям (7)–(9). Поскольку

$$\Phi'(\psi(x)) = \sum_{t=0}^{u} c_t y_t = \sum_{t=1}^{u} c_t x_t y_0 + c_0 y_0 = y_0 \left(\sum_{t=1}^{u} c_t x_t + c_0 \right) = \frac{\sum_{t=1}^{u} c_t x_t + c_0}{\sum_{t=1}^{u} d_t x_t + d_0} = \Phi(x)\,,$$

а также $\Phi'(\tilde{y}) \ge \Phi(y)$ для произвольной допустимой точки y в задаче (6)–(9), имеют место соотношения $\Phi(\tilde{x}) = \Phi'(\psi(\tilde{x})) = \Phi'(\tilde{y}) \ge \Phi'(y') = \Phi(x')$, т.е. $\Phi(\tilde{x})$ — максимум, а $\tilde{x}$ — максималь функции $\Phi(x)$ на множестве (3), (4).

Рассмотрим также задачу поиска при условиях (7)–(9) пары $\langle \Phi'(y^*), y^* \rangle$ такой, что

$$\Phi'(y^*) = \operatorname*{lexmax}_{y \in R^{u+1}} \sum_{t=0}^{u} c_t y_t,\ y^* = \arg \operatorname*{lexmax}_{y \in R^{u+1}} \sum_{t=0}^{u} c_t y_t. \tag{10}$$

Поскольку решение задачи (7)–(10) также является решением задачи (6)–(9), лексикографическая максималь $y^* = (y_0^*, y_1^*, \ldots, y_u^*)$ задачи (7)–(10) определяет максималь $x^* = (x_1^*, \ldots, x_u^*) = \left(\dfrac{y_1^*}{y_0^*}, \ldots, \dfrac{y_u^*}{y_0^*} \right)$ в задаче (1), (3), (4). Однако x^* необязательно является лексикографически максимальной среди всех точек, доставляющих целевой функции оптимальное значение $\Phi(x^*)$. Действительно, пусть $\bar{y} = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_u)$ — максималь в задаче (7)–(10), отличная от y^*; s — наименьший индекс такой, что $y_s^* \ne \bar{y}_s$. Тогда из $y^* >_l \bar{y}$ (здесь и далее $>_l$ является символом лексикографического порядка) следует, что $y_s^* > \bar{y}_s$. Если $s > 0$, то также s — наименьший номер координаты, различной для точек x^* и $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_u) = \left(\dfrac{\bar{y}_1}{\bar{y}_0}, \ldots, \dfrac{\bar{y}_u}{\bar{y}_0} \right)$, причем $x_s^* = \dfrac{y_s^*}{y_0^*} > \dfrac{\bar{y}_s}{y_0^*} = \dfrac{\bar{y}_s}{\bar{y}_0} = \bar{x}_s$, следовательно, $x^* >_l \bar{x}$, т.е. точка x^* является лексикографической максималью в задаче (1), (3), (4). Однако если $s = 0$, т.е. $y_0^* > \bar{y}_0$, то может оказаться, что $\bar{x} >_l x^*$: например, при $y_1^* = \bar{y}_1$ имеем $x_1^* = \dfrac{y_1^*}{y_0^*} = \dfrac{\bar{y}_1}{y_0^*} < \dfrac{\bar{y}_1}{\bar{y}_0} = \bar{x}_1$. Таким образом, задачи (1), (3), (4) и (7)–(10) не являются эквивалентными.

Пусть $\langle\widetilde{\Phi}, \widetilde{y}\rangle$ — решение задачи (6)–(9). Тогда также $\widetilde{\Phi}$ — максимум в задаче (1), (3), (4) и любая максималь в ней удовлетворяет условию

$$\frac{\sum_{j=1}^{u} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{u} d_j x_j + d_0} = \widetilde{\Phi}. \qquad (11)$$

Учитывая, что соотношение (11) эквивалентно условию

$$\sum_{j=1}^{u} (c_j - \widetilde{\Phi} d_j) x_j = \widetilde{\Phi} d_0 - c_0, \qquad (12)$$

имеем, что когда x' — лексикографически максимальная точка множества (3), (4), (12), то $\langle\Phi(x'), x'\rangle$ — решение задачи (1), (3), (4). Как показано в [10], лексикографически максимальной точкой многогранника, определенного условиями (3), (4), (12), является максималь в задаче поиска пары $\langle\overline{\Phi}(x^*), x^*\rangle$ такой, что

$$\overline{\Phi}(x^*) = \operatorname*{lexmax}_{x \in R^u} \sum_{j=1}^{u} (c_j - \zeta^h d_j) x_j, \ x^* = \arg \operatorname*{lexmax}_{x \in R^u} \sum_{j=1}^{u} (c_j - \zeta^h d_j) x_j \qquad (13)$$

при условиях (3), (4) и

$$\sum_{j=1}^{u} (c_j - \zeta^h d_j) x_j \le \zeta^h d_0 - c_0, \qquad (14)$$

где $\zeta^h = \widetilde{\Phi}$.

Таким образом, решение задачи (1), (3), (4) можно разделить на два этапа: на первом решается задача (6)–(9), на втором — задача (3), (4), (13), (14), в которой ζ^h — максимум в задаче (6)–(9).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Пусть $k, u \in N$ $(k \le u)$, для точки $x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_u) \in R^u$ обозначим $\xi_k(x) = (x_1, \ldots, x_k)$. Точки $x, y \in R^u$ $(x >_l y)$ называются лексикографически эквивалентными относительно k-размещений (λ_k-экивалентными), если выполняется одно их двух условий:

1) не существует такого $z = (z_1, \ldots, z_k) \in E_\eta^k(G)$, что $\xi_k(x) \ge_l z \ge_l \xi_k(y)$;

2) $\xi_k(x) = \xi_k(y)$.

Отношение λ_k является отношением эквивалентности, разбивающим некоторый многогранник M на классы эквивалентности, которые называются λ_k-классами. Комбинаторным называется λ_k-класс V такой, что для любого $x \in V$ $\xi_k(x) \in E_\eta^k(G)$; в противном случае λ_k-класс называется некомбинаторным. На множестве λ_k-классов F можно ввести порядок: λ_k-класс V лексикографически больше λ_k-класса V' $(V >_l V')$ тогда и только тогда, когда $\forall x \in V$, $\forall x' \in V'$ выполняется условие $x >_l x'$. Введение порядка на множестве F позволяет представить его в виде кортежа λ_k-классов, упорядоченных по возрастанию:

$$F = (V_1, V_2, \ldots, V_{|F|}), \ V_i <_l V_{i+1} \ \ \forall i \in J_{|F|-1}. \qquad (15)$$

Пусть $F_E(Q)$ — множество комбинаторных λ_k-классов, имеющих непустое пересечение с некоторым множеством $Q \subseteq M$. В алгоритмах метода ПоЛЭ как вспомогательные используются задачи поиска комбинаторных λ_k-классов $\lfloor \overline{V} \rfloor_Q$ и $\lceil \overline{V} \rceil_Q$, которые являются ближайшими к заданному λ_k-классу $\overline{V}$ в порядке (15) среди всех комбинаторных λ_k-классов из множества $F_E(Q)$, т.е. задачи поиска λ_k-классов, удовлетворяющих соответственно условиям:

$$\lfloor \overline{V} \rfloor_Q \in F_E(Q),\ \overline{V} >_l \lfloor \overline{V} \rfloor_Q,\ \forall V' \in F_E(Q)\ (V' <_l \overline{V} \Rightarrow \lfloor \overline{V} \rfloor_Q \geq_l V');$$

$$\lceil \overline{V} \rceil_Q \in F_E(Q),\ \overline{V} <_l \lceil \overline{V} \rceil_Q,\ \forall V' \in F_E(Q)\ (V' >_l \overline{V} \Rightarrow \lceil \overline{V} \rceil_Q \leq_l V').$$

Задачу поиска лексикографически максимальной точки множества $\lfloor \overline{V} \rfloor_Q \cap Q$ будем называть $\lfloor \overline{V} \rfloor_Q$-задачей, а лексикографически минимальной точки множества $\lceil \overline{V} \rceil_Q \cap Q$ будем называть $\lceil \overline{V} \rceil_Q$-задачей. Алгоритмы решения $\lfloor \overline{V} \rfloor_Q$- и $\lceil \overline{V} \rceil_Q$-задач обоснованы в [12].

Рассмотрим теперь алгоритмы метода ПоЛЭ для решения задачи вида (1)–(3). Пусть многогранник M определяется дополнительными ограничениями (3) и системой (4), описывающей общий многогранник размещений.

Первый алгоритм метода ПоЛЭ, предложенный в [12] для решения линейных частично комбинаторных задач лексикографической оптимизации на размещениях, можно использовать при условии, что известно дискретное множество A, которому принадлежат значения целевой функции (элементы множества A считаем упорядоченными по возрастанию). В этом случае максималь задачи удовлетворяет условию $\Phi(x) = \zeta^h$, где $\zeta^h \in A$, т.е. лежит на одной из гиперплоскостей вида

$$\sum_{j=1}^{u} (c_j - \zeta^h d_j) x_j = \zeta^h d_0 - c_0\ . \tag{16}$$

Пусть $\tilde{y}$ — максималь в задаче (6)–(9), определяющая точку $\tilde{x} = \left(\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_0}, \ldots, \frac{\tilde{y}_u}{\tilde{y}_0} \right)$; ζ^h — наибольший элемент множества A такой, что $\Phi(\tilde{x}) \geq \zeta^h$. Как уже отмечалось, лексикографическая максималь x^* в задаче (3), (4), (13), (14) является лексикографически максимальной точкой многогранника $M(\zeta^h)$, который определяется условиями (3), (4), (16). Если при этом $\xi_k(x^*) \in E_\eta^k(G)$, то получено решение исходной задачи (1)–(3). В противном случае решим $\lfloor \overline{V} \rfloor_{M(\zeta^h)}$-задачу, в которой λ_k-класс $\overline{V}$ определяется точкой x^*. Если задача решения не имеет, то не существует точек, удовлетворяющих (2), (3) и доставляющих функции $\overline{\Phi}(x) = \sum_{j=1}^{u} (c_j - \zeta^h d_j) x_j$ значение $\zeta^h d_0 - c_0$, а функции $\Phi(x)$ — значение ζ^h. В этом случае заменим ζ^h предыдущим значением из множества A и повторим решение задачи вида (3), (4), (13), (14).

Пусть x' — решение $\lfloor \overline{V} \rfloor_{M(\zeta^h)}$-задачи. Тогда для любой точки, удовлетворяющей условиям (2), (3) и $\overline{\Phi}(x) = \zeta^h d_0 - c_0$ (или, что то же самое, $\Phi(x) = \zeta^h$), имеет место соотношение $x' >_l x$. Учитывая также, что не существует допустимых точек задачи (1)–(3), для которых значение целевой функции превышало бы ζ^h, получаем, что $\langle \Phi(x'), x' \rangle$ — решение задачи (1)–(3).

Если в процессе уменьшения ζ^h окажется, что задача (3), (4), (13), (14) не имеет решения, то, очевидно, задача (1)–(3) также не имеет решения.

Далее приведен первый алгоритм метода ПоЛЭ решения задачи (1)–(3).

1. Полагаем номер итерации $h=0$.

2. Решаем задачу поиска пары (6) при условиях (7)–(9). Если она не имеет решения, то не имеет решения и исходная задача (1)–(3), иначе обозначим решение $\langle \zeta^h, \widetilde{y} \rangle$.

3. Если $\zeta^h \in A$, то переходим к п. 5, иначе к п. 4.

4. Увеличивая номер h итерации на единицу, полагаем ζ^h равным ближайшему слева элементу множества A.

5 Решаем задачу (3), (4), (13), (14). Если она не имеет решения, то не имеет решения и исходная задача, иначе пусть $\langle \zeta^h, x^h \rangle$ — ее решение.

6. Если x^h удовлетворяет условию (2), то $\langle \zeta^h, x^h \rangle$ — решение исходной задачи, иначе переходим к п. 7.

7. Решаем $\lfloor \bar{V}^h \rfloor_{M(\zeta^h)}$-задачу, где многогранник $M(\zeta^h)$ определяется условиями (3), (4), (16) (λ_k-класс $\bar{V}^h$ имеет своим представителем точку x^h).

8. Если $\lfloor \bar{V}^h \rfloor_{M(\zeta^h)}$-задача решения не имеет, то увеличивая номер h итерации на единицу, полагаем ζ^h равным предыдущему значению множества A и переходим к п. 5, иначе исходная задача решена и ее решением является пара $\langle \zeta^h, x' \rangle$, где x' — решение $\lfloor \bar{V}^h \rfloor_{M(\zeta^h)}$-задачи.

Недостатком рассмотренного алгоритма является сложность определения дискретного множества A. Второй алгоритм метода ПоЛЭ, использующий направленный перебор λ_k-классов в порядке лексикографического возрастания и лексикографического убывания, не имеет этого недостатка. Описанный перебор предусматривает решение последовательности $\lfloor \bar{V} \rfloor_Q$-задач и $\lceil \bar{V} \rceil_Q$-задач, причем из рассмотрения исключаются те λ_k-классы, все представители которых доставляют целевой функции значение меньшее, чем полученные на предыдущих итерациях. Значит, из рассмотрения исключаются точки, которые не удовлетворяют условию

$$\frac{\sum_{j=1}^{u} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{u} d_j x_j + d_0} \ge \sigma^h , \tag{17}$$

где σ^h — наибольшее значение целевой функции, полученное на предыдущих итерациях. Поскольку $\sum_{j=1}^{u} d_j x_j + d_0 > 0$, то условие (17) равносильно следующему:

$$\sum_{j=1}^{u} (c_j - \sigma^h d_j) x_j \ge \sigma^h d_0 - c_0. \tag{18}$$

Перебор комбинаторных λ_k-классов в порядке лексикографического возрастания с учетом описанного ранее замечания будем называть l^+-перебором, а перебор в порядке лексикографического убывания — l^--перебором.

Рассмотрим вначале l^+-перебор. Пусть точка $x^h \in M$ определяет комбинаторный λ_k-класс V^h, причем x^h является максималью функции $\Phi(x)$ на множестве V^h. Пусть также множество $Q \subseteq M$ определяется условиями (3), (4), (18), где

$\sigma^h = \Phi(x^h)$. Решим $\lceil V^h \rceil_Q$-задачу. Если она не имеет решения, то перебор завершен, иначе пусть ее решение $\bar{x}^h$ определяет λ_k-класс $\lceil V^h \rceil_Q$. Так как комбинаторный λ_k-класс может содержать больше одной точки, то для нахождения значения σ^{h+1} необходимо определить максимум целевой функции задачи (1)–(3) на множестве $\lceil V^h \rceil_Q$. Для этого решим задачу максимизации $\Phi(x)$ при условиях (3) и

$$x_t = \bar{x}_t^h \quad \forall t \in J_k. \tag{19}$$

Если целевая функция $\Phi(x)$ ограничена сверху на множестве M, то также существует максимум $\Phi(x^*)$ на непустом множестве (3), (4), (19). Кроме того, так как λ_k-класс $\bar{V}^h$ является комбинаторным, максималь x^* удовлетворяет условию $\xi(x^*) = \xi(\bar{x}^h) \in E_\eta^k(G)$, а тогда и условию (4). Также $\Phi(x^*) \geq \Phi(\bar{x}) \geq \sigma^h$, т.е. максималь удовлетворяет условию (17) и эквивалентному ему условию (18).

Из доказанного следует, что задача максимизации $\Phi(x)$ при условиях (3), (19) эквивалентна задаче нахождения пары (6) при условиях (7)–(9) и

$$y_t = \bar{x}_t^h y_0 \quad \forall t \in J_k, \tag{20}$$

причем условие (8) выполняется для любой точки, удовлетворяющей (20).

Пусть максималь $\tilde{y}$ в задаче (6), (7), (9), (20) определяет точку $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_u) = \left(\dfrac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_0}, \ldots, \dfrac{\tilde{y}_u}{\tilde{y}_0} \right)$. Тогда $\tilde{x} >_l x^h$ вследствие $\lceil V^h \rceil_Q >_l V^h$ и $\Phi(\tilde{x}) \geq \sigma^h = \Phi(x^h)$. Кроме того, не существует таких комбинаторных λ_k-классов, которые расположены между $\bar{V}^h$ и $\lceil \bar{V}^h \rceil_Q$ в порядке (15) и имеют представителей, доставляющих целевой функции значение, не меньшее $\Phi(\tilde{x})$. Таким образом, не существует допустимых точек задачи (1)–(3), которые удовлетворяли бы условиям $\tilde{x} >_l x >_l x^h$ и $\Phi(x) > \Phi(\tilde{x})$.

Продолжив перебор λ_k-классов, увеличим h на единицу и снова решим $\lceil V^h \rceil_Q$-задачу, выбрав в качестве начального λ_k-класс, определенный точкой $\tilde{x}$, $\sigma^h = \Phi(\tilde{x})$; далее найдем пару (6) при условиях (7), (9), (20). Процесс будем продолжать до тех пор, пока не окажется, что $\lceil V^h \rceil_Q$-задача не имеет решения при некотором σ' (x' — максималь $\Phi(x)$ на V^h). Тогда не существует допустимых точек задачи (1)–(3) таких, что $x >_l x^*$ и $\Phi(x) > \sigma'$, причем если $\Phi(x) = \sigma'$, то $x \in V^h$. Следовательно, для решения задачи (1)–(3) остается найти лексикографическую максималь функции $\Phi(x)$ на V^h. С учетом того, что максимум известен и равен σ', для этого достаточно решить задачу (3), (13), (14) при $\zeta^h = \sigma'$ и (19) при $\bar{x}^h = x'$.

Приведем формальное изложение алгоритма l^+-перебора, начиная с точки $x^0 \in V^0$, причем x^0 — максималь функции $\Phi(x)$ на множестве V^0.

1. Полагаем номер итерации $h = 0$.

2. Решаем $\lceil V^h \rceil_Q$-задачу, где множество $Q \subseteq M$ определяется условиями (3), (4) и (18) при $\sigma^h = \Phi(x^h)$. Если $\lceil V^h \rceil_Q$-задача не имеет решения, то переходим к п. 5, иначе пусть $\bar{x}^h$ — решение $\lceil V^h \rceil_Q$-задачи.

3. Решаем задачу вида (6), (7), (9), (20), пусть $\langle \zeta^h, y^h \rangle$ — ее решение, а точка $x^{h+1} = \left(\frac{y_1^{h+1}}{y_0^{h+1}}, \ldots, \frac{y_u^{h+1}}{y_0^{h+1}} \right)$ определяет λ_k-класс V^{h+1}.

4. Увеличивая h на единицу, переходим к п. 2.

5. Решаем задачу вида (3), (13), (14) при $\zeta^h = \sigma^h$ и (19) при $\bar{x}^h = x^h$. Решение $\langle \sigma^{h+1}, x^{h+1} \rangle$ задачи является результатом перебора.

Понятно, что в случае l^--перебора для получения лучшего допустимого решения необходимо, чтобы значение целевой функции в точке x^* было строго больше σ^h. Приведем алгоритм l^--перебора.

1. Полагаем номер итерации $h = 0$.

2. Решаем $\lfloor V^h \rfloor_Q$-задачу, где множество $Q \subseteq M$ определяется условиями (3), (4) и (18) при $\sigma^h = \Phi(x^h)$. Если $\lfloor V^h \rfloor_Q$-задача не имеет решения, то переходим к п. 6, иначе пусть $\bar{x}^h$ — решение $\lfloor V^h \rfloor_Q$-задачи.

3. Решаем задачу вида (6), (7), (9), (20), пусть $\langle \zeta^h, y^h \rangle$ — ее решение, а точка $\tilde{x} = \left(\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_0}, \ldots, \frac{\tilde{y}_u}{\tilde{y}_0} \right)$ определяет λ_k-класс V^{h+1}.

4. Если $\Phi(\tilde{x}) > \sigma^h$, то положим $\sigma^{h+1} = \Phi(\tilde{x})$, $x^{h+1} = \tilde{x}$, иначе $\sigma^{h+1} = \sigma^h$, $x^{h+1} = x^h$.

5. Увеличивая h на единицу, переходим к п. 2.

6. Решаем задачу вида (3), (13), (14) при $\zeta^h = \sigma^h$ и (19) при $\bar{x}^h = x^h$. Решение $\langle \sigma^{h+1}, x^{h+1} \rangle$ задачи является результатом перебора.

Для решения задачи (1)–(3) с помощью алгоритмов перебора λ_k-классов в порядке лексикографического возрастания и лексикографического убывания можно использовать алгоритм 2 из [12].

Предлагаемый далее третий алгоритм метода ПоЛЭ является приближенным и позволяет получить допустимое решение, для которого значение целевой функции отличается от оптимума не более чем на заданную величину.

Пусть y' — максималь в задаче (7)–(10), определяющая точку $x' = \left(\frac{y_1'}{y_0'}, \ldots, \frac{y_u'}{y_0'} \right)$. Очевидно, что величина $\Phi(x')$ дает верхнюю оценку ζ^h $(h = 1)$ значений целевой функции на множестве (2), (3). Пусть также x'' — некоторая допустимая точка задачи (1)–(3). Значение $\Phi(x'')$ при $\Phi(x'') < \Phi(x')$ будем считать нижней оценкой τ^h оптимума функции $\Phi(x)$ на множестве (2), (3). Положим $\sigma^h = \frac{\tau^h + \zeta^h}{2}$ и осуществим поиск тех комбинаторных λ_k-классов, представители которых удовлетворяют условиям (14), (18) (а тогда также и условиям $\Phi(x) \le \zeta^h$, $\Phi(x) \ge \sigma^h$).

Для поиска таких λ_k-классов решим $\lfloor V \rfloor_{Q(h)}$-задачу, где многогранник $Q(h) \subset M$ определяется условиями (3), (4), (14), (18), а λ_k-класс V определяется точкой x'. Если она не имеет решения, то решим $\lceil V \rceil_{Q(h)}$-задачу. Если она также не имеет решения, то не существует комбинаторных λ_k-классов, представители которых принадлежат множеству $Q(h)$. Следовательно, оптимум целевой функции на множестве (2), (3), очевидно, не превышает σ^h, т.е. $\zeta^{h+1} = \sigma^h$.

Отметим, что если на некотором подмножестве $Q(h)$ многогранника M $\lfloor V \rfloor_{Q(h)}$-задача не имеет решения, то она, очевидно, не имеет решения и для любого $Q \subset Q(h)$. Это означает, что при поиске комбинаторных λ_k-классов на множестве Q можно осуществлять решение только $\lceil V \rceil_{Q(h)}$-задачи.

Если при решении $\lfloor V \rfloor_{Q(h)}$-задачи или $\lceil V \rceil_{Q(h)}$-задачи был найден комбинаторный λ_k-класс $\bar{V}$ с представителем $\bar{x}$, то новое значение нижней оценки τ^{h+1} можно определить как максимум функции $\Phi(x)$ на множестве $\bar{V}$. Для этого, как показано ранее, следует решить задачу (6), (7), (9), (20).

Повторим поиск комбинаторных λ_k-классов, представители которых удовлетворяют (14), (18) для новых значений оценок. Процесс завершается, когда будет достигнута требуемая точность ε, т.е. величина $\zeta^h - \tau^h$ не превысит ε.

Поскольку известно допустимое решение x^h, для которого $\tau^h \le \Phi(x^h) \le \zeta^h$, то эта точка с заданной точностью — максималь в задаче (1)–(3), однако необязательно является лексикографически максимальной из точек, доставляющих целевой функции значение $\Phi(x^h) = \Phi^*$. Поэтому необходимо найти лексикографически максимальную допустимую точку, принадлежащую многограннику M', который определяется условиями (3), (4), (12). Для поиска лексикографически максимальной точки многогранника M', как указывалось ранее, необходимо решить задачу (3), (4), (13), (14) при $\zeta^h = \Phi^*$. Если ее максималь x'' определяет некомбинаторный λ_k-класс V'', то необходимо также решить $\lfloor V'' \rfloor_{M'}$-задачу.

На основе изложенного можно сформулировать такой алгоритм нахождения приближенного решения задачи (1)–(3) с точностью ε (по целевой функции).

1. Решаем задачу (6)–(9). Если она не имеет решения, то не имеет решения и исходная задача, иначе пусть $\langle \widetilde{\Phi}, \widetilde{y} \rangle$ — ее решение.

2. Решаем задачу (3), (4), (13), (14), пусть $\langle \widetilde{\Phi}, x' \rangle$ — ее решение, а точка x' определяет λ_k-класс $V \in M / \lambda_k$.

3. Полагаем номер итерации $h = 1$.

4. Решаем $\lfloor V \rfloor_M$-задачу. Если она имеет решение $\bar{x}^h$, то полагаем $l^h = 1$ и переходим к п. 6, иначе полагаем $l^h = 0$.

5. Решаем $\lceil V \rceil_M$-задачу. Если она не имеет решения, то также не имеет решения и исходная задача, иначе пусть $\bar{x}^h$ — ее решение.

6. Полагаем $\zeta^h = \Phi(x')$, $\tau^h = \Phi(x^h)$, где $x^h = \left(\dfrac{y_1^h}{y_0^h}, \ldots, \dfrac{y_u^h}{y_0^h} \right)$, y^h — максималь в задаче (6), (7), (9), (20).

7. Если $\zeta^h - \tau^h \le \varepsilon$, то переходим к п. 13.

8. Полагаем $\sigma^h = \dfrac{\tau^h + \zeta^h}{2}$.

9. Если $l^h = 1$, то решаем $\lfloor V \rfloor_{Q(h)}$-задачу, где многогранник $Q(h)$ определяется условиями (3), (4), (14), (18). Если задача имеет решение $\bar{x}^h$, то полагаем $l^{h+1} = l^h$ и переходим к п. 11, иначе — к п. 10.

10. Решаем $\lceil V \rceil_{Q(h)}$-задачу, где многогранник $Q(h)$ определяется условиями (3), (4), (14), (18). Если она имеет решение $\bar{x}^h$, то полагаем $l^{h+1} = 0$ и перехо-

дим к п. 11, иначе полагаем $\zeta^{h+1} = \sigma^h$, $\tau^{h+1} = \tau^h$, $l^{h+1} = l^h$, $x^{h+1} = x^h$ и, увеличивая h на единицу, переходим к п. 7.

11. Решаем задачу (6), (7), (9), (20). Пусть ее решение $\langle \Phi'(y^{h+1}), y^{h+1} \rangle$ определяет точку $x^{h+1} = \left(\frac{y_1^{h+1}}{y_0^{h+1}}, \ldots, \frac{y_u^{h+1}}{y_0^{h+1}} \right)$.

12. Полагаем $\tau^{h+1} = \Phi(x^{h+1})$, $\zeta^{h+1} = \zeta^h$, увеличиваем h на единицу и переходим к п. 7.

13. Решаем задачу (3), (4), (13), (14), в которой $\zeta^h = \Phi^h$. Пусть $\langle \overline{\Phi}(x''), x'' \rangle$ — ее решение, а точка x'' определяет λ_k-класс V''.

14. Если λ_k-класс V'' комбинаторный, то $\langle \Phi(x''), x'' \rangle$ — решение исходной задачи (1)–(3), иначе решением задачи (1)–(3) является пара $\langle \Phi(x^*), x^* \rangle$, где точка x^* — решение $\lfloor V'' \rfloor_{M'}$-задачи, а многогранник M' определяется условиями (3), (4), и (12) при $\Phi^* = \Phi(x'')$.

Отметим, что, как и в случае линейной задачи, рассмотренный алгоритм позволяет найти точное решение исходной задачи, если известно дискретное множество, которому принадлежат значения целевой функции. Для этого следует остановить итерационный процесс, когда величина $\zeta^h - \tau^h$ станет не больше разности двух соседних элементов множества.

Кроме того, если для некоторого многогранника $Q(h)$, определенного условиями (3), (4) и (18) при $\sigma^h = \tau^h$, не имеют решения ни $\lfloor \overline{V} \rfloor_{Q(h)}$-задача, ни $\lceil \overline{V} \rceil_{Q(h)}$-задача ($\lambda_k$-класс $\overline{V}$ определен точкой x^h), не существует комбинаторных λ_k-классов, которые доставляют целевой функции значение не меньшее $\tau^h = \Phi(x^h)$. Таким образом, пара $\langle \Phi(x^h), x^h \rangle$ является решением (точным) задачи (1)–(3). Однако требует дальнейшего исследования вопрос об эффективности использования такой проверки в алгоритме.

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим пример, иллюстрирующий особенности приведенных алгоритмов. Пусть в задаче (1)–(3) $\Phi(x) = \frac{4x_1 + 5x_2 - x_3}{x_1 + x_2 + 1}$, $G = \{2, 5, 5, 8, 10, 10\}$, $k = 2$, $(x_1, x_2) \in E_6^2(G)$, дополнительные ограничения имеют вид

$$x_1 + 6x_2 \le 62,\ 3x_1 + 2x_2 \le 42,\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 20,\ x_3 \le 15.$$

Все три алгоритма метода ПоЛЭ предполагают нахождение лексикографического максимума и максимали функции $\Phi(x)$ на многограннике M, который задается дополнительными ограничениями задачи и системой неравенств (4), определяющей общий многогранник размещений. В данном случае система (4) имеет следующий вид:

$$2 \le x_1 \le 10,\ 2 \le x_2 \le 10,\quad 7 \le x_1 + x_2 \le 20.$$

Для решения такой задачи вначале решим задачу вида (6)–(9): найти (6), где $\Phi'(y) = 4y_1 + 5y_2 - y_3$ при условиях

$$y_1+6y_2-62y_0\le 0,\quad 3y_1+2y_2-42y_0\le 0,$$

$$y_1+y_2+y_3-20y_0\ge 0,\; y_3-15y_0\le 0,\; y_1+y_2+y_0=1,\; y_0>0; \tag{21}$$

$$2y_0\le y_1\le 10y_0,\; 2y_0\le y_2\le 10y_0,\; 7y_0\le y_1+y_2\le 20y_0. \tag{22}$$

Решением этой задачи является пара $\left\langle 4\frac{1}{9},\left(\frac{1}{18};\frac{4}{9};\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right)\right\rangle$. Для нахождения лексикографической максимали решим задачу лексикографической максимизации функции $\overline{\Phi}(x)=\left(4-4\frac{1}{9}\right)x_1+\left(5-4\frac{1}{9}\right)x_2-x_3=-\frac{1}{9}x_1+\frac{8}{9}x_2-x_3$ при условиях $x\in M$ и $-\frac{1}{9}x_1+\frac{8}{9}x_2-x_3\le 4\frac{1}{9}\cdot 1-0$. Решением этой задачи является пара $\left\langle 4\frac{1}{9},(8;9;3)\right\rangle$.

Рассмотрим применение третьего алгоритма метода ПоЛЭ к приближенному решению исходной задачи. Пусть $\varepsilon=0{,}1$, λ_k-класс V определен точкой $x'=(8;9;3)$. Полагаем номер итерации $h=1$ и решаем $\lfloor V\rfloor_M$-задачу. Так как задача имеет решение $\bar{x}^1=(8;5;15)$, то полагаем $l^1=1$. Находим нижнюю оценку максимума целевой функции, решая задачу вида (6), (7), (9), (20), т.е. задачу максимизации функции $\Phi'(y)=4y_1+5y_2-y_3$ при условиях (21) и $y_1=8y_0$, $y_2=5y_0$. Получаем $y^1=\left(\frac{1}{14};\frac{4}{7};\frac{5}{14};\frac{1}{2}\right)$, откуда $x^1=(8;5;7)$, $\tau^1=\Phi(x^1)=3\frac{4}{7}$. Требуемая точность не достигнута, поскольку $\zeta^1=\Phi(x')=4\frac{1}{9}$, $\tau^1=3\frac{4}{7}$, $\zeta^1-\tau^1>\varepsilon$. Следовательно, переходим к п. 8: полагаем $\sigma^1=\frac{\tau^1+\zeta^1}{2}=$ $=\frac{1}{2}\cdot\left(3\frac{4}{7}+4\frac{1}{9}\right)=3\frac{53}{63}$. Так как $l^1=1$, то решаем $\lfloor V\rfloor_{Q(1)}$-задачу, где многогранник $Q(1)$ определен условиями $x\in M$ и

$$-\frac{1}{9}x_1+\frac{8}{9}x_2-x_3\le 4\frac{1}{9},\quad \frac{10}{63}x_1+\frac{73}{63}x_2-x_3\ge 3\frac{53}{63}.$$

Решением этой задачи является точка $\bar{x}^1=\left(2;\,10;\,8\frac{4}{63}\right)$, решением соответствующей задачи вида (6), (7), (9), (20) в п. 11 — пара $\left\langle 3\frac{11}{13},\left(\frac{1}{13};\frac{2}{13};\frac{10}{13};\frac{8}{13}\right)\right\rangle$. Следовательно, $x^2=(2;10;8)$. Полагаем $\tau^2=3\frac{11}{13}$, $\zeta^2=4\frac{1}{9}$ и увеличиваем h на единицу. Так как $\tau^2-\zeta^2=\frac{31}{117}>\varepsilon$, то продолжаем итерационный процесс: $\sigma^2=3\frac{229}{234}$, многогранник $Q(2)$ определяется условиями $x\in M$ и

$$-\frac{1}{9}x_1+\frac{8}{9}x_2-x_3\le 4\frac{1}{9},\; \frac{5}{234}x_1+\frac{239}{234}x_2-x_3\ge 3\frac{229}{234}.$$

Поскольку ни $\lfloor V\rfloor_{Q(2)}$-задача, ни $\lceil V\rceil_{Q(2)}$-задача решения не имеют, полагаем $\zeta^3=\sigma^2=3\frac{229}{234}$, $\tau^3=\tau^2=3\frac{11}{13}$, $l^3=l^2=1$, $x^3=x^2=(2;10;8)$, $h=3$ и переходим к п. 7.

Так как $3\frac{229}{234}-3\frac{11}{13}>\varepsilon$, то полагаем $\sigma^3=3\frac{427}{468}$. Как и на предыдущей итерации, ни $\lfloor V\rfloor_{Q(3)}$-задача, ни $\lceil V\rceil_{Q(3)}$-задача решения не имеют, следовательно, $\zeta^4=3\frac{427}{468}$, $\tau^4=3\frac{11}{13}$. При этом $\zeta^4-\tau^4<\varepsilon$, т.е. достигнута требуемая точность. Решением задачи (13) на множестве $x\in M$ и $\frac{2}{13}x_1+\frac{15}{13}x_2-x_3\le 3\frac{11}{13}$ является пара $\left\langle 3\frac{11}{13}, \left(2;6;4\frac{8}{13}\right)\right\rangle$. Максималь определяет некомбинаторный λ_k-класс V'', поэтому решаем $\lfloor V''\rfloor_{M'}$-задачу, где многогранник M' определяется условиями $x\in M$ и $\frac{2}{13}x_1+\frac{15}{13}x_2-x_3=3\frac{11}{13}$. Решением этой задачи есть точка $(2;10;8)$, а тогда пара $\left\langle 3\frac{11}{13}, (2;10;8)\right\rangle$ является решением исходной задачи. Отметим, что это решение точное, так как для λ_k-класса $\overline{V}$ с представителем $x^4=x^3=(2;10;8)$ и многогранника $Q(4)$, определяемого условиями $x\in M$ и $\frac{2}{13}x_1+\frac{15}{13}x_2-x_3\ge 3\frac{11}{13}$, ни $\lfloor V\rfloor_{Q(4)}$-задача, ни $\lceil V\rceil_{Q(4)}$-задача решения не имеют.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье обосновано применение метода ПоЛЭ для решения частично комбинаторных оптимизационных задач на размещениях с дробно-линейной целевой функцией и линейными дополнительными ограничениями. Предложенные алгоритмы метода ПоЛЭ используют разбиение многогранного множества на классы эквивалентности по бинарному отношению лексикографической эквивалентности относительно размещений, а также последующий направленный перебор полученных классов эквивалентности. Изложенные подходы можно модифицировать для решения других классов евклидовых задач комбинаторной оптимизации, в том числе и с различными видами неопределенности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И. В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. Киев: Наук. думка, 1981. 288 с.
2. Згуровский М.З., Павлов А.А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами. Киев: Наук. думка. 2010. 573 с.
3. Панишев А. В., Плечистый Д.Д. Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера. Житомир: ЖГТУ, 2006. 300 с.
4. Сергиенко И. В., Гуляницкий Л. Ф., Сиренко С. И. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ.* 2009. № 5. С. 71–83.
5. Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И. Метаэвристический метод комбинаторной оптимизации ОМК-Н. *Проблемы управления и информатики.* 2010. № 4. С. 31–42.
6. Донець Г. П., Колєчкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. 309 с. URL: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/560.
7. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 1986. 268 с.
8. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Інститут системних досліджень освіти, 1993. 188 с. URL: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487.

9. Ємець О.О., Роскладка О.В., Недобачій С.С. Незвідна система обмежень для загального многогранника розміщень. *Український математичний журнал*. 2003. Т. 55, № 1. С.3–11.

10. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. Киев: Наук. думка, 2008. 159 с. URL: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/473.

11. Емец О.А., Барболина Т.Н. Решение задач евклидовой комбнаторной оптимизации методом построения лексикографической эквивалентности. *Кибернетика и системный анализ.* 2004. № 5. С. 115–125.

12. Барболина Т.Н. Решение частично комбинаторных задач оптимизации на размещениях методом построения лексикографической эквивалентности. *Кибернетика и системный анализ.* 2013. № 6. С. 137–149.

13. Емец О.А., Черненко О.А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях. Киев: Наук. думка, 2011. 154 с. URL: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/467.

14. Емец О.А., Барболина Т.Н., Черненко О.А. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными ограничениями. *Кибернетика и системный анализ.* 2006. № 5. С.79–85.

Надійшла до редакції 25.01.2016

О.О. Ємець, Т.М. Барболіна

ЛЕКСИКОГРАФІЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ У ЧАСТКОВО КОМБІНАТОРНІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ ДРОБОВО-ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІЙ НА РОЗМІЩЕННЯХ

Анотація. Обгрунтувано метод побудови лексикографічної еквівалентності для розв'язування частково комбінаторних оптимізаційних задач на розміщеннях з дробово-лінійною цільовою функцією та лінійними додатковими обмеженнями. Метод передбачає спрямований перебір класів еквівалентності, отриманих при розбитті багатогранної множини на основі відношення еквівалентності. Запропоновано як точні, так і наближений алгоритми. Останній дозволяє отримувати значення цільової функції, що відрізняється від оптимуму не більше, ніж на задану величину.

Ключові слова: евклідова задача комбінаторної оптимізації, задача оптимізації на розміщеннях, лексикографічна еквівалентність, дробово-лінійна функція.

O.O. Iemets, T.M. Barbolina

LEXICOGRAPHIC EQUIVALENCE IN MIXED COMBINATORIAL OPTIMIZATION OF LINEAR-FRACTIONAL FUNCTIONS ON ARRANGEMENTS

Abstract. The paper substantiates the method of constructing the lexicographic equivalence to solve mixed combinatorial optimization problems on arrangements with linear-fractional objective function and linear additional constraints. The method involves directed search of equivalence classes obtained by splitting polyhedral set using equivalence relation. The authors propose exact methods as well as an approximate one. The approximate method allows getting the objective function value that differs from the optimum by no more than a predetermined value.

Keywords: Euclidian problem of combinatorial optimization, optimization problem on arrangements, lexicographic equivalence, linear-fractional function.

Емец Олег Алексеевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой Полтавского университета экономики и торговли, e-mail: yemetsli@ukr.net.

Барболина Татьяна Николаевна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент, заведующая кафедрой Полтавского национального педагогического университета им. В.Г. Короленко, e-mail: tm-b@ukr.net.