УДК 519.2

Л.С. СТОЙКОВА

НАИБОЛЬШАЯ ТОЧНАЯ НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ВЕРОЯТНОСТИ ОТКАЗА СИСТЕМЫ В СПЕЦИАЛЬНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ДО ОТКАЗА СИСТЕМЫ

Аннотация. Решается задача нахождения точных нижних границ вероятности $F(v)-F(u)$, $0<u<v<\infty$, где $u=m-\sigma_\mu 3\sqrt{3}$, $v=m+\sigma_\mu 3\sqrt{3}$, σ_μ — заданная дисперсия в множестве функций распределения $F(x)$ неотрицательных случайных величин с унимодальной дифференцируемой плотностью с модой, равной m, и двумя первыми фиксированными моментами μ_1, μ_2. Рассматривается случай, когда мода совпадает с первым моментом: $m=\mu_1$. Найдена наибольшая вероятность из всех точных нижних границ вероятностей для решаемой задачи, и она является близкой к единице, т.е. равной 0,98430.

Ключевые слова: экстремум линейного функционала, класс унимодальных функций распределения с двумя первыми фиксированными моментами, разбиение области параметров.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–4] рассматривалась задача нахождения точных верхних и нижних границ попадания случайной величины ξ в произвольный неотрицательный интервал (u, v), $0<u<v<\infty$, при условии, что ее функция распределения (ф.р.) $F(x)$ имеет унимодальную дифференцируемую плотность с заданной модой и двумя первыми фиксированными моментами. Задача решалась в общем виде при различных взаиморасположениях параметров u, v, m, μ_1, μ_2.

В настоящей статье исследуется частный случай, а именно: вероятность попадания случайной величины ξ в специальный интервал $u=m-\sigma_\mu 3\sqrt{3}$, $v=m+\sigma_\mu 3\sqrt{3}$, где $\sigma_\mu^2=\mu_2-\mu_1^2$, $m\ge\sigma_\mu 3\sqrt{3}$, при этом $m=\mu_1$. Эта характеристика очень важна для рассматриваемого класса унимодальных ф.р., так как наименьшая вероятность попадания случайной величины ξ в указанный интервал близка к единице.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется найти точную нижнюю границу интеграла

$$I(F)=\int_u^v dF(x),\ 0\le u=m-\sigma_\mu 3\sqrt{3},\quad v=m+\sigma_\mu 3\sqrt{3},\quad m=\mu_1, \tag{1}$$

где ф.р. $F(x)$ принадлежит классу A функций распределения неотрицательных случайных величин, имеющих дифференцируемую унимодальную плотность с модой m и два первых фиксированных момента μ_1, μ_2, причем $\mu_1=m$, $\sigma_\mu^2=\mu_2-\mu_1^2$.

Схема решения задач, подобных [1–4], разработана в [5], где вместо задачи (1) решается более простая задача. Переход к ней осуществляется с помощью преобразования

$$dG(x) = (m-x)df(x)\,, \tag{2}$$

где $f(x)$ — плотность распределения $F(x)$, а ф.р. $G(x)$ — произвольная (не обязательно унимодальная). Ее моменты вычисляются через моменты ф.р. $F(x)$ следующим образом:

$$\mu_0 = \int_0^\infty dF(x) = \int_0^\infty dG(x) = 1\,, \tag{3}$$

$$s_i = \int_0^\infty x^i dG(x) = (i+1)\mu_i - im\mu_{i-1},\ i = 1,\, 2\,. \tag{4}$$

Из (4) и равенства $m = \mu_1$ следует равенство $s_1 = m$. Учитывая равенство $s_1 = m$ и моментные ограничения (4), имеем $\sigma^2 = s_2 - s_1^2 = 3\mu_2 - 3\mu_1^2 = 3\sigma_\mu^2$. Отсюда следуют равенства $\sigma = \sigma_\mu\sqrt{3},\ u = s_1 - 3\sigma, v = s_1 + 3\sigma$.

Хотя в задаче фигурируют пять параметров, но между ними имеются три связи: $m = s_1, u = s_1 - 3\sigma, v = s_1 + 3\sigma$. Поэтому свободными остаются только два параметра: s_1 и σ.

Учитывая, что $m \in (u, v)$, с помощью интегрирования по частям $I(F)$ и с использованием (2) получаем

$$I(F) = \int_{m-\sigma_\mu 3\sqrt{3}}^{m+\sigma_\mu 3\sqrt{3}} f(x)dx = J(G) = \int_0^\infty g(x)dG(x),\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{3\sigma}{s_1 - x},\ 0 \le x \le s_1 - 3\sigma; \\ 1,\ s_1 - 3\sigma \le x \le s_1 + 3\sigma; \\ \dfrac{3\sigma}{x - s_1},\ x \ge s_1 + 3\sigma. \end{cases} \tag{5}$$

Класс функций $G(x)$, удовлетворяющий моментным ограничениям (3), (4), обозначим K. Соотношения (2) и (5) устанавливают взаимно однозначное соответствие между классами A и K и функционалами $I(F)$ и $J(G)$. Поэтому $\inf\limits_{F\in A} I(F) = \inf\limits_{G\in K} J(G)$. Кроме того, разбиение области параметров, полученное в классе K будет таким же и в классе A. Далее будем решать следующую задачу.

Найти инфимум

$$J(G),\ G \in K\,. \tag{6}$$

При решении задачи (6) используем следующие обозначения, введенные в предыдущих статьях автора:

$$B(x) = \frac{s_2 - s_1 x}{s_1 - x},\ x < s_1 \cup x > B(0)\,; \tag{7}$$

$$L(x,\, y) = g'(x) + g'(y) - \frac{2(g(y) - g(x))}{y - x},\ 0 < x < y\,; \tag{8}$$

$$M(x,\, y,\, z) = \frac{g'(y)}{y-x} - \frac{g(y) - g(x)}{(y-x)^2} + \frac{g'(y)}{z-y} - \frac{g(z) - g(y)}{(z-y)^2}\,. \tag{9}$$

Проанализируем возможные экстремальные ф.р. и построим разбиение области параметров задачи (6).

Для получения предварительных численных результатов была использована программа, составленная программистом С. Красниковым для численного решения задачи (6) с помощью современного поколения персональных компьютеров. Она позволяет при фиксированных значениях параметров задачи находить точки роста экстремальных распределений и представлять графики соответствующего экстремального многочлена. С ее помощью можно проверить правильность теоретических результатов. При написании программы использовался простой алгоритм (для узкого класса задач). Более общий алгоритм был реализован в программе авторов Г.А. Марчука, Л.С. Стойковой, О.А. Ющенко (1981 г.), которая хранится в Институте кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, однако она, к сожалению, не была позднее доработана для настоящего поколения персональных компьютеров. Программа С. Красникова не была опубликована. В табл. 1 приведен пример вычислений по этой программе, где использованы следующие исходные данные: $s_1 = 30{,}1; s_2 = \sigma^2 + s_1^2;\ \ 2 \le \sigma \le 10$. В скобках указаны значения x_{22}, $y_{22} = B(x_{22})$, вычисленные по формулам (см. табл. 2). Инфимум вычислен также по формулам согласно теореме 2, за исключением строк 9–12.

Таблица 1. Нахождение инфимума в задачах (1), (6).

Номер строки	σ	Точки роста экстремальных функций распределения	Инфимум
1	2	$x_7 = 21{,}09$; $y_7 = 30{,}09$; $z_7 = 39{,}09$	0,9835
2	3	$x_7 = 16{,}59$; $y_7 = 30{,}09$; $z_7 = 43{,}59$	0,9835
3	4	$x_7 = 12{,}094$; $y_7 = 30{,}125$; $z_7 = 48{,}094$	0,9835
4	5	$x_7 = 7{,}6$; $y_7 = 30{,}1$; $z_7 = 52{,}6$	0,9835
5	6	$x_7 = 3{,}1$; $y_7 = 30{,}1$; $z_7 = 57{,}1$	0,9835
6	6,686	$x_7 = 0{,}0156$; $y_7 = 30{,}1$; $z_7 = 60{,}2$	0,9835
7	6,687	$x_{75} = 0$; $y_{75} = 30{,}1$; $z_{75} = 60{,}2$	0,9835
8	6,688	$x_{75} = 0$; $y_{75} = 30{,}1$; $z_{75} = 60{,}2$	0,9835
9	7	$x_5 = 0$; $y_5 = 30$; $z_5 = 61{,}6$	0,9836
10	8	$x_5 = 0$; $y_5 = 29$; $z_5 = 66{,}5$	0,9842
11	8,2	$x_5 = 0$; $y_5 = 28{,}5$; $z_5 = 67{,}5$	0,9843
12	8,25	$x_5 = 0$; $y_5 = 28{,}375$; $z_5 = 67{,}81$	0,9843
13	8,26	$x_{52} = 0$; $y_{52} = 28{,}375$; $z_{52} = 67{,}875$ ($y_{52} = 28{,}293$; $z_{52} = 67{,}87$)	0,9843
14	8,27	$x_{22} = 28{,}25; 28{,}375$; $y_{22} = 67{,}875$ ($x_{22} = 28{,}291$; $y_{22} = 67{,}91$)	0,9843
15	8,28	$x_{22} = 28{,}25; 28{,}375$; $y_{22} = 67{,}94$ ($x_{22} = 28{,}289$; $y_{22} = 67{,}96$)	0,9843
16	8,29	$x_{22} = 28{,}25; 28{,}375$; $y_{22} = 68{,}0$ ($x_{22} = 28{,}287$; $y_{22} = 68{,}00$)	0,9843
17	9	$x_{22} = 28{,}25; 28{,}125$; $y_{22} = 71{,}25$ ($x_{22} = 28{,}13$; $y_{22} = 71{,}25$)	0,9843
18	10	$x_{22} = 27{,}875; 28$; $y_{22} = 75{,}80$ ($x_{22} = 27{,}91$; $y_{22} = 75{,}8$)	0,9843

В третьем столбце числа имеют одну или две точные цифры после запятой. Строки 7, 8 и 13 содержат граничные распределения.

Из вычислений следует, что экстремальными ф.р. в задаче (6) могут быть такие ступенчатые функции распределения: $G_7(x)$, $G_5(x)$, $G_{22}(x)$. Опишем их более подробно.

Точки роста x_7, y_7, z_7 трехступенчатой ф.р. G_7 принадлежат интервалам $x_7 \in (0, s_1 - 3\sigma)$, $y_7 \in (s_1 - 3\sigma, s_1 + 3\sigma)$, $z_7 > s_1 + 3\sigma$ и удовлетворяют системе уравнений (см. (8), (9))

$$L(x, y) = 0, \; L(y, z) = 0, \; M(x, y, z) = 0 .$$

Многочлен $U_7(x)$, соответствующий ф.р. G_7, касается функции $g(x)$ (см. (5)) в точках x_7, y_7, z_7 и симметричен относительно оси, проходящей через точку $y_7 = s_1$, $g(s_1) = 1$. Поэтому при $y_7 = s_1$ справедливы равенства

$$L(x, y) = \frac{3\sigma}{(s_1 - x)^2} - \frac{2(s_1 - x - 3\sigma)}{(y - x)^2} = 0 \leftrightarrow \frac{3\sigma}{2} = s_1 - 3\sigma - x \to x_7 = s_1 - 4{,}5\sigma;$$

$$L(y, z) = 0 \leftrightarrow -\frac{3\sigma}{(z - s_1)^2} - \frac{2(3\sigma - z + s_1)}{(z - s_1)^2} = 0 \leftrightarrow \frac{3\sigma}{2} = z - s_1 + 3\sigma \to z_7 = s_1 + 4{,}5\sigma.$$

Таким образом, ф.р. G_7 имеет точки роста $x_7 = s_1 - 4{,}5\sigma$, $y_7 = s_1$, $z_7 = s_1 + 4{,}5\sigma$, которые удовлетворяют также уравнению $M(x, y, z) = 0$.

Функция распределения $G_5(x)$ имеет точки роста $x_5 = 0$, $y_5 \in (s_1 - 3\sigma, s_1 + 3\sigma)$, $z_5 > s_1 + 3\sigma$, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} L(y, z) = 0, u < y < v < z, \\ M(0, y, z) = 0, u < y < v < z. \end{cases} \tag{10}$$

Эту систему сложно решить аналитически, так как она содержит высокие степени y, z. Численно эти точки находятся с помощью программы.

Наконец, рассмотрим ф.р. G_{22}. Она имеет две точки роста: $x_{22} \in (s_1 - 3\sigma, s_1 + 3\sigma)$, $y_{22} > s_1 + 3\sigma$, связянные уравнением $L(x_{22}, y_{22}) = 0$, $y_{22} = B(x_{22})$. Покажем, что выполняются необходимые условия для существования решения этого уравнения. Из (7) следует, что $B(v) = \dfrac{3s_1 - \sigma}{3}$. Легко проверить, что $u < B(v) < s_1$ и $L(B(v), v + 0) = -\dfrac{1}{v - m} < 0$. Вычислим

$$B(n) = \frac{s_1 n - s_2}{n - s_1} \to s_1, n \to \infty ,$$

$$B(v) < B(n) < s_1 \; ; \; L(B(n), n) = -\frac{v - s_1}{(n - s_1)^2} - \frac{2(n - v)}{(n - s_1)(n - B(n))} \approx -\frac{3\sigma}{n^2} + \frac{2}{n} > 0 .$$

Следовательно, выполняются условия $L(B(v), v + 0) < 0$, $\exists n L(B(n), n) > 0$. Тогда $\exists x_{22} \in (B(v), B(n))$ такое, что $L(x_{22}, B(x_{22})) = 0$. Найдем x_{22}. Обозначим $z = s_1 - x_{22}$ и подставим его в уравнение

$$L(x_{22}, B(x_{22})) = 0 \leftrightarrow \frac{3z}{\sigma} = \frac{2\sigma(\sigma - 3z)}{\sigma^2 + z^2} \leftrightarrow z^3 + 3\sigma^2 z - \frac{2\sigma^3}{3} = 0 . \tag{11}$$

Это кубическое уравнение можно решить с помощью формул Кардано. Общий вид кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ с помощью подстановки и деления на a преобразуется в уравнение

$$y^2 + 3py + 2q = 0, \tag{12}$$

где $2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$; $3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$.

Число действительных корней уравнения (11) зависит от знака дискриминанта $D = q^2 + p^3$. Если $D > 0$, то уравнение имеет одно действительное решение и два мнимых. В случае (11) имеем $a = 1$, $b = 0$, $c = 3\sigma^2$, $d = -\frac{2\sigma^3}{3}$. По формулам (12) вычисляем $2q = -\frac{2\sigma^3}{3}$; $3p = 3\sigma^2$; $D = \frac{10\sigma^6}{9} > 0$. Действительное решение имеет вид $z_1 = u_1 + v_1$, где $u_1 = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}}$; $v_1 = \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}$. В данном случае $u_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{10}{9}}}\,\sigma = 1{,}11532\sigma$, $v_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{10}{9}}}\,\sigma = -0{,}89659\sigma$. Искомый корень уравнения (11) равен $z = u_1 + v_1 = 0{,}2187\sigma$. Из $z = s_1 - x_{22}$ следует $x_{22} = s_1 - 0{,}2187\sigma$; $B(x_{22}) = \frac{s_2 - s_1 x_{22}}{0{,}2187\sigma} = \frac{\sigma}{0{,}2187} + s_1$.

ПОСТРОЕНИЕ РАЗБИЕНИЯ ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРОВ

Пусть ф.р. $G(x)$ имеет точки роста x_1, x_2, x_3. Исходя из моментных условий им соответствуют следующие вероятности (скачки):

$$p_1 = \frac{(x_2 - B(x_3))(x_3 - s_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}; \quad p_2 = \frac{(x_3 - B(x_1))(s_1 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)};$$

$$p_3 = \frac{(B(x_3) - x_1)(x_3 - s_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}. \tag{13}$$

Если вероятность в какой-либо точке равна нулю, то две другие точки связаны между собой соответствующими соотношениями

$$p_1 = 0 \to x_2 = B(x_3); \quad p_2 = 0 \to x_3 = B(x_1); \quad p_3 = 0 \to x_2 = B(x_1). \tag{14}$$

Отметим, что $\forall i \; p_i > 0 \leftrightarrow 0 \le x_1 < B(x_3) < x_2 < B(x_1) < x_3$.

Условимся подобласти разбиения обозначать так же, как и функции распределения, экстремальные в соответствующей подобласти. Рассмотрим следующую последовательность подобластей: G_7, G_5, G_{22}. Соответствующая экстремальная функция распределения в каждой подобласти является семейством ф.р., так как ее точки роста изменяются вместе с изменением параметров. Поскольку функция $g(x)$ (см. (5)) непрерывна, то на границе между подобластями возникает граничная ф.р., которая не является семейством, а определяется единственным фиксированным набором значений всех параметров. Она совпадает с соседними ф.р., а соответствующий ей многочлен совпадает с соседними экстремальными многочленами. Так, граничная ф.р. $G_{75}(x)$ между функциями распределения G_7 и G_5 имеет точки роста: $x_{75} = x_7 = x_5 = 0$, $y_{75} = y_7 = y_5 = s_1$, $z_{75} = z_7 = z_5 = s_1 + 4{,}5\sigma$, а граничное значение $\sigma = \sigma_1$, разделяющее области G_7 и G_5, находится из уравнения $L(0, y_{75}) = 0$. Это уравнение равносильно уравнению $\frac{3\sigma}{s_1^2} - \frac{2s_1 - 6\sigma}{s_1^2} = 0$, откуда $\sigma_1 = 6{,}688$ при $s_1 = 30{,}1$. Поскольку $[L(0, y_{75})]'_\sigma > 0$,

Таблица 2. Разбиение области параметров в задачах (5), (6).

Область параметров	Распределения, которые могут быть экстремальными	Точки роста соответствующих функций распределения
$L(0,\ y_7)<0$	G_7	$x_7 = s_1 - 4{,}5\sigma$; $y_7 = s_1$; $z_7 = s_1 + 4{,}5\sigma$; $x_7 \in (0, s_1 - 3\sigma)$; $y_7 \in (s_1 - 3\sigma, s_1 + 3\sigma)$; $z_7 > s_1 + 3\sigma$
$L(0,\ y_5)>0$, $M(0, B(z_5), z_5)<0$	G_5	$x_5 = 0$; точки y_5, z_5 находятся из системы уравнений (10)
$M(0, x_{22}, B(x_{22}))>0$	G_{22}	$x_{22} = s_1 - 0{,}2187\sigma$; $B(x_{22}) = \dfrac{\sigma}{0{,}2187} + s_1$

то знак $L(0,\ y_{75})$ при переходе через границу $\sigma = \sigma_1$ будет меняться с минуса на плюс. Таким образом, в области G_7 будет выполняться неравенство $L(0,\ y_7)<0$, а в области G_5 — неравенство $L(0,\ y_5)>0$.

Рассмотрим переход из подобласти G_5 в подобласть G_{22}. Граничная ф.р. G_{52} имеет точки роста: $x_{52} = 0$ (с нулевой вероятностью (см. (13), (14))), $y_{52} = B(z_5) = x_{22}$, $z_{52} = z_5 = B(x_{22})$. Граничное значение $\sigma = \sigma_2$ между областями G_5 и G_{22} находится из уравнения $M(0, B(z_{52}), z_{52}) = 0$, которое следует из равенства старших коэффициентов граничного многочлена U_{52}. Поскольку $[M(0, B(z_{52}), z_{52})]_{\sigma=\sigma_2} = 0$ и $[M(0, B(z_{52}), z_{52})]'_{\sigma} > 0$, то знак $[M(0, B(z_{52}), z_{52})]$ при переходе через границу σ_2 будет меняться с минуса на плюс. Следовательно, в области G_5 имеем $[M(0, B(z_5), z_5)]<0$, а в области G_{22} имеем $M(0, x_{22}, B(x_{22}))>0$.

Для наглядности полученное разбиение области параметров отобразим в табл. 2. Отметим, что это разбиение области параметров является единственным.

Доказательство экстремальности функций распределения G_7, G_5, G_{22}. Известно [6], что для линейного функционала $R(G) = \int_0^{\infty} g(x) dG(x), G \in K$, ($g(x)$ — ограниченная функция, дважды дифференцируемая в некоторых точках) справедливо равенство $\inf_{G\in K} R(G) = \inf_{G\in[E]} R(G)$, где $[E]$ — замыкание множества E крайних распределений выпуклого множества K. Оно содержит одно-, двух- или трехступенчатые функции распределения. Каждой такой ф.р. $G_i(x)$ соответствует многочлен $U_i(x)$ степени не выше второй, который совпадает с функцией $g(x)$ в точках роста ф.р. $G_i(x)$ и касается $g(x)$ в некоторых из них. Обозначим $\varphi_i(x) = g(x) - U_i(x)$. Справедлива следующая теорема, доказанная в [7].

Теорема 1 [7]. Чтобы инфимум линейного функционала $R(G)$, $G \in E$, достигался на некоторой ф.р. $G_i \in E$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \ge 0$: $\varphi_i(x) \ge 0$.

Теорема 1 будет использована при доказательстве теоремы 2.

Теорема 2. Сформулируем результаты решения задачи (6).

— В области параметров, определяемой неравенством $L(0,\ y_7)<0$, точная нижняя грань функционала $J(G), G \in K$, достигается на ф.р. $G_7(x)$ с точками роста $x_7 = s_1 - 4{,}5\sigma$; $y_7 = s_1$; $z_7 = s_1 + 4{,}5\sigma$ и равна 0,9835.

— В области параметров, определяемой неравенствами $L(0,\ y_5)>0$, $M(0, B(z_5), z_5)<0$, инфимум $J(G), G \in K$, достигается на ф.р. $G_5(x)$ с точками роста $x_5 = 0$, y_5, z_5, удовлетворяющими системе (10).

— В области параметров, определяемой неравенством $M(0, x_{22}, B(x_{22})) > 0$, точная нижняя грань функционала $J(G)$, $G \in K$, достигается на ф.р. $G_{22}(x)$ с точками роста $x_{22} = s_1 - 0{,}2187\sigma$; $B(x_{22}) = \dfrac{\sigma}{0{,}2187} + s_1$ и равна 0,9843.

Доказательство теоремы 2. Доказательство экстремальности ф.р. $G_7(x)$ тривиально. Вычислим инфимум, который ф.р. G_7 доставляет функционалу $J(G)$ в области $L(0, y_7) < 0$:

$$\inf_{G \in K} J(G) = J(G_7) = \frac{3\sigma}{s_1 - x_7} p_1 + 1 p_2 + \frac{3\sigma}{z_7 - s_1} p_3 = \frac{3}{4{,}5}(p_1 + p_3) + p_2 = \frac{3}{4{,}5} + p_2 \frac{1}{3}.$$

Вычислим

$$p_2 = \frac{(z_7 - B(x_7))(s_1 - x_7)}{(y_7 - x_7)(z_7 - y_7)} = \frac{4{,}5^2 - 1}{4{,}5^2} = 0{,}95062.$$

Итак, $J(G_7) = 0{,}9835$.

Рассмотрим доказательство экстремальности ф.р. G_5. Этой ф.р. соответствует многочлен $U_5(x) = g(y_5) + g'(y_5)(x - y_5) + a_5(x - y_5)^2 = 1 + a_5(x - y_5)^2$. Он совпадает с $g(x)$ при $x = 0$: $U_5(0) = g(0) = \dfrac{3\sigma}{s_1}$. Отсюда следует $a_5 = -\dfrac{s_1 - 3\sigma}{s_1 y_5^2}$. Учитывая последнее равенство, вычислим $\varphi'_5(0) = g'(0) - U'_5(0) = \dfrac{3\sigma}{s_1^2} + 2a_5 y_5$, в которое подставим a_5 и получим $\varphi'_5(0) = \dfrac{3\sigma}{s_1^2} - \dfrac{2(s_1 - 3\sigma)}{s_1 y_5} = L(0, y_5)$. По условию теоремы 2 $L(0, y_5) > 0$, поэтому $\varphi'_5(0) > 0$. Итак, для $x \in (0, s_1 - 3\sigma)$ справедливо утверждение $(\varphi_5(0) = 0;\ \varphi'_5(0) = 0,\ \varphi''_5(x) > 0) \to \varphi_5(x) \geq 0$. Доказательство неравенства $\varphi_5(x) \geq 0$ для интервалов $x \in (s_1 - 3\sigma, s_1 + 3\sigma)$, $x \in (s_1 + 3\sigma, \infty)$ тривиально. Итак, экстремальность G_5 доказана. Аналитически определить $J(G_5)$ и точки роста G_5 не удалось. В табл. 1 содержатся численные значения y_5, z_5 и соответствующий инфимум при фиксированном $s_1 = 30{,}1$ и $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. Инфимум незначительно возрастает от 0,9836 до 0,9843.

Докажем экстремальность G_{22}. Рассмотрим переход из подобласти G_5 в подобласть G_{22}. Граничная ф.р. G_{52} имеет точки роста: $x_{52} = 0$, $y_{52} = B(z_5) = x_{22}$, $z_{52} = z_5 = B(x_{22})$, так как вероятность в точке x_{52} равна нулю. Граничное значение $\sigma = \sigma_2$ находится из уравнения $M(0, y_{52}, z_{52}) = 0$: $\sigma_2 \approx 8{,}26$, $y_{52} = 28{,}293$, $z_{52} = 67{,}87$. На границе имеем $a_{22} = a_{52}$, $\varphi'_{22}(0) = \varphi'_{52}(0) = L(0, y_{52}) > 0$. При $\sigma > \sigma_2$

$$a_{22} = \frac{g'(B(x_{22}))}{2(B(x_{22}) - x_{22})};\quad \varphi'_{22}(0) = g'(0) + 2a_{22}x_{22} = \frac{3\sigma}{s_1^2} - \frac{3 \cdot 0{,}2187^3 (s_1 - 0{,}2187\sigma)}{\sigma^2 (1 + 0{,}2187^2)};$$

$$[\varphi'_{22}(0)]'_\sigma = \frac{3}{s_1^2} + \frac{3 \cdot 0{,}2187^3 (2s_1 - 0{,}2187\sigma)}{\sigma^3 (1 + 0{,}2187^2)} > 0.$$

Итак, при $\sigma = \sigma_2$ справедливо $\varphi_{22}(0) = 0$, $\varphi'_{22}(0) > 0$, а при $\sigma > \sigma_2$ $\varphi'_{22}(0)$ возрастает от положительного числа. Поэтому во всей области $\sigma > \sigma_2$ выполняется неравенство $\varphi'_{22}(0) > 0$. В этой же области выполняются соотношения

$M(0, x_{22}, B(x_{22})) = \dfrac{\varphi_{22}(0)}{x_{22}^2} > 0$. Итак, для $x \in (0, s_1 - 3\sigma)$ справедливо утверждение $\{\varphi_{22}(0) \ge 0, \varphi'_{22}(0) > 0, \varphi''_{22}(0) > 0\} \to \varphi_{22}(0) \ge 0$. Доказательство неравенств $\varphi_{22}(x) \ge 0$ для двух остальных интервалов тривиально. Следовательно, экстремальность ф.р. G_{22} в области $M(0, x_{22}, B(x_{22})) > 0$ доказана.

Вычислим инфимум, который ф.р. G_{22} доставляет функционалу $J(G)$.

Справедливы следующие равенства:

$$p_1 = \frac{B(x_{22}) - s_1}{B(x_{22}) - x_{22}}, \quad p_2 = \frac{s_1 - x_{22}}{B(x_{22}) - x_{22}}, \quad B(x_{22}) - x_{22} = \frac{\sigma^2}{s_1 - x_{22}} + s_1 - x_{22},$$

$$s_1 - x_{22} = 0{,}2187\sigma, \quad B(x_{22}) - s_1 = \frac{\sigma^2}{s_1 - x_{22}};$$

$$J(G_{22}) = p_1 + g(B(x_{22}))p_2 = \frac{1}{1 + 0{,}2187^2} + \frac{3 \cdot 0{,}2187^3}{1 + 0{,}2187^2} = 0{,}9843.$$

Теорема 2 доказана полностью.

Следствие. Из всех точных нижних границ вероятностей попадания случайной величины ξ в интервал $(m - \sigma_\mu 3\sqrt{3}, m + \sigma_\mu 3\sqrt{3})$ при условии, что ее функция распределения $F(x)$ принадлежит классу A, наибольшая вероятность равна 0,9843. Она достигается в области параметров, определяемой неравенством $M(0, x_{22}, B(x_{22})) > 0$, и не зависит от заданных параметров m, σ_μ:

$$\max_{F \in A} \inf \int_{u = m - \sigma_\mu 3\sqrt{3}}^{v = m + \sigma_\mu 3\sqrt{3}} dF(x) = \max_{G \in K} \inf J(G) = J(G_{22}) = 0{,}9843. \qquad (15)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Точное наибольшее значение (супремум) интеграла (15) при всех значениях параметров равно единице и достигается на функциях распределения, точки роста которых расположены в интервае (u, v). Следует отметить, что если зафиксировать σ и изменять s_1, то получим тот же результат (15). Не исключено, что он может быть применен при проектировании высокоточных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стойкова Л.С. Точные верхние границы вероятности отказа системы в интервале времени при неполной информации о функции распределения. *Кибернетика и системный анализ.* 2004. № 5. С. 72–83.
2. Стойкова Л.С. Точные нижние границы вероятности отказа системы в интервале времени при неполной информации о функции распределения. *Кибернетика и системный анализ.* 2015. № 2. С. 108–116.
3. Стойкова Л.С., Красников Н.И. Точные нижние границы вероятности отказа системы в интервале времени при неполной информации о функции распределения. *East European Scientific Journal* (Warszawa, Polska). 2015. Vol. 1, 4(4). Czesc 2. P. 94–105.
4. Стойкова Л.С., Красников Н.И. Точные нижние границы вероятности отказа системы в интервале времени при неполной информации о функции распределения времени до отказа системы. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. Т. 52, № 6. С. 84–94.

5. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. Москва: Наука, 1976. 568 с.
6. Mulholland H.P., Rogers C.A. Representation theorems for distribution functions. *Proc. London. Math. Soc.* 1958. Vol. 52, N 3. P. 177–223.
7. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Москва: Наука, 1973. 551 с.

Надійшла до редакції 07.09.2016

Л.С. Стойкова

НАЙБІЛЬША ТОЧНА НИЖНЯ ГРАНИЦЯ ЙМОВІРНОСТІ ВІДМОВИ СИСТЕМИ В СПЕЦІАЛЬНОМУ ІНТЕРВАЛІ ЧАСУ ПРИ НЕПОВНІЙ ІНФОРМАЦІЇ ЩОДО ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ЧАСУ ДО ВІДМОВИ СИСТЕМИ

Анотація. Розв'язується задача знаходження точних нижніх границь імовірності $F(v)-F(u)$, $0<u<v<\infty$, де $u=m-\sigma_\mu 3\sqrt{3}$, $v=m+\sigma_\mu 3\sqrt{3}$, σ_μ — фіксована дисперсія в множині функцій розподілу $F(x)$ невід'ємних випадкових величин з унімодальною диференційованою щільністю з модою, рівною m, і двома першими фіксованими моментами μ_1, μ_2. Розглянуто випадок, коли мода збігається з першим моментом: $m=\mu_1$. Знайдено найбільшу ймовірність із всіх точних нижніх границь ймовірностей для даної задачі, і вона є близькою до 1, а саме рівна 0,98430.

Ключові слова: екстремум лінійного функціоналу, клас унімодальних функцій розподілу з двома першими фіксованими моментами, розбиття області параметрів.

L.S. Stoikova

GREATEST LOWER BOUND OF SYSTEM FAILURE PROBABILITY IN A SPECIAL TIME INTERVAL UNDER INCOMPLETE INFORMATION ABOUT THE DISTRIBUTION FUNCTION OF THE TIME TO FAILURE OF SYSTEM

Abstract. The author solves the problem of finding exact lower bounds for the probability $F(v)-F(u)$, $0<u<v<\infty$ where $u=m-\sigma_\mu 3\sqrt{3}$, $v=m+\sigma_\mu 3\sqrt{3}$, and σ_μ is a fixed dispersion in the set of distribution functions $F(x)$ of non-negative random variables with unimodal differentiable density with mode m and two first fixed moments μ_1, μ_2. The case is considered where the mode coincides with the first moment: $m=\mu_1$. The greatest lower bound of all possible exact lower bounds for this problem is obtained and it is nearly one, namely, is equal to 0.98430.

Keywords: extremum of a linear functional, the set of unimodal distribution functions with two first fixed moments, partition of the domain of parameters.

Стойкова Лидия Степановна, доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
e-mail: stojk@ukr.net.