УДК 517.9: 519.6

В.М. БУЛАВАЦКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ С ПРОИЗВОДНОЙ ХИЛЬФЕРА–ПРАБХАКАРА

Аннотация. Построена обобщенная математическая модель для описания дробно-дифференциальной динамики процессов фильтрации в трещиновато-пористых средах, основанная на использовании понятия дробной производной Хильфера–Прабхакара. В рамках указанной модели получены замкнутые решения ряда краевых задач теории фильтрации о моделировании динамики давлений при пуске скважин в случае плоско-радиальной фильтрации, а также работе галерей в условиях плоско-параллельной фильтрации.

Ключевые слова: математическое моделирование, дробно-дифференциальная динамика фильтрационных процессов, трещиновато-пористые среды, неклассические модели, уравнение фильтрации с дробной производной Хильфера–Прабхакара, краевые задачи, замкнутые решения.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование динамики миграционных процессов в сложных условиях существенного отклонения от равновесного состояния [1] актуально для многих задач геоинформатики, геоматематики и геоэкологии, в частности при изучении вопросов охраны подземных вод от загрязнения промышленными или бытовыми стоками либо засоления орошаемых земель [2, 3]. Для моделирования динамики указанных процессов эффективен подход, базирующийся на идеях интегро-дифференцирования дробного порядка [4–8]. На его основе построены новые математические модели динамики геофильтрационных процессов в геопористых и трещиновато-пористых средах в условиях их временной неравновесности и получены решения некоторых краевых задач теории неравновесной геофильтрации [9, 10]. С использованием данного подхода также созданы дробно-дифференциальные математические модели некоторых связанных локально-неравновесных процессов миграции солевых растворов и найдены приближенные решения соответствующих краевых задач как в одномерном, так и в двухмерном случаях [11–13].

В настоящей работе построена новая математическая модель для описания неравновесной во времени динамики фильтрационного процесса в трещиновато-пористой среде. Выполнены постановки основных фильтрационных краевых задач прикладного направления, моделирующих работу скважин и галерей в трещиновато-пористых пластах, и получены замкнутые решения указанных задач. Отметим достаточно большую общность рассматриваемой фильтрационной математической модели, достигаемую вследствие использования понятия дробной производной Хильфера–Прабхакара — обобщения производной Хильфера (в свою очередь, являющейся обобщением производных Капуто и Римана–Лиувилля [4–8]).

Согласно [14, 15] дробная производная Хильфера–Прабхакара определяется соотношением

$$\widetilde{D}^{\gamma,\mu,\nu}_{\rho,\omega,0+} f(t) = \left(\Xi^{-\gamma\nu}_{\rho,\nu(1-\mu),\omega,0+} \frac{d}{dt} (\Xi^{-\gamma(1-\nu)}_{\rho,(1-\nu)(1-\mu),\omega,0+} f) \right)(t), \qquad (1)$$

где $\mu \in (0,1)$, $\nu \in [0,1]$, $f \in L^1[0,b]$, $0 < t < b \le \infty$, $\gamma, \omega \in R$, $\rho > 0$, $(\Xi^0_{\rho,0,\omega,0+} f)(t) = f(t)$, $\Xi^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0+} f(t)$ — интеграл Прабхакара [16], определяемый как

$$\Xi^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0+} f(t) = \int_0^t (t-y)^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}[\omega(t-y)^{\rho}] f(y) dy =$$

$$= (f * e^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega})(t), \quad e^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega}(t) = t^{\mu-1} E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho}), \tag{2}$$

$f * e^{-\gamma(1-\nu)}_{\rho,(1-\nu)(1-\mu),\omega}(\cdot) \in AC^1[0,b]$, $E^{\gamma}_{\rho,\mu}(z)$ — обобщенная функция Миттаг–Лефлера, введенная в [16].

Ниже используется регуляризованная версия производной Хильфера–Прабхакара (1), определяемая соотношением [14–17]

$${}^C D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+} f(t) = \left(\Xi^{-\gamma\nu}_{\rho,\nu(1-\mu),\omega,0+} \Xi^{-\gamma(1-\nu)}_{\rho,(1-\nu)(1-\mu),\omega,0+} \frac{d}{dt} f \right)(t) =$$

$$= \left(\Xi^{-\gamma}_{\rho,(1-\mu),\omega,0+} \frac{d}{dt} f \right)(t) \tag{3}$$

и не зависящая от интерполяционного параметра ν.

ОБОБЩЕННАЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ДИНАМИКИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

Математическая модель фильтрации в трещиновато-пористых пластах, ставшая уже классической, разработана в [18] и предполагает наличие среды с двойной пористостью: пористые блоки, разделяемые системой трещин. При этом трещиновато-пористая среда считается сплошной средой и все ее характеристики берутся осредненными. Два вида пустот в трещиновато-пористых средах различаются по воздействию на процесс фильтрации. Хотя размеры отдельных пор в блоках малы, доля суммарного объема пор в общем объеме грунта довольно значительна. При этом блоки малопроницаемы. Что касается трещин, то их объем невелик, однако трещинная проводимость существенно превосходит проводимость блоков [18, 19].

Соответствующая схема вывода уравнений фильтрации в трещиновато-пористой среде детально изложена, например, в [19] и кратко состоит в следующем.

Записывая уравнения неразрывности фильтрационного потока в системе трещин и пористых блоков в виде

$$\beta_1^* \frac{\partial p_1}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u}_1 = q, \tag{4}$$

$$\beta_2^* \frac{\partial p_2}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u}_2 = -q, \tag{5}$$

с учетом закона Дарси получаем

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \tau_1 (p_2 - p_1) = \kappa_1 \Delta p_1, \tag{6}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + \tau_2 (p_2 - p_1) = \kappa_2 \Delta p_2, \tag{7}$$

где p_1, p_2 — давление в системе трещин и пористых блоках соответственно,

$\vec{u}_1$ — скорость фильтрации в системе трещин, $\vec{u}_2$ — скорость фильтрации в пористых блоках, $q = \dfrac{\alpha_0}{\mu}(p_2 - p_1)$ — интенсивность перетока [18], α_0 — коэффициент перетока, μ — вязкость жидкости, β_i^* $(i = 1,2)$ — коэффициенты упругоемкости обеих сред, $\kappa_i = \dfrac{k_i}{\mu \beta_i^*}$ $(i = 1,2)$ — величины пьезопроводности в системе трещин и пористых блоков, k_i $(i = 1,\, 2)$ — коэффициенты фильтрации в системе трещин и пористых блоков соответственно, $\tau_i = \dfrac{\alpha_0}{\mu \beta_i^*}$ $(i = 1,2)$, Δ — оператор Лапласа по геометрическим переменным.

Введя обозначения

$$\varepsilon_1 = \frac{\beta_1^*}{\beta_2^*},\ \varepsilon_2 = \frac{k_2}{k_1},\ \kappa = \frac{k_1}{\mu \beta_2^*},\ \tau_r = \frac{\mu \beta_2^*}{\alpha_0},$$

перепишем систему (6), (7) в виде

$$\varepsilon_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = \kappa \Delta p_1, \tag{8}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = \varepsilon_2 \kappa \Delta p_2, \tag{9}$$

или с учетом $\varepsilon_1 << 1$, $\varepsilon_2 << 1$ [19] имеем из (8), (9)

$$\frac{p_2 - p_1}{\tau_r} + \kappa \Delta p_1 = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = 0. \tag{11}$$

Исключая из (10), (11), например, функцию p_2, получаем следующее уравнение фильтрации в трещиновато-пористой среде [18, 19]:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \kappa \left[\Delta p_1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t} (\Delta p_1) \right], \tag{12}$$

где τ_r — положительный вещественный параметр (параметр релаксации).

В случае неравновесного во времени фильтрационного процесса вместо (4), (5) предположим выполнение обобщенных уравнений неразрывности в системе трещин и пористых блоков в виде

$$\beta_1^* \ {}^C D_{\rho,\omega,0+}^{\gamma,\mu} p_1(x,t) + \operatorname{div} \vec{u}_1 = q, \tag{13}$$

$$\beta_2^* \ {}^C D_{\rho,\omega,0+}^{\gamma,\mu} p_2(x,t) + \operatorname{div} \vec{u}_2 = -q, \tag{14}$$

где ${}^C D_{\rho,\omega,0+}^{\gamma,\mu}$ — оператор регуляризованной производной Хильфера–Прабхакара [14], определяемый согласно (3).

Повторяя проведенные выше преобразования, получаем из (13), (14)

$$\frac{p_2 - p_1}{\tau_r} + \kappa \Delta p_1 = 0, \tag{15}$$

$${}^C D_{\rho,\omega,0+}^{\gamma,\mu} p_2(x,t) + \frac{p_2 - p_1}{\tau_r} = 0. \tag{16}$$

Исключая из системы уравнений (15), (16) функцию p_2, имеем следующее обобщенное уравнение неравновесной во времени фильтрации в трещиновато-пористой среде $(p(x,t) \equiv p_1(x,t))$:

$$^{C}D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+}\, p(x,t) = \kappa[\Delta p(x,t) + \tau_r\, {}^{C}D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+}\,(\Delta p(x,t))]\,. \tag{17}$$

Отсюда при $\gamma = 0$, $\mu \to 1$ получаем классическое уравнение фильтрации в трещиновато-пористой среде вида (12), при $\gamma = 0$, $\tau_r = 0$, $\mu \to 1$ — уравнение упругого режима фильтрации [19]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \Delta p, \tag{18}$$

а при $\gamma = 0$ — уравнение фильтрации в трещиновато-пористой среде в производных Капуто

$${}_0D_t^{(\mu)}\, p(x,t) = \kappa[\Delta p(x,t) + \tau_r\ {}_0D_t^{(\mu)}\,(\Delta p(x,t))]\,, \tag{19}$$

где ${}_0D_t^{(\mu)}$ — оператор производной Капуто по переменной t порядка μ [4–8].

Альтернативный способ получения уравнения релаксационной фильтрации вида (17) базируется на постулировании аналога фильтрационного закона Дарси в виде

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu}(\nabla p + \tau_r\, {}^{C}D^{\gamma_1,\mu_1}_{\rho,\omega,0+}\,(\nabla p)),$$

где ∇ — оператор Гамильтона, $\mu_1, \gamma_1 \in (0,1)$, τ_r — вещественный параметр. Тогда из обобщенного уравнения неразрывности потока

$$\beta^*\ {}^{C}D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+}\, p(x,t) + \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

(β^* — коэффициент упругоемкости пласта) получаем следующее обобщенное уравнение динамики неравновесного фильтрационного процесса с учетом релаксации давления:

$$^{C}D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+}\, p(x,t) = \kappa[\Delta\, p + \tau_r\, {}^{C}D^{\gamma_1,\mu_1}_{\rho,\omega,0+}\,(\Delta\, p)]\,. \tag{20}$$

Легко видеть, что из данного уравнения (как частный случай) можно получить как классическое уравнение фильтрации в трещиновато-пористой среде вида (12), так и уравнение упругого режима фильтрации (18), а также уравнение в производных Капуто вида (19). При $\gamma_1 = \gamma$, $\mu_1 = \mu$ уравнение (20) переходит в (17).

Далее получены замкнутые решения некоторых краевых задач теории фильтрации в трещиновато-пористых средах, поставленных, исходя из математической модели, описываемой уравнением вида (17).

ЗАДАЧА ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ РАБОТЕ СИСТЕМЫ ЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ И НАГНЕТАТЕЛЬНОЙ ГАЛЕРЕЙ

В случае плоско-параллельной фильтрации, при задании дебита Q_1 на эксплуатационной галерее и постоянного давления p_k на контуре нагнетательной галереи, имеем следующую краевую задачу:

$$^{C}D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+}\, p(x,t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}(p(x,t) + \tau_r\, {}^{C}D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+}\, p(x,t)), \tag{21}$$

$$\frac{\partial p(0,t)}{\partial x} = Q_1,\ \ p(l,t) = p_k, \tag{22}$$

$$p(x,0)=p_0, \tag{23}$$

где l — расстояние между галереями, Q_1, p_k, $p_0=\mathrm{const}$.

Переходя в (21)–(23) к однородным граничным условиям с помощью подстановки

$$P(x,t)=p(x,t)+(l-x)Q_1-p_k,$$

получаем для определения функции $P(x,t)$ краевую задачу

$${}^C D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+}P(x,t)=\kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}(P(x,t)+\tau_r\,{}^C D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+}P(x,t)), \tag{24}$$

$$\frac{\partial P(0,t)}{\partial x}=0,\ P(l,t)=0, \tag{25}$$

$$P(x,0)=f(x), \tag{26}$$

где $f(x)=p_0-p_k+(l-x)Q_1$.

Конечное интегральное преобразование Фурье по переменной x вида [20, 21]

$$\overline{P}_n(t)=\int_0^l P(x,t)\cos(\lambda_n x)dx\ \left(\lambda_n=\frac{\pi(2n-1)}{2l},\ n=1,2,\dots\right)$$

ставит в соответствие краевой задаче (24)–(26) задачу Коши

$${}^C D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+}\overline{P}_n(t)+\frac{\kappa\lambda_n^2}{1+\tau_r\kappa\lambda_n^2}\overline{P}_n(t)=0, \tag{27}$$

$$\overline{P}_n(0)=\theta_n, \tag{28}$$

где $\theta_n=\dfrac{1}{\lambda_n}\left[\dfrac{Q_1}{\lambda_n}+(-1)^{n+1}(p_0-p_k)\right]$.

На основе результатов работы [14] решение задачи (27), (28) запишем в виде

$$\overline{P}_n(t)=\theta_n\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{\kappa\lambda_n^2}{1+\tau_r\kappa\lambda_n^2}\right)^m e^{\gamma m}_{\rho,\mu m+1,\omega}(t), \tag{29}$$

где $e^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega}(t):=t^{\mu-1}E^{\gamma}_{\rho,\mu}(\omega t^{\rho})$ $(\mathrm{Re}\,\rho,\mathrm{Re}\,\mu>0)$, $E^{\gamma}_{\rho,\mu}(z)$ — трехпараметрическая функция Миттаг–Леффлера [16, 22].

Относительно условий сходимости ряда (29) необходимо отметить следующее. С учетом определения трехпараметрической функции Миттаг–Леффлера соотношение (29) перепишем в виде

$$\overline{P}_n(t)=\theta_n\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{\kappa\lambda_n^2}{1+\tau_r\kappa\lambda_n^2}\right)^m t^{\mu m}E^{\gamma m}_{\rho,\mu m+1}(\omega t^{\rho})=\theta_n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega^k t^{\rho k}}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}b_m^{(k,n)}t^{\mu m},$$

где $b_m^{(k,n)}=(-1)^m a_n^m\dfrac{\Gamma(\gamma m+k)}{\Gamma(\gamma m)\,\Gamma(\rho k+\mu m+1)}$, $a_n=\dfrac{\kappa\lambda_n^2}{1+\tau_r\kappa\lambda_n^2}$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [7, 22]. Ввиду абсолютной сходимости ряда, определяющего функцию $E^{\gamma m}_{\rho,\mu m+1}$, достаточно установить суммируемость по m при фиксированном k. Применяя изложенный в [23] подход, получаем

$$\left|\frac{b_{m+1}^{(k,n)}t^{\mu(m+1)}}{b_m^{(k,n)}t^{\mu m}}\right|=|a_nt^{\mu}|\left|\frac{\Gamma(\gamma(m+1)+k)}{\Gamma(\gamma m+k)}\right|\left|\frac{\Gamma(\gamma m)}{\Gamma(\gamma(m+1))}\right|\left|\frac{\Gamma(\rho k+\mu m+1)}{\Gamma(\rho k+\mu(m+1)+1)}\right|\approx$$

$$\approx|a_nt^{\mu}||\rho k+\mu m+1|^{-\mu}\to 0\ \ (m\to\infty)\,.$$

Отсюда следует абсолютная сходимость ряда (29).

Возвращаясь в соотношении (29) в область оригиналов по геометрической переменной, имеем

$$P(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{\kappa\lambda_n^2}{1+\tau_r\kappa\lambda_n^2}\right)^m e_{\rho,\mu m+1,\omega}^{\gamma m}(t)\theta_n\cos(\lambda_n x)\,. \tag{30}$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи определяется соотношением

$$p(x,t)=p_k-(l-x)Q_1+P(x,t)\,,$$

где $P(x,t)$ определяется формулой (30).

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ И НАГНЕТАТЕЛЬНОЙ ГАЛЕРЕЙ В ДВУХСЛОЙНОМ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ ПРИ ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрим двухслойный трещиновато-пористый пласт суммарной мощностью l. Пусть мощность первого слоя двухслойного пласта равна l_0 (давление p_1), тогда мощность второго слоя будет $l-l_0$ (давление во втором слое предположим равным p_2). Давления в слоях пласта определяются в результате решения краевой задачи

$${}^C D_{\rho,\omega,0+}^{\gamma,\mu}\, p_1(x,t)=\kappa_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}(p_1(x,t)+\tau_r\,{}^C D_{\rho,\omega,0+}^{\gamma,\mu}\, p_1(x,t))\ \ (0<x<l_0,\ t>0), \tag{31}$$

$${}^C D_{\rho,\omega,0+}^{\gamma,\mu}\, p_2(x,t)=\kappa_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(p_2(x,t)+\tau_r\,{}^C D_{\rho,\omega,0+}^{\gamma,\mu}\, p_2(x,t))\ \ (l_0<x<l,\ t>0), \tag{32}$$

$$\frac{\partial p_1(0,t)}{\partial x}=Q_1,\ \ p_2(l,t)=p_k, \tag{33}$$

$$p_1(l_0,t)=p_2(l_0,t)\,, \tag{34}$$

$$\left[\frac{\partial p_1}{\partial x}+\tau_r\,{}^C D_{\rho,\omega,0+}^{\gamma,\mu}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)\right]_{x=l_0-0}=\Lambda\left[\frac{\partial p_2}{\partial x}+\tau_r\,{}^C D_{\rho,\omega,0+}^{\gamma,\mu}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x}\right)\right]_{x=l_0+0}, \tag{35}$$

$$p_1(x,0)=p_2(x,0)=p_0\,, \tag{36}$$

где $\Lambda=k_2/k_1$, k_1, k_2 — коэффициенты фильтрации соответственно для первого и второго слоев, Q_1, p_k — заданные постоянные величины дебита и давления на линиях эксплуатационной и нагнетательной галерей, p_0 — начальное значение давлений.

Решение задачи (31)–(36) ищем в виде

$$p_i(x,t)=v_i(x)+P_i(x,t)\ \ (i=1,2)\,, \tag{37}$$

где

$$v_1(x) = p_k + Q_1 x + \frac{Q_1}{\Lambda}(l_0 - \Lambda l_0 - l), \; v_2(x) = p_k + \frac{Q_1}{\Lambda} x - \frac{Q_1 l}{\Lambda}. \tag{38}$$

Отсюда для определения функций P_1, P_2 получаем краевую задачу

$${}^C D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+} P_1(x,t) = \kappa_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (P_1(x,t) + \tau_r {}^C D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+} P_1(x,t)) \; (0 < x < l_0, \, t > 0), \tag{39}$$

$${}^C D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+} P_2(x,t) = \kappa_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (P_2(x,t) + \tau_r {}^C D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+} P_2(x,t)) \; (l_0 < x < l, \, t > 0), \tag{40}$$

$$\frac{\partial P_1(0,t)}{\partial x} = 0, \; P_2(l,t) = 0, \tag{41}$$

$$P_1(l_0,t) = P_2(l_0,t), \tag{42}$$

$$\left[\frac{\partial P_1}{\partial x} + \tau_r {}^C D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} \right) \right]_{x = l_0 - 0} = \Lambda \left[\frac{\partial P_2}{\partial x} + \tau_r {}^C D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+} \left(\frac{\partial P_2}{\partial x} \right) \right]_{x = l_0 + 0}, \tag{43}$$

$$P_1(x,0) = f_1(x), \quad P_2(x,0) = f_2(x), \tag{44}$$

где $f_i(x) = p_0 - v_i(x) \; (i = 1,2)$.

Частные решения рассматриваемой задачи ищем в виде

$$P_1(x,t) = \overline{X}(x)\overline{T}(t), \quad P_2(x,t) = \overline{\overline{X}}(x)\overline{\overline{T}}(t).$$

Разделяя переменные, получаем

$$\overline{X}''(x) + \lambda^2 \overline{X}(x) = 0, \; \overline{X}'(0) = 0 \; (0 < x < l_0), \tag{45}$$

$${}^C D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+} \overline{T}(t) + \frac{\kappa_1 \lambda^2}{1 + \tau_r \kappa_1 \lambda^2} \overline{T}(t) = 0 \; (t > 0), \tag{46}$$

$$\overline{\overline{X}}''(x) + \sigma^2 \overline{\overline{X}}(x) = 0, \; \overline{\overline{X}}(l) = 0 \; (l_0 < x < l), \tag{47}$$

$${}^C D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+} \overline{\overline{T}}(t) + \frac{\kappa_2 \sigma^2}{1 + \tau_r \kappa_2 \sigma^2} \overline{\overline{T}}(t) = 0 \; (t > 0), \tag{48}$$

где λ, σ — параметры разделения.

Решения задач (45), (47) имеют вид

$$\overline{X}(x) = A \frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\lambda l_0)}, \; \overline{\overline{X}}(x) = B \frac{\sin(\sigma(l - x))}{\sin(\sigma(l - l_0))},$$

где A, B — произвольные постоянные.

Соотношения (46), (48) определяют зависимость $\sigma = \lambda \sqrt{\kappa_1 / \kappa_2}$. Первое условие сопряжения (условие (42)) дает соотношение $A = B$, а из второго (условия (43)) получаем уравнение для определения собственных значений λ_n

$$\operatorname{tg}(\lambda_n l_0) = w\operatorname{ctg}(\lambda_n q),$$

где $w = \Lambda\sqrt{\kappa_1/\kappa_2}$, $q = (l - l_0)\sqrt{\kappa_1/\kappa_2}$.

Указанным собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\lambda_n x)}{\cos(\lambda_n l_0)} & (0 < x < l_0), \\ \dfrac{\sin(\sigma_n(l - x))}{\sin(\sigma_n(l - l_0))} & (l_0 < x < l) \end{cases} \tag{49}$$

и следующие решения уравнений (46), (48):

$$\overline{T}_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{\kappa_1\lambda_n^2}{1 + \tau_r\kappa_1\lambda_n^2}\right)^m e_{\rho,\mu m+1,\omega}^{\gamma m}(t), \tag{50}$$

$$\overline{\overline{T}}_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{\kappa_2\sigma_n^2}{1 + \tau_r\kappa_2\sigma_n^2}\right)^m e_{\rho,\mu m+1,\omega}^{\gamma m}(t), \tag{51}$$

где $\sigma_n = \lambda_n\sqrt{\kappa_1/\kappa_2}$.

С учетом изложенного решение задачи (39)–(44) получаем в виде

$$P(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) T_n(t), \tag{52}$$

где

$$P(x,t) = \begin{cases} P_1(x,t) & (0 < x < l_0), \\ P_2(x,t) & (l_0 < x < l), \end{cases}$$

функции $X_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ определяются согласно соотношениям (49), $T_n(t)$ $(n = 1, 2, \dots)$ — одним из соотношений (50), (51), а a_n $(n = 1, 2, \dots)$ — коэффициенты, подлежащие определению. Отсюда, принимая во внимание свойство ортогональности собственных функций задачи, в результате ряда простых, но громоздких преобразований находим искомые коэффициенты разложения (52) в виде

$$a_n = \delta_n^{-1}\left[\frac{1}{\cos(\lambda_n l_0)}\int_0^{l_0} f_1(x)\cos(\lambda_n x)dx + \frac{\Lambda\kappa_1}{\kappa_2\sin(\sigma_n(l - l_0))}\int_{l_0}^{l} f_2(x)\sin(\sigma_n(l - x))dx\right],$$

$$\delta_n = \frac{1}{4\lambda_n}\left[\frac{2l_0\lambda_n + \sin(2l_0\lambda_n)}{\cos^2(\lambda_n l_0)} + w\frac{2\sigma_n(l - l_0) - \sin(2\sigma_n(l - l_0))}{\sin^2(\sigma_n(l - l_0))}\right].$$

Последующий переход к функциям p_1, p_2 осуществляется согласно соотношениям (37), (38).

ПЛОСКО-РАДИАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ ПУСКЕ СКВАЖИНЫ С ЗАДАННЫМ ЗАБОЙНЫМ ДАВЛЕНИЕМ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

В этом случае требуется решить краевую задачу

$${}^{C}D_{\rho,\omega,0+}^{\gamma,\mu}\, p(r,t) = \kappa[\Delta_r p(r,t) + \tau_r\, {}^{C}D_{\rho,\omega,0+}^{\gamma,\mu}(\Delta_r p(r,t))] \quad (r_c < r < +\infty,\ t > 0), \tag{53}$$

$$p(r_c, t) = \varphi_1(t), \tag{54}$$

$$p(r,0) = \varphi_0(r), \ \ |p(r,t)| < +\infty, \tag{55}$$

где $r_c > 0$ — радиус скважины, φ_0, φ_1 — заданные функции, $\Delta_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$.

Применим к задаче (53)–(55) интегральное преобразование Вебера [21] вида

$$\hat{p}(\xi, t) = \int_{r_c}^{\infty} r p(r,t) W(r,\xi) dr$$

с формулой обращения

$$p(r,t) = \int_{0}^{\infty} \xi \hat{p}(\xi,t) W(r,\xi) d\xi, \tag{56}$$

где ядро преобразования определяется соотношением

$$W(r,\xi) = \frac{J_0(\xi r) Y_0(r_c \xi) - Y_0(\xi r) J_0(r_c \xi)}{\sqrt{J_0^2(r_c\xi) + Y_0^2(r_c\xi)}}$$

($J_0(z), Y_0(z)$ — функции Бесселя соответственно первого и второго рода порядка 0). В результате получаем задачу Коши

$$^{C}D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+}\, \hat{p}(\xi,t) + \frac{\kappa\xi^2}{1+\tau_r\kappa\xi^2}\, \hat{p}(\xi,t) = \frac{\kappa r_c}{1+\tau_r\kappa\xi^2} W_r'(r_c,\xi) f(t), \tag{57}$$

$$\hat{p}(\xi,0) = \hat{\varphi}_0(\xi), \tag{58}$$

где

$$\hat{\varphi}_0(\xi) = \int_{r_c}^{\infty} r\varphi_0(r) W(r,\xi) dr, \ \ f(t) = \varphi_1(t) + \tau_r\, {}^{C}D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+}\varphi_1(t),$$

$$W_r'(r_c,\xi) = -\frac{2}{\pi r_c \sqrt{J_0^2(r_c\xi) + Y_0^2(r_c\xi)}}.$$

Применяя к задаче Коши (57), (58) разработанную в [14] методику преобразования Лапласа, находим решение указанной задачи

$$\hat{p}(\xi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\kappa\xi^2}{1+\tau_r\kappa\xi^2}\right)^n \left[\hat{\varphi}_0(\xi) e^{\gamma n}_{\rho,\mu n+1,\omega}(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\kappa r_c}{1+\tau_r\kappa\xi^2} W_r'(r_c,\xi)\, \Xi^{\gamma(n+1)}_{\rho,\mu(n+1),\omega,0+} f(t)\right],$$

где $\Xi^{\gamma}_{\rho,\mu,\omega,0+} f(t)$ определяется соотношением (2).

Воспользовавшись формулой обращения (56), получим искомое решение рассматриваемой задачи в виде

$$p(r,t) = \int_0^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\kappa\xi^2}{1+\tau_r\kappa\xi^2}\right)^n \left[\hat{\varphi}_0(\xi) e^{\gamma n}_{\rho,\mu n+1,\omega}(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\kappa r_c}{1+\tau_r\kappa\xi^2} W_r'(r_c,\xi)\, \Xi^{\gamma(n+1)}_{\rho,\mu(n+1),\omega,0+} f(t)\right]\right\} \xi W(r,\xi) d\xi. \tag{59}$$

Отметим некоторые частные случаи.

1. При $\gamma=0$ производная Хильфера–Прабхакара преобразуется в производную Капуто порядка μ $(0<\mu<1)$ и уравнение (53) становится уравнением с производными Капуто. При этом решение соответствующей (53)–(55) краевой задачи для уравнения в производных Капуто получается из (59) и имеет вид

$$p(r,t)=\int_0^\infty \left\{\hat{\varphi}_0(\xi)E_\mu\left(-\frac{\kappa\xi^2 t^\mu}{1+\tau_r\kappa\xi^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\kappa r_c}{1+\tau_r\kappa\xi^2}W_r'(r_c,\xi)t^{\mu-1}\int_0^t E_{\mu,\mu}\left(-\frac{\kappa\xi^2}{1+\tau_r\kappa\xi^2}(t-\tau)^\mu\right)f(\tau)d\tau\right\}\xi W(r,\xi)d\xi, \quad (60)$$

где $E_\alpha(z), E_{\alpha,\beta}(z)$ — одно- и двухпараметрическая функции Миттаг–Леффлера [7, 8, 22] соответственно.

2. Положим в соотношении (60) $\mu=1$. Тогда из данного соотношения получаем решение соответствующей краевой задачи теории фильтрации в трещиновато-пористой среде в рамках математической модели Г.И. Баренблатта, Ю.П. Желтова, И.Н. Кочиной [18] в виде

$$p(r,t)=$$

$$=\int_0^\infty \left\{\hat{\varphi}_0(\xi)+\frac{\kappa r_c}{1+\tau_r\kappa\xi^2}W_r'(r_c,\xi)\int_0^t e^{\frac{\kappa\xi^2}{1+\tau_r\kappa\xi^2}\tau}f(\tau)d\tau\right\}e^{-\frac{\kappa\xi^2 t}{1+\tau_r\kappa\xi^2}}\xi W(r,\xi)d\xi. \quad (61)$$

3. Если в (61) положить $\tau_r=0$, то получаем решение соответствующей краевой задачи теории фильтрации в рамках классической модели упругого режима, совпадающее с приведенным в работе [24]:

$$p(r,t)=\int_0^\infty \left\{\hat{\varphi}_0(\xi)+\kappa r_c W_r'(r_c,\xi)\int_0^t e^{\kappa\xi^2\tau}\varphi_1(\tau)d\tau\right\}e^{-\kappa\xi^2 t}\xi W(r,\xi)d\xi.$$

ПЛОСКО-РАДИАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ ПУСКЕ СКВАЖИНЫ С ЗАДАННЫМ ДЕБИТОМ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ

В случае пуска скважины с заданным дебитом моделирование дробно-дифференциальной динамики давлений в трещиновато-пористом пласте сводится к решению краевой задачи для уравнения (53) при условиях

$$\left[\frac{\partial p}{\partial r}\right]_{r=r_c}=-\varphi_2(t), \quad (62)$$

$$p(r,0)=\Phi_0(r), \ |p(r,t)|<+\infty, \quad (63)$$

где $\varphi_2(t), \Phi_0(r)$ — заданные функции (соответственно дебита и начального распределения давления).

Применяя к задаче (53), (62), (63) интегральное преобразование Вебера вида [21]

$$\hat{p}(\xi,t)=\int_{r_c}^\infty rp(r,t)W^{(1)}(r,\xi)dr,$$

получаем вспомогательную задачу

$$ {}^{C}D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+}\,\hat{p}(\xi,t)+\frac{\kappa\xi^{2}}{1+\tau_{r}\kappa\xi^{2}}\,\hat{p}(\xi,t)=\frac{\kappa r_{c}}{1+\tau_{r}\kappa\xi^{2}}\,W^{(1)}(r_{c},\xi)f^{(1)}(t)\,, \tag{64} $$

$$ \hat{p}(\xi,0)=\hat{\Phi}_{0}(\xi), \tag{65} $$

где

$$ W^{(1)}(r,\xi)=\frac{J_{0}(\xi r)Y_{0}'(r_{c}\xi)-Y_{0}(\xi r)J_{0}'(r_{c}\xi)}{\sqrt{(J_{0}'(r_{c}\xi))^{2}+(Y_{0}'(r_{c}\xi))^{2}}},\ \ f^{(1)}(t)=\varphi_{2}(t)+\tau_{r}\,{}^{C}D^{\gamma,\mu}_{\rho,\omega,0+}\varphi_{2}(t)\,, $$

$$ \hat{\Phi}_{0}(\xi)=\int\limits_{r_{c}}^{\infty}r\Phi_{0}(r)W^{(1)}(r,\xi)dr. $$

С использованием методики преобразования Лапласа [14] можно показать, что решение задачи (64), (65) определяется соотношением

$$ \hat{p}(\xi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\kappa\xi^{2}}{1+\tau_{r}\kappa\xi^{2}}\right)^{n}\Bigg[\hat{\Phi}_{0}(\xi)e^{\gamma n}_{\rho,\mu n+1,\omega}(t)+ $$

$$ +\frac{\kappa r_{c}}{1+\tau_{r}\kappa\xi^{2}}W^{(1)}(r_{c},\xi)\Xi^{\gamma(n+1)}_{\rho,\mu(n+1),\omega,0+}f^{(1)}(t)\Bigg]. \tag{66} $$

Переходя в область оригиналов по геометрической переменной, находим решение рассматриваемой задачи в виде

$$ p(r,t)=\int\limits_{0}^{\infty}\xi\hat{p}(\xi,t)W^{(1)}(r,\xi)d\xi\,, \tag{67} $$

где $\hat{p}(\xi,t)$ определяется соотношением (66).

В частном случае, когда $\gamma=0,\ \tau_{r}=0,\ \mu\to 1$, из (66), (67) получаем решение соответствующей рассматриваемому случаю фильтрационной задачи, поставленной в рамках классической математической модели упругого режима, в виде

$$ p(r,t)=-\frac{2Q}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1-e^{-\kappa\xi^{2}t}}{\xi^{2}}\,\frac{J_{0}(\xi r)Y_{1}(r_{c}\xi)-Y_{0}(\xi r)J_{1}(r_{c}\xi)}{J_{1}^{2}(r_{c}\xi)+Y_{1}^{2}(r_{c}\xi)}\,d\xi, \tag{68} $$

где в целях упрощения вычислений положено $\Phi_{0}\equiv 0,\ \varphi_{2}=Q=\text{const}$.

Последнее соотношение совпадает с решением, приведенным в работе [24].

РЕШЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА НА КОНТУРЕ СКВАЖИНЫ

В данном случае требуется решить уравнение (53) при следующих краевых условиях:

$$ \left[\frac{\partial p}{\partial r}-hr\right]_{r=r_{c}}=-\varphi_{3}(t)\,,\ \ p(r,0)=\varphi_{0}(r),\ |\,p(r,t)|<+\infty, \tag{69} $$

где $\varphi_{3}(t),\varphi_{0}(r)$ — заданные функции, h — положительная вещественная константа.

Далее приводится краткое изложение методики получения решения рассматриваемой задачи.

Применяя к задаче (53), (69) модифицированное преобразование Вебера вида [21]

$$\hat{p}(\xi, t) = \int\limits_{r_c}^{\infty} rp(r, t) W^{(2)}(r, \xi) dr,$$

где ядро преобразования определяется соотношениями

$$W^{(2)}(r, \xi) = \frac{J_0(\xi r)\omega_0^{(2)}(r_c\xi) - Y_0(\xi r)\omega_0^{(1)}(r_c\xi)}{\sqrt{(\omega_0^{(1)}(r_c\xi))^2 + (\omega_0^{(2)}(r_c\xi))^2}},$$

$$\omega_0^{(1)}(r_c\xi) = \xi J_0'(r_c\xi) - hJ_0(r_c\xi), \ \omega_0^{(2)}(r_c\xi) = \xi Y_0'(r_c\xi) - hY_0(r_c\xi),$$

приходим к задаче Коши

$$^C D_{\rho,\omega,0+}^{\gamma,\mu} \hat{p}(\xi, t) + \frac{\kappa\xi^2}{1+\tau_r\kappa\xi^2} \hat{p}(\xi, t) = \frac{\kappa r_c}{1+\tau_r\kappa\xi^2} W^{(2)}(r_c, \xi) f^{(2)}(t), \tag{70}$$

$$\hat{p}(\xi, 0) = \hat{\varphi}_0(\xi). \tag{71}$$

Здесь

$$\hat{\varphi}_0(\xi) = \int\limits_{r_c}^{\infty} r\varphi_0(r) W^{(2)}(r, \xi) dr, \ f^{(2)}(t) = \varphi_3(t) + \tau_r {}^C D_{\rho,\omega,0+}^{\gamma,\mu} \varphi_3(t).$$

Решение задачи (70), (71) имеет вид

$$\hat{p}(\xi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\kappa\xi^2}{1+\tau_r\kappa\xi^2} \right)^n \left[\hat{\varphi}_0(\xi) e_{\rho,\mu n+1,\omega}^{\gamma n}(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\kappa r_c}{1+\tau_r\kappa\xi^2} W^{(2)}(r_c, \xi) \Xi_{\rho,\mu(n+1),\omega,0+}^{\gamma(n+1)} f^{(2)}(t) \right]. \tag{72}$$

Окончательно решение исходной задачи (53), (69) запишем в виде соотношения

$$p(r, t) = \int\limits_0^{\infty} \xi \hat{p}(\xi, t) W^{(2)}(r, \xi) d\xi, \tag{73}$$

где $\hat{p}(\xi, t)$ определяется соотношением (72).

Положив в (72), (73) $\gamma = 0, \ \tau_r = 0, \ \mu \to 1$, получаем случай классической модели упругого режима фильтрации. Предполагая в целях упрощения вычислений $\varphi_0 \equiv 0, \varphi_3 = V = \text{const}$, после ряда простых преобразований из (72), (73) находим

$$p(r, t) = -\frac{2r_c V}{\pi} \int\limits_0^{\infty} (1 - e^{-\kappa\xi^2 t}) \, \Omega(\xi, r) \frac{d\xi}{\xi}, \tag{74}$$

$$\Omega(\xi, r) = \frac{J_0(\xi r)[r_c\xi Y_1(r_c\xi) + hY_0(r_c\xi)] - Y_0(\xi r)[r_c\xi J_1(r_c\xi) + hJ_0(r_c\xi)]}{[r_c\xi J_1(r_c\xi) + hJ_0(r_c\xi)]^2 + [r_c\xi Y_1(r_c\xi) + hY_0(r_c\xi)]^2}, \tag{75}$$

что совпадает с результатами работы [24]. Отметим также, что из (74), (75) при $h = 0, \ V = Q$ получаем соотношение (68).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе подхода, использующего понятие дробной производной Хильфера–Прабхакара, в работе построена обобщенная математическая модель для описания динамики неравновесного во времени процесса фильтрации в трещиновато-пористой среде. Выполнены постановки ряда краевых задач о моделировании дробно-дифференциальной динамики давлений при работе галерей (плоско-параллельная фильтрация) и пуске скважин (плоско-радиальная фильтрация). Приведены аналитические решения поставленных краевых задач неклассической теории фильтрации в трещиновато-пористой среде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. *Успехи физических наук*, 1997. Т. 167, № 10. С. 1095–1106.
2. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. Москва–Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 288 с.
3. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. Київ: Наук. думка, 2005. 283 с.
4. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: theory and applications. Switzerland: Gordon and Breach science publishers, 1993. 688 p.
5. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. 512 с.
6. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010. 368 p.
7. Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press, 1999. 341 p.
8. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
9. Булавацкий В.М. Некоторые математические модели геоинформатики для описания процессов переноса в условиях временной нелокальности. *Проблемы управления и информатики*. 2011. № 3. С. 128–137.
10. Bulavatsky V.M. Nonclassical mathematical model in geoinformatics to solve dynamic problems for nonequilibrium nonisothermal seeapage fields. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2011. Vol. 47, N 6. P. 898–906.
11. Bulavatsky V.M., Krivonos Yu.G. Mathematical modelling in the geoinformation problem of the dynamics of geomigration under space-time nonlocality. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. Vol. 48, N 4. P. 539–546.
12. Bulavatsky V.M. One generalization of the fractional differential geoinformation model of research of locally-nonequilibrium geomigration processes. *Journal of Automation and Information Science*. 2013. Vol. 45, N 1. P. 59–69.
13. Bulavatsky V.M. Numerical modeling of the dynamics of a convection diffusion process locally non-equilibrium in time. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. Vol. 48, N 6. P. 861–869.
14. Garra R., Gorenflo R., Polito F., Tomovski Z. Hilfer–Prabhakar derivatives and some applications. *Applied Mathematics and Computation*. 2014. Vol. 242. P. 576–589.
15. Polito F., Tomovski Z. Some properties of Prabhakar-type operators. arXiv:1508.03224, 2015.
16. Prabhakar T.R. A singular integral equation with a generalized Mittag–Leffler function in the kernel. *Yokohama Math. J*. 1971. Vol. 19. P. 7–15.
17. D’Ovidio M., Polito F. Fractional diffusion-telegraph equations and their associated stochastic solutions. arXiv:1307.1696, 2013.
18. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. *Прикл. математика и механика*. 1960. Т. 24, вып. 3. С. 852–864.

19. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. Москва: Недра, 1984. 211 с.

20. Sneddon I. The use of integral transform. New York: Mc. Graw-Hill Book Comp., 1973. 539 p.

21. Povstenko Yu. Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engineers. Switzerland: Springer Int. Publ., 2015. 460 p.

22. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag–Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer-Verlag, 2014. 454 p.

23. Sandev T., Tomovski Z., Dubbeldam J.L. Generalized Langevin equation with a tree parameter Mittag–Leffler noise. *Physica A*. 2011. Vol. 390, N 21. P. 3627–3636.

24. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Москва: Наука, 1964. 488 с.

Надійшла до редакції 04.04.2016

В.М. Булавацький

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ З ПОХІДНОЮ ХІЛЬФЕРА–ПРАБХАКАРА

Анотація. Побудовано узагальнену математичну модель для опису дробово-диференційної динаміки процесів фільтрації в тріщинувато-пористих середовищах, яка ґрунтується на використанні поняття дробової похідної Хільфера–Прабхакара. У рамках зазначеної моделі одержано замкнені розв'язки низки крайових задач теорії фільтрації щодо моделювання динаміки тисків при пуску свердловин у випадку плоско-радіальної фільтрації, а також роботі галерей за умов плоско-паралельної фільтрації.

Ключові слова: математичне моделювання, дробово-диференційна динаміка фільтраційних процесів, тріщинувато-пористі середовища, некласичні моделі, рівняння фільтрації з дробовою похідною Хільфера–Прабхакара, крайові задачі, замкнені розв'язки.

V.M. Bulavatsky

MATHEMATICAL MODELING OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL FILTRATION DYNAMICS BASED ON MODELS WITH HILFER–PRABHAKAR DERIVATIVE

Abstract. We construct a generalized mathematical model to describe the fractional differential dynamics of filtration processes in fractured porous media, based on the use of the concept of Hilfer–Prabhakar fractional derivative. Within the framework of this model, we obtain a number of closed solutions to boundary-value problems of filtration theory for modeling the dynamics of pressures at launch of wells in case of plane-radial filtration, as well as by activity of galleries under plane-parallel filtration.

Keywords: mathematical modeling, fractional-differential dynamics of filtration processes, fractured porous media, non-classical models, equation of filtration with Hilfer–Prabhakar fractional derivative, boundary value problems, closed form solutions.

Булавацкий Владимир Михайлович,
доктор техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: v_bulav@ukr.net.