doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.11.011
УДК 517.962.22

С.Л. Гефтер, А.Б. Гончарук, О.Л. Півень

Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна
E-mail: gefter@karazin.ua, angoncharuk@ukr.net, aleksei.piven@karazin.ua

Цілочисельні розв'язки векторного неявного лінійного різницевого рівняння в $\mathbb{Z}^N$

Представлено академіком НАН України Є.Я. Хрусловим

Доведено критерій існування та єдиності цілочисельного розв'язку неявного лінійного різницевого рівняння $Ax_{n+1}+Bx_n=f_n$ з матрицями A, B, елементами яких є цілі числа. Одержано також достатні умови єдиності цілочисельного розв'язку цього рівняння.

Ключові слова: *неявне різницеве рівняння, цілочисельний розв'язок.*

Розглядається неявне різницеве рівняння

$$Ax_{n+1}+Bx_n=f_n, \quad n=0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

де A, B — квадратні матриці порядку N з цілими елементами, $f_n \in \mathbb{Z}^N$, $n=0,1,2,\ldots$. Будемо розглядати *цілочисельні розв'язки рівняння* (1), тобто такі розв'язки, для яких $x_n \in \mathbb{Z}^N$, $n=0,1,2,\ldots$. Численні результати про існування, єдиність та зображення розв'язків рівняння (1) у банахових просторах та різних обмеженнях на послідовність $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ одержано в працях [1—6] та ін.

У повідомленні розглядається також *однорідне* різницеве рівняння

$$Ax_{n+1}+Bx_n=0, \quad n=0,1,2,\ldots \tag{2}$$

Єдиність цілочисельного розв'язку рівняння (1) означає, що однорідне рівняння (2) має тільки тривіальний цілочисельний розв'язок $x_n=0$, $n=0,1,2,\ldots$. Через I позначається одинична матриця порядку N.

1. Вкажемо необхідні та достатні умови, за яких рівняння (1) має єдиний цілочисельний розв'язок $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ при будь-якій цілочисельній правій частині $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. Ці умови є аналогічними умовам наслідку 2 роботи [6], в якому рівняння (1) вивчалось у банахових просторах.

Теорема 1. *Для того щоб різницеве рівняння* (1) *мало єдиний цілочисельний розв'язок* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *при будь-якій цілочисельній правій частині* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, *необхідно і достатньо, щоб мат-*

риця B була унімодулярною (тобто $\det B = \pm 1$*), а матриця* $B^{-1}A$ *— нільпотентною. При цьому якщо* $r+1$ *— індекс нільпотентності матриці* $B^{-1}A$*, то єдиний розв'язок рівняння* (1) *визначається формулою*

$$x_n = \sum_{k=0}^{r} (-B^{-1}A)^k B^{-1} f_{n+k}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Доведення. *Достатність*. Існування, єдиність та зображення (3) дійсного розв'язку рівняння (1) випливають з наслідку 2 роботи [6]. Цілочисельність розв'язку, що визначається формулою (3), випливає з того, що внаслідок унімодулярності матриці B елементи матриць B^{-1} і $B^{-1}A$ є цілими числами.

Необхідність. Нехай права частина рівняння (1) має вигляд $f_n = 0$ при $n \neq 0$. Тоді відповідний єдиний розв'язок цього рівняння $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ задовольняє однорідне рівняння

$$Ax_{n+1} + Bx_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Внаслідок єдиності розв'язку цього рівняння маємо $x_n = 0, \ n = 1, 2, \ldots$ Тоді вектор x_0 є цілочисельним розв'язком лінійного рівняння $Bx_0 = f_0$. Це рівняння має єдиний цілочисельний розв'язок при будь-якому $f_0 \in \mathbb{Z}^N$. Тому матриця B є унімодулярною та рівняння (1) еквівалентне рівнянню

$$Tx_{n+1} = x_n - g_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

де $T = -B^{-1}A$ — матриця з цілими елементами, а $g_n = B^{-1} f_n \in \mathbb{Z}^N$. Рівняння (4) також має єдиний цілочисельний розв'язок при будь-якій цілочисельній правій частині $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Покажемо, що матриця T є нільпотентною. Для будь-якого $\lambda \in \mathbb{Z}, \ \lambda \neq 0$ та $g_0 \in \mathbb{Z}^N$ покладемо в (4) $g_n = \lambda^n g_0, \quad n = 1, 2, \ldots.$ Тоді ми отримаємо рівняння

$$\begin{gathered} Tx_{n+1} = x_n - \lambda^n g_0, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ Tx_n = x_{n-1} - \lambda^{n-1} g_0, \quad n = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{5}$$

Тому послідовність $y_n = x_n - \lambda x_{n-1}, n = 1, 2, \ldots$ є цілочисельним розв'язком однорідного рівняння

$$Ty_{n+1} = y_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

З урахуванням припущення єдиності розв'язку цього рівняння маємо $y_n = 0, \ n = 1, 2, \ldots.$ Тоді $x_n = \lambda^n x_0$. Підставляючи цей розв'язок у рівняння (5), отримаємо

$$\lambda^{n+1} T x_0 = \lambda^n x_0 - \lambda^n g_0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Оскільки $\lambda \neq 0$, то звідси одержимо, що невідомий вектор x_0 є цілочисельним розв'язком системи лінійних рівнянь

$$(I - \lambda T) x_0 = g_0.$$

Ця система має єдиний цілочисельний розв'язок при будь-якій цілочисельній правій частині g_0. Тому при будь-якому $\lambda \in \mathbb{Z}$ матриця $I - \lambda T$ є унімодулярною, тобто $\det(I - \lambda T) = \pm 1, \lambda \in \mathbb{Z}$.

Таке можливо тільки у випадку, коли $\det(I-\lambda T)\equiv 1$. Це означає, що матриця T має єдине власне значення $\mu = 0$. Тому матриця T є нільпотентною. Теорему доведено.

Через C_{ij} позначимо алгебраїчне доповнення елемента c_{ij} матриці $C = A + B$. Розглянемо таку умову існування та єдиності цілочисельного розв'язку лінійного рівняння (1) зі сталою правою частиною: $f_n = f, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$.

Теорема 2. *Нехай однорідне рівняння* (2) *має тільки тривіальний цілочисельний розв'язок та в рівнянні* (1) $f_n = f = (f^1, ..., f^N)^* \in \mathbb{Z}^N$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Тоді* $\det C \neq 0$ *і рівняння* (1) *має цілочисельний розв'язок у тому і тільки в тому випадку, коли* $\det C$ *є дільником чисел* $\sum_{i=1}^{N} C_{ij} f^i, \quad j = 1, ..., N$. *При цьому розв'язок є сталим і має вигляд*

$$x_n = C^{-1} f, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Наслідок 1. *Розглянемо скалярне різницеве рівняння порядку* N

$$c_N x_{n+N} = c_{N-1} x_{n+N-1} + \ldots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n + f, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

в якому $c_0, \ldots, c_N, \quad f \in \mathbb{Z}$. *Нехай відповідне однорідне рівняння*

$$c_N x_{n+N} = c_{N-1} x_{n+N-1} + \ldots + c_1 x_{n+1} + c_0 x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

має тільки тривіальний розв'язок у цілих числах. Тоді $c_N - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \neq 0$ *і рівняння* (7) *має розв'язок у цілих числах у тому і тільки в тому випадку, коли* f *ділиться на* $c_N - \sum_{j=0}^{N-1} c_j$. *При цьому розв'язок рівняння* (7) *є сталим та має вигляд*

$$x_n = \frac{f}{c_N - \sum_{j=0}^{N-1} c_j}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

2. Одержимо тепер деякі достатні умови єдиності цілочисельного розв'язку рівняння (1). Зазначимо, що коли матриця B не є оборотною, то рівняння (2) завжди має нетривіальний цілочисельний розв'язок. Тому в подальшому ми будемо припускати, що матриця B є оборотною, і отже, жмуток $\lambda A + B$ є регулярним. Використовуючи канонічну форму Вейєрштраса регулярного жмутка матриць [7, гл. XII, §2], отримаємо таку достатню умову єдиності розв'язку рівняння (1).

Теорема 3. *Нехай усі корені характеристичного полінома* $\det(\lambda A + B)$ *жмутка матриць* $\lambda A + B$ *лежать у крузі* $\{\lambda : |\lambda| < 1\}$. *Тоді рівняння* (2) *має тільки тривіальний цілочисельний розв'язок.*

Наслідок 2. *Розглянемо однорідне скалярне різницеве рівняння* (8) *з цілими коефіцієнтами* $c_0, \ldots, c_N$, *де* $c_0 \neq 0$. *Якщо всі корені характеристичного рівняння*

$$c_N \lambda^N - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \lambda^j = 0 \tag{9}$$

лежать у крузі $\{\lambda : |\lambda| < 1\}$, *то рівняння* (8) *має тільки тривіальний розв'язок у цілих числах.*

Нижченаведена теорема єдиності базується на застосуванні теореми Поліа про цілозначні цілі функції [8, гл. I, § 5, п. 10].

Теорема 4. *Нехай усі корені характеристичного полінома* $\det(\lambda A+B)$ *жмутка матриць* $\lambda A+B$ *лежать в області*

$$G=\{\lambda=re^{i\varphi}: r>0, |\varphi|<\pi, \quad \ln^2 r<\ln^2 2-\varphi^2\}\setminus\{1\}. \tag{10}$$

Тоді рівняння (2) *має тільки тривіальний цілочисельний розв'язок.*

Наслідок 3. *Розглянемо однорідне скалярне різницеве рівняння* (8) *з цілими коефіцієнтами* $c_0,\ldots,c_N$. *Нехай усі корені характеристичного рівняння* (9) *лежать в області* (10). *Тоді рівняння* (8) *має тільки тривіальний розв'язок у цілих числах.*

Зауваження 1. Використовуючи теорему Пізо [9, теорема 3.4], можна отримати таке узагальнення наслідку 3. *Якщо всі корені характеристичного рівняння* (9) *лежать в області*

$$G_1=\{\lambda=re^{i\varphi}: r>0, |\varphi|<\pi, \quad \ln^2 r<0{,}64-\varphi^2\}\setminus\left\{1, 2, \frac{3\pm i\sqrt{3}}{2}\right\},$$

то рівняння (8) *має тільки тривіальний розв'язок у цілих числах.*

У нижченаведеній теоремі встановлюється ще одна ознака єдиності цілочисельного розв'язку рівняння (1) при обмеженнях на коефіцієнти характеристичного полінома $\det(\lambda A+B)$ регулярного жмутка матриць $\lambda A+B$. Крім того, ми вказуємо явний вигляд розв'язку рівняння (1) у припущенні, що цілочисельний розв'язок рівняння (1) існує. Для простого числа p через $\mathbb{Z}_p$ позначається кільце цілих p-адичних чисел і через $\mathbb{Z}_p^N$ — N-й степінь простору $\mathbb{Z}_p$. На кільці $\mathbb{Z}_p$ ми розглядаємо стандартну топологію (див. [10, гл.1]).

Теорема 5. *Нехай коефіцієнти при додатних степенях характеристичного полінома* $\det(\lambda A+B)$ *жмутка матриць* $\lambda A+B$ *мають спільний простий дільник* p, *який не є дільником числа* $\det B$. *Тоді рівняння* (2) *має тільки тривіальний цілочисельний розв'язок. Якщо рівняння* (1) *має цілочисельний розв'язок, то цей розв'язок може бути поданий у вигляді*

$$x_n=\sum_{k=0}^{\infty}(-B^{-1}A)^k B^{-1} f_{n+k}, \quad n=0,1,2,\ldots. \tag{11}$$

де збіжність ряду в правій частині рівності (11) *розуміється в топології простору* $\mathbb{Z}_p^N$.

Наслідок 4. *Нехай коефіцієнти* $d_0 \ldots, d_{N-1}$ *характеристичного полінома* $\det(A-\lambda I)=$ $=(-\lambda)^N+\sum_{j=0}^{N-1} d_j\lambda^j$ *матриці* A *мають спільний простий дільник* p. *Тоді рівняння*

$$Ax_{n+1}=x_n, \quad n=0,1,2,\ldots, \tag{12}$$

має тільки тривіальний цілочисельний розв'язок. Якщо рівняння

$$Ax_{n+1}=x_n-f_n, \quad n=0,1,2,\ldots, \tag{13}$$

має цілочисельний розв'язок, то цей розв'язок може бути поданий у вигляді

$$x_n=\sum_{k=0}^{\infty}A^k f_{n+k}, \quad n=0,1,2,\ldots, \tag{14}$$

де збіжність ряду в правій частині рівності (14) *розуміється в топології простору* $\mathbb{Z}_p^N$.

Наслідок 5. *Розглянемо однорідне скалярне різницеве рівняння* (8) *з цілими коефіцієнтами* $c_0, \ldots, c_N$. *Нехай числа* c_j $(j = 1, \ldots, N)$ *мають спільний простий дільник* p , *який не є дільником числа* c_0 . *Тоді рівняння* (8) *має тільки тривіальний розв'язок у цілих числах.*

З теореми 6 [11] випливає така теорема єдиності цілочисельного розв'язку рівняння (8).

Теорема 6. *Розглянемо однорідне скалярне різницеве рівняння* (8) *з цілими коефіцієнтами* $c_0, \ldots, c_N,$ $c_N \neq 0$. *Нехай характеристичний поліном* $c_N\lambda^N - \sum_{j=0}^{N-1} c_j\lambda^j$ *цього рівняння є незвідним над полем раціональних чисел та число* c_N *не є спільним дільником чисел* $c_0, \ldots, c_{N-1}$. *Тоді рівняння* (8) *має тільки тривіальний розв'язок у цілих числах.*

3. Розглянемо деякі приклади.

Приклад 1. Нехай в рівнянні (12) матриця A є виродженою та має розмір 2×2, тобто $N = 2$. У цьому випадку характеристичний поліном цієї матриці має вигляд $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda$, де $\mathrm{tr}A$ — слід матриці A . Отже, якщо $\mathrm{tr}A = 0$, то матриця A нільпотентна, її індекс нільпотентності не перевищує 2, і за теоремою 1 рівняння (13) при будь-якій цілочисельній правій частині $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ має єдиний цілочисельний розв'язок, який з урахуванням рівності (3) може бути поданий у вигляді

$$x_n = f_n + Af_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Якщо $\mathrm{tr}A = 1$, то однорідне рівняння (12) має нетривіальний розв'язок $x_n = x_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, де x_0 — власний вектор, який відповідає власному значенню 1 матриці A . Якщо $\mathrm{tr}A = -1$, то однорідне рівняння (12) має нетривіальний розв'язок $x_n = (-1)^n x_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, де x_0 — власний вектор, який відповідає власному значенню −1 матриці A . Розглянемо тепер випадок, коли $\mathrm{tr}A \neq 0, \pm 1$. За теоремою Гамільтона—Келі справджуються рівності

$$A^k = (\mathrm{tr}A)^{k-1} \cdot A, \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{15}$$

Тоді для рівняння (12) виконані умови наслідку 4, де як p можна обрати будь-який простий дільник сліду матриці A . Отже, з урахуванням наслідку 4 існує тільки тривіальний цілочисельний розв'язок рівняння (12). Якщо в рівнянні (13) $f_n = f = (f^1, f^2)^* \in \mathbb{Z}^2 (n = 0, 1, 2, \ldots)$ та $1 - \mathrm{tr}A$ ділить f^1 і f^2, то на підставі теореми 2 та наслідку 4 це рівняння має єдиний цілочисельний розв'язок, який з урахуванням рівностей (14), (15) може бути поданий у вигляді

$$x_n = f + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{tr}A)^{k-1} Af = f + \frac{1}{1 - \mathrm{tr}A} Af, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

де збіжність ряду в (16) розуміється в топології простору $\mathbb{Z}_p^2$.

Приклад 2. Розглянемо однорідне рівняння (12) з невиродженою матрицею $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Характеристичний поліном матриці A має вигляд $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 6\lambda + 2$, його коефіцієнти $d_1 = 6$ і $d_2 = 2$ мають спільний простий дільник 2. За наслідком 4 рівняння (12) має тільки тривіальний цілочисельний розв'язок. Оскільки характеристичний поліном $\det(\lambda A - I) = 2\lambda^2 + 6\lambda + 1$ жмутка $\lambda A - I$ має корені $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$, то умови теорем 3 і 4 не виконано.

Приклад 3. Нехай $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ — цілі числа, $f = (f^1, f^2)^* \in \mathbb{Z}^2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ і $P(\lambda)$ — характеристичний поліном матриці A. Нехай $P(1)=1$ і $\mathrm{tr}A \geqslant 2$. Розглянемо різницеве рівняння

$$Ax_{n+!} = x_n + f, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

Якщо $\mathrm{tr}A > 4$, то поліном $P(\lambda)$ має два різних дійсних корені, які більше 1. При $\mathrm{tr}A = 2, 3, 4$ безпосередньо перевіряється, що корені λ_1, λ_2 полінома $P(\lambda)$ задовольняють нерівність $|\lambda|>1$. Згідно з теоремою 3 однорідне рівняння (12) має тільки тривіальний цілочисельний розв'язок. Оскільки матриця $C = A - I$ є унімодулярною, то внаслідок теореми 2 рівняння (17) має єдиний цілочисельний розв'язок $x_n = (y_n, z_n)^*$, який може бути знайдений за формулою (6):

$$y_n = (a_{22}-1)f^1 - a_{12}f^2, \quad z_n = (a_{11}-1)f^2 - a_{21}f^1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Приклад 4. Розглянемо таке різницеве рівняння:

$$2x_{n+2} = -5x_{n+1} - x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{18}$$

Відповідне характеристичне рівняння $2\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$ має корені $\lambda_1 = \dfrac{-5+\sqrt{17}}{4}$, $\lambda_2 = \dfrac{-5-\sqrt{17}}{4} < -1$. Для рівняння (18) є справедливими умови теореми 6, але не є справедливими умови наслідків 2, 3, 5. Отже, рівняння (18) має тільки тривіальний цілочисельний розв'язок. За наслідком 1 неоднорідне рівняння

$$2x_{n+2} = -5x_{n+1} - x_n + f, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $f \in \mathbb{Z}$, має єдиний цілочисельний розв'язок тоді і тільки тоді, коли f ділиться на 8. Цей розв'язок має вигляд $x_n = \dfrac{f}{8}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$

Приклад 5. Розглянемо різницеве рівняння

$$6x_{n+2} = 17x_{n+1} - 12x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

Відповідне характеристичне рівняння $6\lambda^2 - 17\lambda + 12 = 0$ має корені $\dfrac{3}{2}$ та $\dfrac{4}{3}$, які належать області G (10). Для рівняння (19) є справедливими умови наслідку 3, але не є справедливими умови наслідків 2, 5 і теореми 6. Отже, рівняння (19) має тільки тривіальний цілочисельний розв'язок. За наслідком 1 при будь-якому $f \in \mathbb{Z}$ неоднорідне рівняння

$$6x_{n+2} = 17x_{n+1} - 12x_n + f, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

має єдиний цілочисельний розв'язок, який має вигляд $x_n = f, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$

Приклад 6. Розглянемо різницеве рівняння

$$9x_{n+2} = -15x_{n+1} - 4x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2018. № 11

Відповідне характеристичне рівняння $9\lambda^2+15\lambda+4=0$ має корені $-\frac{1}{3}$ та $-\frac{4}{3}$. Для рівняння (20) є справедливими умови наслідку 5 при $p=3$, але не є справедливими умови наслідків 2, 3 і теореми 6. Отже, рівняння (20) має тільки тривіальний цілочисельний розв'язок.

Таким чином, у роботі досліджено питання про цілочисельні розв'язки векторного неявного лінійного різницевого рівняння. Отримано низку достатніх умов єдиності розв'язку та одержано критерій існування та єдиності цілочисельного розв'язку при будь-якій правій частині. У подальшому передбачається отримати загальний критерій єдиності цілочисельного розв'язку розглянутого рівняння.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Baskakov A.G. On the invertibility of linear difference operators with constant coefficients. *Russ. Math*. 2001. **45**, № 5. P. 1—9.
2. Benabdallakh M., Rutkas A.G., Solov'ev A.A. Application of asymptotic expansions to the investigation of an infinite system of equations $Ax_{n+1}+Bx_n=f_n$ in a Banach space. *J. Sov. Math*. 1990. **48**, Iss. 2. P. 124—130. doi: https://doi.org/10.1007/BF01095789
3. Gorodnii M.F. Bounded and periodic solutions of a difference equation and its stochastic analogue in Banach space. *Ukr. Math. J*. 1991. **43**, Iss. 1. P. 32—37. doi: https://doi.org/10.1007/BF01066900
4. Слюсарчук В.Ю. Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі. Рівне: Вид-во УДУВГП, 2003. 366 с.
5. Bernhard P. On singular implicit linear dynamical systems. *SIAM J. Control Optim*. 1982. **20**, № 5. P. 612—633. doi: https://doi.org/10.1137/0320046
6. Гефтер С.Л., Пивень А.Л. Неявное линейное разностное уравнение в пространствах Фреше. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2017. № 6. С. 3—8. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.06.003
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1966. 576 с.
8. Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент. Москва: Наука, 1983. 176 с.
9. Buck R. C. Integral valued entire functions. *Duke Math. J*. 1948. **15**, № 4. P. 879—891. doi: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-48-01578-6
10. Каток С.Б. p-адический анализ в сравнении с вещественным. Москва: МЦНМО, 2004. 112 с.
11. Berestovskii V.N., Nikonorov Yu.G. Continued fractions, the group GL(2, ℤ), and Pisot numbers. *Sib. Adv. Math*. 2007. **17**, № 4. P. 268—290. doi: https://doi.org/10.3103/S1055134407040025

Надійшло до редакції 16.08.2018

REFERENCES

1. Baskakov, A. G. (2001). On the invertibility of linear difference operators with constant coefficients. Russ. Math., 45, No. 5, pp. 1-9.
2. Benabdallakh, M., Rutkas, A. G. & Solov'ev, A. A. (1990). Application of asymptotic expansions to the investigation of an infinite system of equations $Ax_{n+1}+Bx_n=f_n$ in a Banach space. J. Sov. Math., 48, Iss.2, pp. 124-130. doi: https://doi.org/10.1007/BF01095789
3. Gorodnii, M. F. (1991). Bounded and periodic solutions of a difference equation and its stochastic analogue in Banach space. Ukr. Math. J., 43, Iss. 1, pp. 32-37. doi: https://doi.org/10.1007/BF01066900
4. Slusarchuk, V. E. (2003) Stability of solutions of difference equations in a Banach space. Rivne: Vyd-vo UDUVHP (in Ukrainian).
5. Bernhard, P. (1982). On singular implicit linear dynamical systems. SIAM J. Control Optim., 20, No. 5, pp. 612-633. doi: https://doi.org/10.1137/0320046
6. Gefter, S. L. & Piven, A. L. (2017). Implicit linear difference equation in Frechet spaces. Dopov. Nac. akad. nauk. Ukr., No. 6, pp. 3-8 (in Russian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.06.003
7. Gantmakher, F. R. (1966). The theory of matrices. Moscow: Nauka (in Russian).

8. Leont'ev, A. F. (1983). Entire functions. Series of exponents. Moscow: Nauka (in Russian).
9. Buck, R. C. (1948) Integral valued entire functions. Duke Math. J., No. 4, pp. 879-891. doi: https:// doi.org/10.1215/S0012-7094-48-01578-6
10. Katok, S. B. (2004). *p*-adic analysis compared with real. Moscow: MCNMO (in Russian).
11. Berestovskii, V. N. & Nikonorov, Yu. G. (2007). Continued fractions, the group GL(2, $\mathbb{Z}$), and Pisot numbers. Sib. Adv. Math., 17, No. 4, pp. 268-290. doi: https://doi.org/10.3103/S1055134407040025

Received 16.08.2018

С.Л. Гефтер, А.Б. Гончарук, А.Л. Пивень

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
E-mail: gefter@karazin.ua, angoncharuk@ukr.net, aleksei.piven@karazin.ua

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНОГО
НЕЯВНОГО ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ В $\mathbb{Z}^N$

Доказан критерий существования и единственности целочисленного решения неявного линейного разностного уравнения $Ax_{n+1}+Bx_n=f_n$ с матрицами *A*, *B*, элементами которых являются целые числа. Получены также достаточные условия единственности целочисленного решения этого уравнения.

Ключевые слова: *неявное разностное уравнение, целочисленное решение.*

S.L. Gefter, A.B. Goncharuk, A.L. Piven'

V.N. Karazin Kharkiv National University
E-mail: gefter@karazin.ua, angoncharuk@ukr.net, aleksei.piven@karazin.ua

INTEGER SOLUTIONS FOR A VECTOR
IMPLICIT LINEAR DIFFERENCE EQUATION IN $\mathbb{Z}^N$

A criterion of the existence and the uniqueness for an integer solution of the implicit linear difference equation $Ax_{n+1}+Bx_n=f_n$, where *A* and *B* are matrices with integer entries, is proved. Sufficient conditions of the uniqueness for an integer solution of this equation are obtained.

Keywords: *implicit difference equation, integer solution.*