

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.10.044>

УДК 539.3

**А.А. Каминский, Е.Е. Курчаков**

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: [fract@inmech.kiev.ua](mailto:fract@inmech.kiev.ua)

## **Об эволюции зоны предразрушения у вершины трещины в нелинейном анизотропном теле**

*Представлено академиком НАН Украины В.Д. Кубенко*

*В компонентах вектора перемещения поставлена краевая задача о равновесии нелинейного упругого ортотропного тела с трещиной нормального отрыва при наличии зоны предразрушения. В результате численного решения этой задачи показана эволюция зоны предразрушения, происходящая при нагружении тела. Изучено поле деформаций у конца зоны предразрушения.*

**Ключевые слова:** *нелинейное упругое ортотропное тело, трещина нормального отрыва, зона предразрушения, конститутивные уравнения.*

Экспериментальные исследования показывают, что перед трещиной образуется зона предразрушения (prefracture zone) — узкая область, в которой наблюдаются микротрещины, поры и расслоения [1]. Указанную зону необходимо учитывать при постановке краевых задач для тел с трещинами. Однако это сопряжено со значительными трудностями. Во многом их удастся избежать, если использовать ту или иную модель зоны предразрушения. Наиболее адекватной представляется модель [2], в которой границы зоны предразрушения интерпретируются как поверхности раскрытого разреза, к которым приложены противоположные векторы напряжения, и учитывается, что в конце зоны предразрушения должен соблюдаться критерий прочности. Модифицируем эту модель, принимая, что компоненты векторов напряжения в точках на противоположных границах зоны предразрушения зависят от компонент вектора смещения относительно друг друга этих точек. Ввиду этого при постановке краевой задачи потребуются конститутивные уравнения, связывающие между собой эти величины [3].

Воспользовавшись тензорно-линейными определяющими уравнениями, связывающими компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций, и упомянутыми выше конститутивными уравнениями, поставим краевую задачу о равновесии нелинейного упругого ортотропного тела с трещиной нормального отрыва. Осуществим это в компонентах вектора перемещения.

© А.А. Каминский, Е.Е. Курчаков, 2018

В результате решения краевой задачи установим зависимость длины зоны предразрушения и раскрытия трещины от нагрузки на тело. Изучим поле деформаций возле конца зоны предразрушения.

**Постановка краевой задачи.** Ограничимся малыми деформациями. Воспользуемся тензорно-линейными определяющими уравнениями, связывающими контравариантные компоненты тензора напряжений  $\mathbf{S}$  с ковариантными компонентами тензора деформаций  $\mathbf{D}$  [4]:

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (1)$$

Аргументом функции  $\tilde{\varphi}(\Omega)$  является величина

$$\Omega = \sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \quad (2)$$

Инварианты  $Z$ ,  $E$ ,  $\Xi$  таковы:

$$Z = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}; \quad E = g^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}. \quad (3)$$

Взаимно обратные тензоры четвертого ранга  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$  характеризуют анизотропию. Эти тензоры обладают высокой симметрией. Иначе говоря, в компонентах этих тензоров можно менять местами как индексы, относящиеся к любой одной паре индексов, так и сами пары индексов.

Пусть система координат  $x^1, x^2, x^3$ , к которой отнесено тело, является прямоугольной декартовой. Стало быть,

$$g^{\varepsilon\zeta} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon = \zeta); \\ 0 & (\varepsilon \neq \zeta). \end{cases} \quad (4)$$

Выведем основные уравнения для компонент вектора перемещения  $\mathbf{u}$ . Воспользуемся соотношениями Коши [5]:

$$D_{\varepsilon\zeta} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^\zeta} \quad (\varepsilon, \zeta). \quad (5)$$

Привлекая соотношения (5), запишем уравнения (1) в виде

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (6)$$

С учетом соотношений (5) второй и третий из инвариантов (3) будут

$$E = g^{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta}; \quad \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta}. \quad (7)$$

Предположим, что тело является ортотропным. Главные направления примем совпадающими с направлениями осей  $x^1, x^2, x^3$ .

Остановимся на случае обобщенного плоского напряженного состояния, полагая

$$S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}(x^1, x^2) \quad (\alpha=1,2, \quad \beta=1,2); \quad (8)$$

$$S^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha=1,2, \quad \beta=3; \quad \alpha=3, \quad \beta=1,2; \quad \alpha=3, \quad \beta=3). \quad (9)$$

В соответствии с равенствами (4) первый из инвариантов (7) примет вид

$$E = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \quad (10)$$

Так как  $\tilde{\varphi}(\Omega) \neq 1$ , то в силу равенств (9) и (4) из уравнений (6) следует

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (\gamma=1,2, \quad \delta=3; \quad \gamma=3, \quad \delta=1,2). \quad (11)$$

Используем обозначения

$$\begin{aligned} G^{1111} &\equiv \mu_{AA}, \quad G^{1212} \equiv \mu_{BB}, \quad G^{1122} \equiv \mu_{AD}, \quad G^{2222} \equiv \mu_{DD}, \\ G^{1133} &\equiv \mu_{AF}, \quad G^{2233} \equiv \mu_{DF}, \quad G^{3333} \equiv \mu_{FF}. \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно равенствам (11) и обозначениям (12), второй из инвариантов (7) примет вид

$$\begin{aligned} \Xi &= \mu_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + 2\mu_{AD} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + 2\mu_{AF} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} + \\ &+ \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) + \\ &+ \mu_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + 2\mu_{DF} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} + \mu_{FF} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая равенства (9) и (4), на основании уравнений (6) найдем

$$\frac{\partial u_3}{\partial x^3} = \frac{1}{G^{3333}} \left[ \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + G^{3333} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \frac{E}{Z} \right) - G^{3311} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - G^{3322} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right]. \quad (14)$$

Опираясь на равенства (4) и выражение (14), для уравнений (6) будем иметь

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta} &= \left( G^{\alpha\beta 11} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3311} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left( G^{\alpha\beta 22} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3322} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \\ &- \tilde{\varphi}(\Omega) \left[ \left( G^{\alpha\beta 11} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3311} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \left( G^{\alpha\beta 22} - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} G^{3322} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \right. \\ &\left. - \left( 1 - \frac{G^{\alpha\beta 33}}{G^{3333}} \right) \frac{E}{Z} \right] \quad (\alpha, \beta=1,2; \quad \alpha=\beta); \end{aligned} \quad (15)$$

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta 12} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + G^{\alpha\beta 21} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left( G^{\alpha\beta 12} \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + G^{\alpha\beta 21} \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \quad (\alpha, \beta = 1, 2; \quad \alpha \neq \beta). \quad (16)$$

Введем обозначения

$$\frac{G^{1133}}{G^{3333}} \equiv \xi_{AF}, \quad \frac{G^{2233}}{G^{3333}} \equiv \xi_{DF}; \quad (17)$$

$$G^{1111} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3311} \equiv \check{\mu}_{AA}, \quad G^{1122} - \frac{G^{1133}}{G^{3333}} G^{3322} \equiv \check{\mu}_{AD}, \quad (18)$$

$$G^{2211} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3311} \equiv \check{\mu}_{DA}, \quad G^{2222} - \frac{G^{2233}}{G^{3333}} G^{3322} \equiv \check{\mu}_{DD}.$$

Воспользуемся уравнениями Навье [5]:

$$\frac{\partial S^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \quad (19)$$

Допустим, что тело является однородным.

Принимая во внимание формулы (8) и равенства (9), используя уравнения (15), (16) и учитывая второе из обозначений (12), а также обозначения (17) и (18), на основании уравнений (19) установим

$$\begin{aligned} \check{\mu}_{AA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + (\check{\mu}_{AD} + \mu_{BB}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \mu_{BB} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} &= Q^1; \\ \mu_{BB} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} + (\mu_{BB} + \check{\mu}_{DA}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} &= Q^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q^1 &= \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^1} \left( \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} E \right) + \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^2} \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) + \\ &+ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[ \check{\mu}_{AA} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + (\check{\mu}_{AD} + \mu_{BB}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \mu_{BB} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} \frac{\partial E}{\partial x^1} \right]; \\ Q^2 &= \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^1} \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial \tilde{\varphi}(\Omega)}{\partial x^2} \left( \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{DF}}{Z} E \right) + \\ &+ \tilde{\varphi}(\Omega) \left[ \mu_{BB} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} + (\mu_{BB} + \check{\mu}_{DA}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{1 - \xi_{DF}}{Z} \frac{\partial E}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

На границах тела, берегах трещины и границах зоны предразрушения зададим вектор напряжения  $\mathbf{P}$  с компонентами  $P^\alpha$ .

Воспользуемся граничными условиями [5]:

$$S^{\alpha\beta}n_{\beta} = P^{\alpha}, \quad (22)$$

где  $n_{\beta}$  — компоненты единичного вектора внешней нормали  $\mathbf{n}$ .

Принимая во внимание равенства (9), используя уравнения (15), (16) и учитывая второе из обозначений (12), а также обозначения (17) и (18), на основании условий (22) получим

$$\begin{aligned} \left( \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_1 + \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 &= P^1 + R^1; \\ \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) n_1 + \left( \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) n_2 &= P^2 + R^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R^1 &= \check{\varphi}(\Omega) \left[ \left( \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} E \right) n_1 + \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 \right]; \\ R^2 &= \check{\varphi}(\Omega) \left[ \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) n_1 + \left( \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{DF}}{Z} E \right) n_2 \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим прямоугольное тело малой толщины с трещиной по центру. С осями симметрии тела совместим оси  $x^1, x^2$ .

Нагрузку на тело будем задавать симметрично относительно осей  $x^1, x^2$ . Поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь четвертой части тела, например, располагающейся в первом квадранте (рис. 1).

Для верхней границы рассматриваемой части тела ( $n_1 = 0, n_2 = 1$ ) уравнения (23) становятся такими:

$$\check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} = P^1 + R^1; \quad \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) = P^2 + R^2, \quad (25)$$

а формулы (24) будут

$$\begin{aligned} R^1 &= \check{\varphi}(\Omega) \left( \check{\mu}_{AA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{AD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1 - \xi_{AF}}{Z} E \right); \\ R^2 &= \check{\varphi}(\Omega) \mu_{BB} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Для боковой границы рассматриваемой части тела ( $n_1 = 0, n_2 = 1$ ) уравнения (23) становятся такими:

$$\mu_{BB} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) = P^1 + R^1; \quad \check{\mu}_{DA} \frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \check{\mu}_{DD} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} = P^2 + R^2, \quad (27)$$

а формулы (24) будут

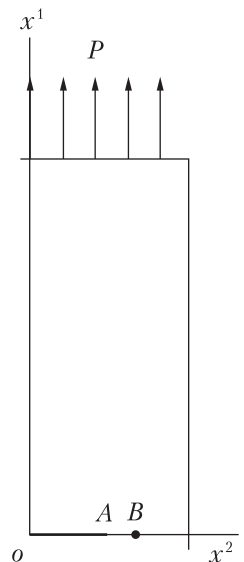


Рис. 1

$$R^1 = \tilde{\varphi}(\Omega)\mu_{BB}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right); \quad R^2 = \tilde{\varphi}(\Omega)\left(\tilde{\mu}_{DA}\frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \tilde{\mu}_{DD}\frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1-\xi_{DF}}{Z}E\right). \quad (28)$$

Для верхнего берега трещины и верхней границы зоны предразрушения ( $-n_1 = 1$ ,  $n_2 = 0$ ) уравнения (23) принимают вид

$$-\left(\tilde{\mu}_{AA}\frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \tilde{\mu}_{AD}\frac{\partial u_2}{\partial x^2}\right) = P^1 + R^1; \quad -\mu_{BB}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2}\right) = P^2 + R^2, \quad (29)$$

а формулы (24) будут

$$-R^1 = \tilde{\varphi}(\Omega)\left(\tilde{\mu}_{AA}\frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \tilde{\mu}_{AD}\frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1-\xi_{AF}}{Z}E\right); \quad -R^2 = \tilde{\varphi}(\Omega)\mu_{BB}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2}\right). \quad (30)$$

Отличной от нуля примем только компоненту  $P^1$  вектора  $\mathbf{P}$  в точках на верхней границе рассматриваемой части тела (см. рис. 1).

Предположим, что известен вектор  $\mathbf{v}$ , изображающий смещение относительно друг друга точек на противоположных границах зоны предразрушения.

Компоненты вектора напряжения в точках на верхней границе зоны предразрушения необходимо представить, используя конститутивные уравнения, через компоненты вектора  $\mathbf{v}$ .

Для модуля  $|\mathbf{P}| \equiv P$  вектора  $\mathbf{P}$  и модуля  $|\mathbf{v}| \equiv v$  вектора  $\mathbf{v}$  имеем

$$P = \sqrt{g_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta}; \quad v = \sqrt{g^{\alpha\beta}v_\alpha v_\beta}. \quad (31)$$

Будем считать, что  $P|_{v=0} = P_o$ .

Воспользуемся конститутивными уравнениями, установленными в статье [3]:

$$P^\alpha = P_o[1 - \tilde{f}(v)]\frac{g^{\alpha\beta}v_\beta}{v}, \quad (32)$$

где  $\tilde{f}(v)$  — функция, возрастающая в промежутке  $(0, \eta)$ .

Обратим внимание на то, что в уравнениях (32) фигурируют контравариантные компоненты вектора  $\mathbf{P}$ , противоположного вектору напряжения в точках на границах зоны предразрушения.

Очевидно, что в данной задаче

$$v_1 > 0, \quad (33)$$

а

$$v_2 = v_3 = 0. \quad (34)$$

В силу равенств (4), а также неравенства (33) и равенств (34) на основании второй из формул (31) получим

$$v = v_1. \quad (35)$$

Заметим, что

$$v_1 = 2u_1. \quad (36)$$

Учитывая равенства (4), а также равенства (34) и формулу (35), для первого из уравнений (32) будем иметь

$$P^1 = P_0[1 - \tilde{f}(v)], \quad (37)$$

а на основании второго и третьего из уравнений (32) придем к равенствам

$$P^2 = P^3 = 0. \quad (38)$$

При решении краевой задачи потребуются еще одна группа уравнений для компонент  $u_1, u_2$ . Из симметрии относительно осей  $x^1, x^2$  следуют такие уравнения:

$$\begin{aligned} u_1(x^1, -x^2) - u_1(x^1, +x^2) = 0; \quad u_2(x^1, -x^2) + u_2(x^1, +x^2) = 0; \\ u_1(-x^1, x^2) + u_1(+x^1, x^2) = 0; \quad u_2(-x^1, x^2) - u_2(+x^1, x^2) = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Из симметрии относительно оси  $x^2$  вытекает, что в конце зоны предразрушения

$$u_1 = 0. \quad (40)$$

Выведем уравнение для компоненты  $u_2$ .

Выделим около конца зоны предразрушения точку с координатами  $a^1, a^2$ . Будем полагать, что  $u_2(x^1, x^2)$  — действительная функция, имеющая все непрерывные частные производные (до второго порядка включительно) в окрестности  $D$  точки  $(a^1, a^2)$ .

Составим кратный ряд Тейлора, расположенный по степеням  $x^1 - a^1, x^2 - a^2$ :

$$\begin{aligned} u_2(x^1, x^2) = u_2(a^1, a^2) + \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial u_2}{\partial x^\beta} \Big|_{(a^1, a^2)} (x^\beta - a^\beta) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \Big|_{(a^1, a^2)} (x^\beta - a^\beta)(x^\gamma - a^\gamma) \quad ((x^1, x^2) \in D). \end{aligned} \quad (41)$$

Координаты конца зоны предразрушения запишем так:  $a^1 + \varepsilon^1, a^2 + \varepsilon^2$ . С учетом этого на основании формулы (41) будем иметь

$$\begin{aligned} -u_2(a^1 + \varepsilon^1, a^2 + \varepsilon^2) + u_2(a^1, a^2) + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 + \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^1 + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 \varepsilon^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

**Числовой пример.** В результате численного решения краевой задачи показана эволюция зоны предразрушения, происходящая вследствие повышения нагрузки на тело.

При решении краевой задачи использованы данные для сплава Д16, приведенные в статье [6].

Компоненты тензора анизотропии  $\mathbf{F}$  являются такими:

$$\begin{aligned} F_{1111} &= 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & -F_{1122} &= 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & -F_{1133} &= 0,049 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \\ F_{1212} &= 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & F_{1313} &= 0,121 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & F_{2222} &= 0,142 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \\ -F_{2233} &= 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & F_{2323} &= 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, & F_{3333} &= 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}. \end{aligned}$$

Для компонент тензоров анизотропии  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{G}$ , как компонент взаимно обратных тензоров четвертого ранга, имеем

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\gamma\delta\epsilon\zeta} = \delta_{\alpha}^{\epsilon} \delta_{\beta}^{\zeta} (\epsilon, \zeta). \quad (43)$$

В формулах (43) фигурируют символы Кронекера  $\delta_{\gamma}^{\eta}$ :

$$\delta_{\gamma}^{\eta} = \begin{cases} 1 & (\gamma = \eta); \\ 0 & (\gamma \neq \eta). \end{cases} \quad (44)$$

На основе значений компонент тензора анизотропии  $\mathbf{F}$  по формулам (43) вычислены (с учетом равенств (44)) компоненты тензора анизотропии  $\mathbf{G}$ :

$$\begin{aligned} G^{1111} &= 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{1122} &= 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{1133} &= 2,263 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\ G^{1212} &= 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{1313} &= 2,066 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{2222} &= 8,781 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \\ G^{2233} &= 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{2323} &= 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & G^{3333} &= 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Па}. \end{aligned}$$

Функция  $\tilde{\varphi}(\Omega)$  из уравнений (1) принята в виде [4]

$$\tilde{\varphi}(\Omega) = \begin{cases} 0, & \Omega \in [0, \nu]; \\ \frac{\Omega - \nu - a \ln\left(\frac{\Omega - \nu}{a} + 1\right)}{\Omega}, & \Omega \in [\nu, \Psi]. \end{cases} \quad (45)$$

В дальнейшем воспользуемся критерием прочности, сформулированным в статье [4]:

$$\Omega = \Psi. \quad (46)$$

Установлено [4], что при нарушении прочности, когда величина  $\Omega$  становится равной постоянной  $\Psi$ , плотность энергии, расходуемой на деформацию элемента тела без изменения его объема, принимает значение  $\Psi$ :

$$\Psi = \nu \left( \Psi - \frac{\nu}{2} \right) + a^2 \left\{ \left( \frac{\Psi - \nu}{a} + 1 \right) \left[ \ln \left( \frac{\Psi - \nu}{a} + 1 \right) - 1 \right] + 1 \right\}. \quad (47)$$

Постоянные  $\nu$  и  $\Psi$ , а также коэффициент  $a$  из формул (45) и (47) таковы:

$$\nu = 3,25 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}, \quad \Psi = 93,50 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}; \quad a = 1,1112866 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}.$$

На основе этих значений по формуле (47) вычислено:  $\Psi = 645,97 \cdot 10^4 \text{ Па}$ .



Функция  $\tilde{f}(v)$  из уравнений (32) принята в виде [3]

$$\tilde{f}(v) = b_{k_1} v^{k_1} + b_{k_2} v^{k_2}, \quad (48)$$

где  $k_1, k_2$  — целые числа ( $1 < k_1 < k_2$ ).

Коэффициенты  $b_{k_1}$  и  $b_{k_2}$  таковы:

$$b_{k_1} = \frac{k_2 + m\eta}{(k_2 - k_1)\eta^{k_1}}; \quad b_{k_2} = \frac{k_1 + m\eta}{(k_1 - k_2)\eta^{k_2}}. \quad (49)$$

Здесь

$$m = - \left. \frac{d}{dv} \tilde{f}(v) \right|_{v=\eta}.$$

Принималось, что

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 3; \quad m = -0,2 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}; \quad \eta = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

На основе этих значений по формулам (49) вычислены коэффициенты  $b_{k_1}, b_{k_2}$ :

$$b_{k_1} = 0,08 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-2}; \quad b_{k_2} = -0,008 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

В соответствии с формулой (48)  $\tilde{f}(v) = 1$ , если  $v = 5,0 \cdot 10^{-5}$  м. При этом, согласно уравнению (37),  $P^1 = 0$ , т. е. будет достигнуто состояние предельного равновесия.

Координата  $x_f^2$  начала зоны предразрушения (точки А) записана как  $x_f^2$ , а конца зоны предразрушения (точки В) — как  $x_g^2$  (см. рис. 1).

Были заданы

$$x_f^2 = 1,50 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad x_g^2 = 1,58 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad 1,60 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad 1,62 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \\ -\epsilon^1 = \epsilon^2 = 0,02 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Итак, длина трещины,  $l_R = x_f^2$ , была равной  $1,50 \cdot 10^{-2}$  м, а длина зоны предразрушения,  $l_S = x_g^2 - x_f^2$ , составляла  $0,08 \cdot 10^{-2}$  м,  $0,10 \cdot 10^{-2}$  м,  $0,12 \cdot 10^{-2}$  м.

Подчеркнем, что лишь компонента  $P^1$  вектора  $\mathbf{P}$  в точках на верхней границе рассматриваемой части тела не была равна нулю (см. рис. 1). Эта компонента выражена через параметр  $w$  нагрузки на тело:  $P^1 = w$ .

Решая краевую задачу, следовало определить параметр  $w$  (из условия, что в точке В соблюдается критерий (46), а  $\Psi = 645,97 \cdot 10^4$  Па).

В общей сложности решение краевой задачи найдено для трех вариантов, различающихся длиной зоны предразрушения. В каждом из этих вариантов параметр  $w$  варьировали.

При решении краевой задачи (для каждого из значений  $w$ ) учитывали, что в точке В компонента  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  должна удовлетворять равенству

$$S_B^{11} = P_o. \quad (50)$$

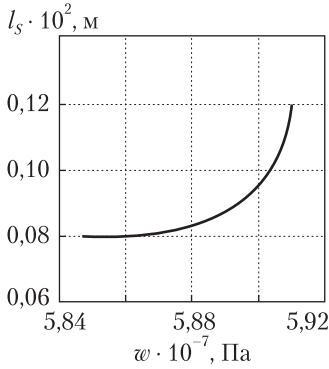


Рис. 2.

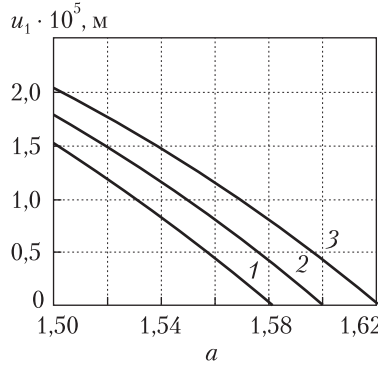
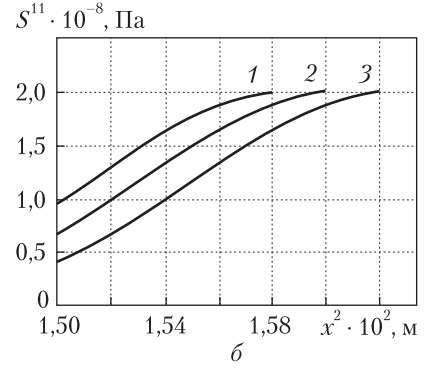


Рис. 3



Не известную заранее величину  $P_0$  определяли за несколько итераций. Изначально ее задавали равной  $1,90 \cdot 10^8 \text{ Па}$ .

Компоненту  $P^1$  вектора  $\mathbf{P}$  в точках на верхней границе зоны предразрушения выражали, используя уравнение (37), через величину  $P_0$  и функцию  $\tilde{f}(\mathbf{v})$ . Кроме того учитывали первое из равенств (38).

Затем по уравнениям (20) и (25), (27), (29), а также (39), (40) и (42) определяли, представив частные производные через конечные разности, компоненты  $u_1, u_2$ . Выполняли это методом последовательных приближений, обобщающим метод Ильюшина. Так, в первом приближении принимали  $\tilde{\varphi}(\Omega) = 0$ . При этом в соответствии с формулами (21) и (26), (28), (30) имели место равенства  $Q^1, Q^2 = 0$  и  $R^1, R^2 = 0$ . Кроме того, в первом приближении полагали  $\tilde{f}(\mathbf{v}) = 0$ . В каждом последующем приближении, одном из 89-ти приближений, значения функции  $\tilde{\varphi}(\Omega)$ , величин  $Q^1, Q^2$  и  $R^1, R^2$ , а также функции  $\tilde{f}(\mathbf{v})$  устанавливали на основе значений компонент  $u_1, u_2$ , полученных в предыдущем приближении. Для этого привлекали формулы (45), (2), первый из инвариантов (3), инварианты (10) и (13), выражение (14), формулы (21) и (26), (28), (30), а также уравнение (37), формулы (48), (35) и (36).

После этого по первому из уравнений (15) вычисляли компоненту  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  в точке  $B$ . Если она не удовлетворяла равенству (50), то величину  $P_0$  корректировали и всю процедуру повторяли.

Учитывая формулу (2), первый из инвариантов (3), инварианты (10) и (13), проверяли соблюдение критерия (46) в точке  $B$ . Если это не имело места, то параметр  $w$  изменяли.

**Анализ полученных результатов.** В результате решения краевой задачи для различных длин зоны предразрушения определена, в частности, нагрузка на тело (параметр  $w$ ). Согласно полученным значениям  $w$  (табл. 1), с повышением нагрузки на тело увеличивается длина зоны предразрушения и, как следствие этого, раскрытие трещины в вершине (точке  $A$ ). Иными словами, тело стремится к

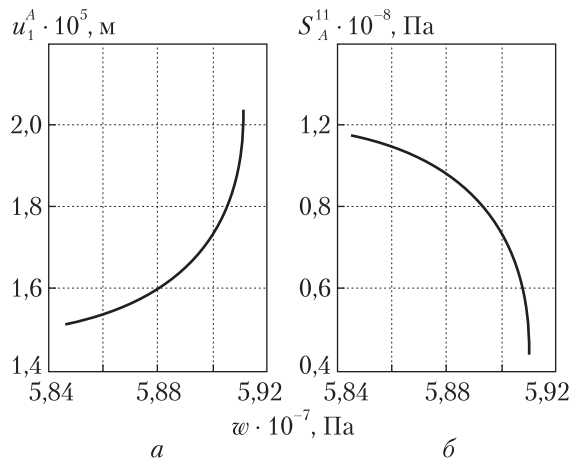


Рис. 4

Таблица 1

$l_s \cdot 10^2, \text{ м}$	$w \cdot 10^{-7}, \text{ Па}$
0,08	5,846375
0,10	5,903761
0,12	5,909860

Таблица 2

$l_s \cdot 10^2, \text{ м}$	$D_{11}^B \cdot 10^2$	$D_{22}^B \cdot 10^2$	$D_{33}^B \cdot 10^2$
0,08	2,0235	1,8232	-3,5356
0,10	2,0281	1,8190	-3,5359
0,12	2,0311	1,8170	-3,5364

состоянию предельного равновесия, в котором модуль  $\nu$  вектора  $\mathbf{v}$  принимает критическое значение  $\eta$ , а модуль  $P$  вектора  $\mathbf{P}$  становится равным нулю (все это — в точке  $A$ ).

По мере повышения нагрузки на тело изменение длины зоны предразрушения становится все более значительным. Это убедительно иллюстрирует график, представленный на рис. 2. Подобным же образом ведет себя и раскрытие трещины в вершине.

Наглядное представление об эволюции зоны предразрушения в процессе нагружения тела дает рис. 3. Для кривых, изображенных на этом рисунке, длина зоны предразрушения такова:

$$1 - 0,08 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad 2 - 0,10 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad 3 - 0,12 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

На рис. 3, *a* показано, как именно увеличивается перемещение (в направлении оси  $x^1$ ) верхней границы зоны предразрушения с возрастанием длины зоны предразрушения.

Интересно, что компонента  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  в точке  $B$  слабо зависит от длины зоны предразрушения. В самом деле, для кривых 1, 2, 3, изображенных на рис. 3, *b*, она составляет  $2,0026 \cdot 10^8 \text{ Па}$ ,  $2,0046 \cdot 10^8 \text{ Па}$ ,  $2,0087 \cdot 10^8 \text{ Па}$  соответственно.

Зависимости компоненты  $u_1$  вектора  $\mathbf{u}$  и компоненты  $S^{11}$  тензора  $\mathbf{S}$  в точке  $A$  от параметра  $w$  иллюстрирует рис. 4. Как видно,  $u_1^A$  резко увеличивается, а  $S_A^{11}$  столь же резко уменьшается с повышением параметра  $w$ .

Для каждой длины зоны предразрушения по соотношениям (5) вычислены компоненты  $D_{11}, D_{22}, D_{33}$  тензора  $\mathbf{D}$  в точках, окружающих точку  $B$ . Особый интерес вызывают значения этих компонент в самой точке  $B$  (табл. 2).

Отметим, что возрастание длины зоны предразрушения от  $0,08 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  до  $0,12 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  обусловило увеличение  $D_{11}^B$  от  $2,0235 \cdot 10^{-2}$  до  $2,0311 \cdot 10^{-2}$  и уменьшение  $D_{22}^B$  от  $1,8232 \cdot 10^{-2}$  до  $1,8170 \cdot 10^{-2}$ . При этом  $D_{33}^B$  изменилась гораздо менее заметно, уменьшившись от  $-3,5356 \cdot 10^{-2}$  до  $-3,5364 \cdot 10^{-2}$ .

Представляется интересным тот факт, что, невзирая на заметное возрастание длины зоны предразрушения, компонента  $D_{33}^B$  не претерпела ощутимых изменений.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Kaminsky A.A., Kurchakov E.E. Influence of tension along a mode I crack in an elastic body on the formation of a nonlinear zone. *Int. Appl. Mech.* 2015. **51**, № 2. P. 130–148.
2. Kaminsky A.A., Bogdanova O.S. Long-term crack-resistance of orthotropic viscoelastic plate under biaxial loading. *Int. Appl. Mech.* 1995. **31**, № 9. P. 747–753.
3. Богданова О.С., Каминский А.А., Курчаков Е.Е. О зоне предразрушения возле фронта произвольной трещины в твердом теле. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2017. № 5. С. 25–33. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.05.025>

4. Курчаков Е.Е. Термодинамическое обоснование определяющих уравнений для нелинейного анизотропного тела. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2015. № 9. С. 46–53.
5. Love A. Treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927. 674 p.
6. Kurchakov E.E. Stress-strain relation for nonlinear anisotropic medium. *Sov. Appl. Mech.* 1979. 15, № 9. С. 803–807.

Поступило в редакцию 20.04.2018

#### REFERENCES

1. Kaminsky, A. A. & Kurchakov, E. E. (2015). Influence of tension along a mode I crack in an elastic body on the formation of a nonlinear zone. *Int. Appl. Mech.*, 51, No. 2, pp. 130-148.
2. Kaminsky, A. A. & Bogdanova, O. S. (1995). Long-term crack-resistance of orthotropic viscoelastic plate under biaxial loading. *Int. Appl. Mech.*, 31, No. 9, pp. 747-753.
3. Bogdanova, O. S., Kaminsky, A. A. & Kurchakov, E. E. (2017). On the fracture process zone near the front of an arbitrary crack in a solid. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 5, pp. 25-33. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.05.025> (in Russian).
4. Kurchakov, E. E. (2015). Thermodynamic verification of constitutive equations for a nonlinear anisotropic body. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 9, pp. 46-53 (in Russian).
5. Love, A. (1927). Treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge: Univ. Press.
6. Kurchakov, E. E. (1979). Stress-strain relation for nonlinear anisotropic medium. *Sov. Appl. Mech.*, 15, No. 9, pp. 803-807.

Received 20.04.2018

*A.O. Камінський, Є.Є. Курчаков*

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ  
E-mail: [fract@inmech.kiev.ua](mailto:fract@inmech.kiev.ua)

#### ПРО ЕВОЛЮЦІЮ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ БІЛЯ ВЕРШИНИ ТРИЩИНИ В НЕЛІНІЙНОМУ АНІЗОТРОПНОМУ ТІЛІ

У компонентах вектора переміщення поставлено крайову задачу про рівновагу нелінійного пружного ортотропного тіла з тріщиною нормального відриву за наявності зони передруйнування. В результаті чисельного розв'язання цієї задачі показано еволюцію зони передруйнування, яка відбувається при навантаженні тіла. Вивчено поле деформацій біля кінця зони передруйнування.

**Ключові слова:** нелінійне пружне ортотропне тіло, тріщина нормального відриву, зона передруйнування, конститутивні рівняння.

*A.A. Kaminsky, E.E. Kurchakov*

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev  
E-mail: [fract@inmech.kiev.ua](mailto:fract@inmech.kiev.ua)

#### ON THE EVOLUTION OF THE PREFRACTURE ZONE NEAR THE CRACK TIP IN A NONLINEAR ANISOTROPIC BODY

A boundary-value problem in terms of the displacement vector components for the equilibrium state of a nonlinear elastic orthotropic body with a crack of normal separation is stated with regard for its prefracture zone. As a result of the numerical solution of the problem, the evolution of this zone under the loading is shown. The deformation field near the crack tip is studied.

**Keywords:** nonlinear elastic orthotropic body, crack of normal separation, prefracture zone, constitutive equations.