УДК 621. 314.611

РАЗВИТИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ НАХОЖДЕНИЯ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Горбачев М.Н., к.т.н.
Институт общей энергетики НАН Украины,
Украина, 03056, Киев, пр-т Победы, 56,
Тел. (044) 441-25-83

Обговорюються відомий та запропонований і теоретично обґрунтований нетрадиційний аналітичній методи знаходження періодичних рішень ,що дозволяють чий описати у замкнутій формі усталені процеси в лінійних радіотехнічних та електричних колах із зосередженими параметрами при живленні негармонійною напругою. Приведено приклад знаходження рішення модельної задачі для лінійного кола четвертого порядку.

Обсуждаются известный и предложенный, теоретически обоснованный, нетрадиционный методы нахождения в замкнутом виде периодических решений, описывающих установившиеся процессы в линейных электрических и радиотехнических цепях с сосредоточенными параметрами при воздействии на них негармонических сигналов (напряжений, э.д.с.). Приведен пример решения модельной задачи для линейной цепи четвертого порядка.

Известно, что задачи нахождения периодических решений, описывающих установившиеся процессы в линейных электрических и радиотехнических цепях 2-го, 3-го и более высоких порядков с постоянными параметрами при входном негармоническом сигнале произвольной формы, имеют большое теоретическое и прикладное значение. К такого рода цепям относятся фильтры низшей и высокой частоты; полосовые и заграждающие фильтры; корректирующие цепи каналов связи; сглаживающие пассивные фильтры и др. Искомые решения задач указанного класса представляют собой частные периодические решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью в виде полного ряда Фурье для функции, описывающей входной сигнал и удовлетворяющей условиям Дирихле. Для нахождения этих решений в радиотехнике и электросвязи применяют метод гармонического синтеза, разработанный А.М. Заездным [1].

Основная трудность гармонического синтеза как обратной задачи по отношению к гармоническому анализу заключается в том, что аналитическая структура сворачиваемых к замкнутому виду рядов заранее неизвестна и для ее отыскания требует применения не только известных, но и поиска новых подходов и способов суммирования бесконечных функциональных тригонометрических рядов. Это объясняется тем, что теория гармонического синтеза разработана значительно слабее по сравнению с теорией гармонического анализа. Однако, несмотря на возросший уровень и программное обеспечение численно-аналитических и численных методов расчета, в теории радиотехнических и электронных цепей по-прежнему представляется актуальным дальнейшее развитие аналитических методов расчета, к которым относятся указанный метод гармонического синтеза и его модификации [1, 2]. Поэтому разработка новых частных и общих способов и приемов для решения задач гармонического синтеза представляет значительный интерес.

В связи с этим предложен и разработан аналитический метод нахождения в замкнутом виде периодических решений, описывающих установившиеся процессы в линейных цепях с сосредоточенными параметрами при существенно негармонических входных сигналах. Этот метод основан на использовании однозначной связи между частотными свойствами цепей и гармоническим спектром заданного входного сигнала с учетом законов линейных радиотехнических и электрических цепей и является усовершенствованием и дальнейшим развитием известного метода гармонического синтеза [1].

Действительно, решение задач указанного класса по методу А.М. Заездного связано с выполнением значительного объема громоздких и трудоемких математических преобразований, вычислением корней характеристического уравнения и составлением вспомогательной функции и ее производных, необходимых для нахождения частных (периодических) решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений специального вида (1):

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + \ldots + a_1 \frac{dy(x)}{dx} + a_0 y(x) = F(x), \qquad (1)$$

у которых правая часть F(x) является не усеченным рядом Фурье, а содержит бесконечный спектр гармоник, что существенно ограничивает применение этого метода для цепей выше второго – третьего порядков.

Усовершенствованный метод гармонического синтеза (УМГС) позволяет значительно упростить процедуру нахождения периодических решений для указанного класса задач по сравнению с методом А. М. Заездного [1]. Это можно показать следующим образом. Предположим, что на вход некоторой линейной цепи подан негармонический сигнал в виде напряжения или э.д.с. *e(x)*, представимый в виде полного ряда Фурье:

$$e(x)=\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right), \qquad (2)$$

где $x = \omega t$, ω - круговая частота основной гармоники; t – текущая координата времени; α_0, α_k, β_k - коэффициенты Фурье.

Задача заключается в том, что необходимо найти аналитическое выражение в замкнутом виде для тока $i(x)$ на входе этой цепи. Если исследуемую цепь представить как некоторый эквивалентный двухполюсник и использовать законы линейных электрических цепей (закон Ома, принцип суперпозиции) и функции входного комплексного сопротивления $Z(k\omega)$ или входной комплексной проводимости $Y(k\omega)$ [3], то всегда можно составить выражение для k – ой гармоники искомого тока в общем виде, а затем представить искомый ток $i(x)$ также в виде некоторого ряда Фурье, отличающегося от ряда (2):

$$i(x)=i_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(kx\pm\varphi_k\right)+b_k\sin\left(kx\pm\varphi_k\right)\right], \qquad (3)$$

где

$$i_0=\frac{\alpha_0}{2\left|Z_0\right|};$$

$$a_k=\frac{\alpha_k}{\left|Z_k(k\omega)\right|};$$

$$b_k=\frac{\beta_k}{\left|Z_k(k\omega)\right|}; \qquad (4)$$

$\varphi_k=\varphi(k\omega)$ - фазовые углы между гармониками заданного напряжения $e(x)$ и искомого тока $i(x)$ порядка k. Следовательно, с математической точки зрения задача сводится к суммированию нового ряда Фурье (3).

В общем случае коэффициенты ряда (3) связаны с коэффициентами исходного ряда (2) соотношениями (4). Отсюда следует, что если выполнены условия

$$0<\left|Z_k(k\omega)\right|<\infty,$$
$$0<\left|Y(k\omega)\right|<\infty \qquad (5)$$

и порядок λ стремления к нулю коэффициентов ряда (3) больше единицы, то есть

$$\left|a_k\right|,\left|b_k\right|<\frac{h}{k^{\lambda}} \text{ и } \lambda>1,\ h=\text{const}, \qquad (6)$$

то ряд (3) будет сходиться равномерно, что и гарантирует нахождение его суммы в замкнутом виде известными математическими методами [1, 3, 4].

Таким образом, в конечном итоге процедура нахождения частного решения дифференциального уравнения типа (1) с правой частью в виде ряда Фурье (2) для исследуемой цепи заменяется более простой и доступной процедурой построения преобразованного ряда Фурье (3) и его последующего суммирования с привлечением математических справочников и других справочных материалов. Отметим, что особенность разработанного метода состоит в том, что искомые периодические решения могут быть найдены аналитическим путем в замкнутом виде либо точно, либо приближенно. При этом в последнем случае решение целесообразно находить в виде суммы двух составляющих – основной гармоники или конечного числа низших гармоник, которые всегда можно найти точно, и суммы всех остальных (высших) гармоник, которые можно и в ряде случаев целесообразно находить приближенно. С этой целью находят и используют аппроксимирующие функции $\left|\widetilde{Z}_k(k\omega)\right|$ и $\widetilde{\varphi}_k(k\omega)$ для соответствующих точных выражений. В качестве иллюстрации разработанного метода рассмотрен пример решения модельной задачи для указанного класса электрических цепей четвертого порядка.

Постановка задачи заключается в следующем. Необходимо найти периодические решения, описывающие установившиеся негармонические процессы в линейной двухконтурной электрической цепи с магнитной (трансформаторной) связью, применяемой для согласования сопротивления нагрузки и повышения избирательности системы с одновременным расширением ее полосы пропускания. Эта известная схема имеет четвертый порядок и применяется в радиоприемных и радиопередающих устройствах.

Электромагнитные процессы в контурах этой схемы описываются известной системой уравнений:

$$e(t)=i_1R_1+L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{C_1}\int i_1(t)\cdot dt, \qquad (7)$$

$$0=i_2R_2+L_2\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C_2}\int i_2(t)\cdot dt, \qquad (8)$$

где R_1, R_2, L_1, L_2, C_1 и C_2 - электрические параметры элементов соответственно входного и выходного контуров; M – коэффициент взаимной индукции; $e(t)$ – входной негармонический сигнал в виде э.д.с. или напряжения.

Будем искать периодическое решение для тока $i_1(\omega t)$ первого (входного) контура во временной области методом УМГС полагая, что параметры контуров одинаковы ($R_1=R_2=R$; $L_1=L_2=L$; $C_1=C_2=C$) и, следовательно, равны их резонансные частоты ($\omega_{01}=\omega_{02}=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$) и добротности ($h_1=h_2=h$ $=\frac{\omega_0 L}{R}$), а входной сигнал $e(x)$ имеет форму меандра, описываемого известным рядом Фурье [1]:

$$\frac{4}{\pi}E\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}, \qquad (9)$$

где номер гармоники k=2n-1; n = 1, 2, 3, … ; ∞ - числа натурального ряда.

Искомое решение в общем виде можно представить:

$$i_1(nx) = \frac{4}{\pi} E \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\sin(nx - \varphi_n)}{nZ_{\acute{y}}(n)} = \quad (10)$$

$$= \frac{4}{\pi} E \left(\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{R_{\acute{y}}}{Z_{\acute{y}}^2(n)} \cdot \frac{\sin nx}{n} - \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{X_{\acute{y}}(n)}{Z_{\acute{y}}^2(n)} \cdot \frac{\cos nx}{n} \right)$$

где $x = \omega t$, $R_{\acute{y}} = R\left(1+\gamma^2\right)$, $n = \dfrac{\omega}{\omega_0}$,

$$\left[\frac{e^{n_1 x}}{1+e^{n_1 x}} - \frac{e^{n_2 x}}{1+e^{n_2 x}} \right];$$

$$X_{\acute{y}}(n) = Rh\left(1-\gamma^2\right)\left(n - \frac{1}{n}\right);$$

$$Z_{\acute{y}}(n) = R\sqrt{\left(1+\gamma^2\right)^2 + h^2\left(1-\gamma^2\right)^2\left(n - \frac{1}{n}\right)^2};$$

$$tg\varphi_{\acute{y}}(n) = h\frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2}\left(n - \frac{1}{n}\right);$$

$$\gamma = \frac{nhk_c}{\sqrt{1+h^2\left(n-\dfrac{1}{n}\right)^2}} = f(n).$$

Опуская промежуточные математические преобразования можно показать, что искомое точное периодическое решение для тока входного (первого) контура имеет следующий окончательный вид:

$$i_1(x) = \frac{E}{R}\frac{1}{h}\frac{1}{\left(1-\gamma^2\right)\sqrt{\dfrac{a^2}{4}-1}}\left[\frac{e^{n_1 x}}{1+e^{n_1 x}} - \frac{e^{n_2 x}}{1+e^{n_2 x}}\right], \quad (11)$$

где

$$n_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1},$$

$$n_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1},$$

$$a = \frac{1}{h}\frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2}.$$

Отметим, что эффективность применения предложенного приближенного метода возрастает с ростом порядка цепи, например, при исследовании реактивных двухполюсников n–го порядка [5]; при синтезе реактивных двухполюсников, имеющих вид лестничных схем [3].

Таким образом, рассмотренный усовершенствованный метод гармонического синтеза и приведенный пример решения модельной задачи для линейной цепи 4-го порядка позволяют сделать ряд выводов.

Во-первых, преимущество предложенного метода нахождения в замкнутом виде периодических решений для рассматриваемого класса задач по сравнению с другими методами, заключается, прежде всего, в его доступности и простоте, а также в возможности учета всех гармонических составляющих, адекватных полному спектру возмущающего воздействия, что представляет значительный интерес для исследователей этого класса задач.

Во-вторых, общий вид получаемого периодического решения явно не выражается через корни характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению исследуемой цепи, поэтому эффективность применения предложенного метода и разработанных на его основе алгоритмов и инженерной методики получения искомых решений и особенно – приближенных решений – возрастает с ростом порядка цепи.

Кроме того, нахождение замкнутого приближенного периодического решения в виде двух составляющих позволяет упростить определение и расчет основных энергетических и спектральных характеристик исследуемых электрических и радиотехнических цепей (коэффициента гармоник, коэффициента искажения и др.).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Заездный А.М. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 535 с.

[2] Толстов Г.П. Ряды Фурье.- М.: Наука, 1980. - 348 с.

[3] Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. Изд. 2-е. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 440 с.

[4] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Гос. изд-во физ.–мат. литер., 1959. – 307 с.

[5] Ханзел Г.Е. Справочник по расчету фильтров. США, Нью-Йорк, 1969. Пер. с англ. под ред. А.Е. Знаменского. – М.: Советское радио, 1974. – 288 с.

Поступила 13.03.03