

ЧОТИРИМІРНИЙ ПРОСТІР І ВЕКТОР СТРУМУ ЗСУВУ

Розглянуто використання векторного і скалярного потенціалів при розрахунку основних векторів електромагнітного поля, показано формування компонент чотиритензора даного поля похідними чотиримірним потенціалу, встановлено співвідношення, що виражає струм зсуву через потенціали.

Рассмотрено использование векторного и скалярного потенциалов при расчёте основных векторов электромагнитного поля, показано формирование компонент четырёхтензора данного поля производными четырёхмерного потенциала, установлено соотношение, выражающее ток смещения через потенциалы.

ВСТУП

Повне й точне дослідження процесів, що відбуваються в електромагнітних полях, які змінюються в часі, може бути виконане й описано за допомогою системи рівнянь Максвелла:

$$[\nabla \mathbf{H}] = \partial \mathbf{D} / \partial t + \boldsymbol{\delta}, \quad [\nabla \mathbf{E}] = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad \nabla \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

Дана система являє собою формулювання основних постулатів або аксіом електродинаміки. Її утворюють взаємозалежні рівняння першого порядку в частинних похідних, що визначають зміну складових електричних і магнітних полів. Для простих конфігурацій рівняння Максвелла можуть бути вирішені безпосередньо. Однак уведення допоміжних величин – скалярного φ й векторного \mathbf{A} потенціалів дозволяє звести систему до меншого числа рівнянь другого порядку, що істотно полегшує її рішення [1]. При цьому деякі з рівнянь Максвелла задовольняються автоматично.

Оскільки дивергенція ротора дорівнює нулю, то відповідно до рівняння Максвелла, що виражає принцип безперервності магнітного потоку ($\nabla \mathbf{B} = 0$), вектор \mathbf{B} можна виразити через векторний потенціал \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}]. \quad (1)$$

Підстановка останнього вираження в друге рівняння Максвелла ($[\nabla \mathbf{E}] = -\partial \mathbf{B} / \partial t$) зі зміною порядку диференціювання за часом і по просторових координатах дозволяє одержати співвідношення [2]:

$$\text{rot}(\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t) = 0.$$

Величину в круглих дужках можна представити у вигляді градієнта деякої функції скалярного потенціалу φ , тому що ротор градієнта тотожно дорівнює нулю:

$$\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t = \nabla \varphi.$$

$$\text{Отже} \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t. \quad (2)$$

Формулами (1) і (2) вектори електромагнітного поля \mathbf{E} й \mathbf{B} виражаються через чотири скалярні функції: A_x, A_y, A_z і φ .

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Завдання векторного й скалярного потенціалів однозначно визначає електромагнітне поле. Поля \mathbf{B} й \mathbf{E} , знайдені через потенціали \mathbf{A} й φ співвідношеннями (1) і (2), тотожно задовольняють рівнянням Максвелла $\nabla \mathbf{B} = 0$ й $[\nabla \mathbf{E}] = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ відповідно.

Рівняння Максвелла $\nabla \mathbf{D} = \rho$ або $\nabla \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_a$ (рівняння теореми Гауса в диференціальній формі) також може бути записане через потенціали [1], використовуючи вираз (2):

$$\nabla(-\nabla \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t) = \rho / \varepsilon_a$$

$$\text{або} \quad \nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (3)$$

Щоб скласти перше рівняння Максвелла $[\nabla \mathbf{H}] = -\partial \mathbf{D} / \partial t + \boldsymbol{\delta}$ щодо векторного потенціалу необ-

хідно помножити його ліву і праву частину на магнітну проникність середовища μ_a :

$$[\nabla \mathbf{B}] = \mu_a \partial \mathbf{D} / \partial t + \mu_a \boldsymbol{\delta}.$$

Для однорідних і ізотропних середовищ $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}$, тому:

$$[\nabla \mathbf{B}] = \mu_a \varepsilon_a \partial \mathbf{E} / \partial t + \mu_a \boldsymbol{\delta}.$$

Приймаючи до уваги рівняння (1), відповідно до якого $\mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}]$, отже

$$[\nabla[\nabla \mathbf{A}]] = \mu_a \varepsilon_a \partial \mathbf{E} / \partial t + \mu_a \boldsymbol{\delta}.$$

Відповідно до однієї з основних формул векторного аналізу $[\nabla[\nabla \mathbf{A}]] = \nabla(\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, таким чином:

$$\nabla(\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_a \varepsilon_a \partial \mathbf{E} / \partial t + \mu_a \boldsymbol{\delta}.$$

Похідна $\partial \mathbf{E} / \partial t$, що бере участь в останнім рівнянні, також може бути виражена через потенціали відповідно до формули (2):

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2},$$

тому:

$$\nabla(\nabla \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu_a \boldsymbol{\delta}.$$

Отримане співвідношення може бути переписане в такий спосіб:

$$\nabla(\nabla \mathbf{A} + \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial t}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_a \boldsymbol{\delta}. \quad (4)$$

Таким чином, система (1) чотирьох рівнянь Максвелла зведена до двох взаємозалежних рівнянь (3) і (4). Для одержання окремих рівнянь для потенціалів φ і \mathbf{A} необхідно скористатися свободою в їхньому визначенні. Тому що магнітна індукція \mathbf{B} пов'язана з векторним потенціалом \mathbf{A} співвідношенням (1), то потенціал \mathbf{A} визначений лише з точністю до адитивної векторної функції, що є градієнтом довільної функції Λ . Магнітне поле \mathbf{B} не змінюється при перетворенні, якщо:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad} \Lambda. \quad (5)$$

Щоб при цьому залишалось незмінним також і електричне поле \mathbf{E} (2), варто одночасно перетворити й скалярний потенціал:

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \partial \Lambda / \partial t. \quad (6)$$

Виразення (5) і (6) дозволяють, зокрема, вибрати таку систему потенціалів, у якій виконується рівність:

$$\nabla \mathbf{A} + \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

тобто дозволяють накласти на потенціали додаткову умову Лоренца (слід зазначити, що цій умові можна задовольнити завжди). При цьому рівняння (3) і (4) зводяться до двох окремих не однорідних хвильових рівнянь для \mathbf{A} й φ :

$$\nabla^2 \varphi - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\rho \quad (8)$$

$$\text{і} \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \boldsymbol{\delta}. \quad (9)$$

Таким чином:

$$\boldsymbol{\delta} = \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - (1/\mu_a) \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (10)$$

Рівняння (8) і (9) у сукупності з (7) утворюють систему рівнянь, повністю еквівалентну рівнянням Максвелла.

Електромагнітні потенціали теорії Лоренца: скалярний φ і векторний \mathbf{A} мають просте чотиримірне тлумачення. Як уперше було відзначено Минковским [3], вони можуть бути з'єднані в один вектор чотиримірного світу – чотиримірний потенціал:

$$\mathbf{A}_\mu = (\mathbf{A}, A_t), \quad (11)$$

тут: $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ – тримірний векторний потенціал, $A_t = (j/c)\varphi$ – часовий компонент чотиривектора.

Умову Лоренца (7) можна записати через чотиримірну дивергенцію чотиривектора \mathbf{A}_μ [4]. Тому що:

$$\nabla_\mu A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial (j\varphi/c)}{\partial (jct)} = \nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

виходить, що умова Лоренца в чотиримірному запису має вигляд:

$$\nabla_\mu A_\mu = 0.$$

Дана умова в теорії Лоренца використовується для однозначного визначення складових чотиримірних вектора \mathbf{A}_μ .

В електродинаміці магнітну індукцію \mathbf{B} , як і напруженість електричного поля \mathbf{E} зручно виражати через векторний і скалярний потенціали \mathbf{A} й φ за формулами (1) і (2).

При використанні компонентів чотиривектора \mathbf{A}_μ комплексного чотиримірного простору вектори електричного поля описуються наступними співвідношеннями:

$$B_x \equiv B_1 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \quad (12)$$

$$E_x \equiv E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{c}{j} \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} j c = \frac{c}{j} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1} \right). \quad (13)$$

Останні члени в (12) і (13) записані на підставі визначення складових чотиримірного потенціалу. Аналогічно, використовуючи компоненти чотиривектора \mathbf{A}_μ , можна описати й інші складові векторів \mathbf{E} і \mathbf{B} електромагнітного поля. Ці комбінації утворюють антисиметричний чотиритензор другого рангу:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4), \quad (14)$$

У такого тензора діагональні компоненти, тобто компоненти, що мають два однакових індекси, дорівнюють нулю.

Компоненти $F_{4\nu}$ цього чотиритензора дорівнюють величинам $(j/c)\mathbf{E}_\nu$ відповідно, у той час як компоненти $F_{\mu 4}$ дорівнюють величинам $-(j/c)\mathbf{E}_\mu$.

Таким чином, усі компоненти вектора напруженості електричного поля можна виразити через комбінації похідних від компонентів чотиривектора \mathbf{A}_μ по чотиримірних координатах відповідно до рівняння (2):

$$E_\mu = \frac{c}{j} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_\mu} \right) = -\frac{\partial A_\mu}{\partial t} - \nabla_\mu \varphi. \quad (15)$$

Часовий компонент даного вектора визначається виразом:

$$E_t = -\partial\varphi/\partial x_4 - \partial A_4/\partial t \equiv E_4 = -\nabla_t \varphi - \partial A_t/\partial t \quad (16)$$

і має дві складові рівні по величині, але протилежні за знаком. Одна з них описується часовим компонентом чотиримірного градієнта скалярної функції $\nabla_t \varphi$, інша – похідної від часової складової чотиримірного потенціалу $\partial A_t/\partial t$.

Для однорідних і ізотропних середовищ вектор електричного зсуву \mathbf{D} й вектор напруженості \mathbf{E} електричного поля зв'язані співвідношенням $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$. Отже, складові вектора електричної індукції також можуть бути виражені через компоненти чотиривектора \mathbf{A}_μ :

$$D_\mu = \epsilon_a E_\mu = \epsilon_a \frac{c}{j} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_\mu} \right) = \epsilon_a \left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial t} - \nabla_\mu \varphi \right). \quad (17)$$

Таким чином, складові току зсуву визначаються компонентами чотиримірного потенціалу \mathbf{A}_μ :

$$\delta_{\mu\text{см}} = \frac{\partial D_\mu}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial E_\mu}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial A_\mu}{\partial t} - \nabla_\mu \varphi \right). \quad (18)$$

ВИСНОВКИ

Отриманий вираз (18) свідчить про те, що вектор щільності зсуву може бути описаний чотиримірним потенціалом. Таким чином, струм зсуву варто розглядати в чотиримірному просторі, з огляду на всі його компоненти. Таке подання вектора струму зсуву спрощує розрахунок основних векторів електродинаміки й дозволяє врахувати при цьому активну складову струму зсуву, тобто активні втрати в діелектрику.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965. – 702 с.
2. Меерович Э.А., Мейерович Б.Э. Методы релятивистской электродинамики в электротехнике и электрофизике. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 232 с.
3. Паули В. Теория относительности. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1991. – 328 с.
4. Угаров В.А. Специальная теория относительности. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1977. – 384 с.

Bibliography (transliterated): 1. Dzhekson Dzh. Klassicheskaya `elektrodinamika. - M.: Mir, 1965. - 702 s. 2. Meerovich `E.A., Mejerovich B. `E. Metody relyativistkoj `elektrodinamiki v `elektrotehnike i `elektrofizike. - M.: `Energoatomizdat, 1987. - 232 s. 3. Pauli V. Teoriya otositel'nosti. - M.: Nauka. Gl. red. Fiz.-mat. lit., 1991. - 328 s. 4. Ugarov V.A. Special'naya teoriya otositel'nosti. - M.: Nauka. Gl. red. Fiz.-mat. lit., 1977. - 384 s.

Поступила 03.10.2011

Придубков Павло Якович, к.т.н., доц.
доцент кафедри "Електротехніка та електричні машини"
Українська державна академія залізничного транспорту
61050, Харків, пл. Фейербаха, 7
тел. (057) 7301996

Хоменко Ігор Васильович, к.т.н., доц.
доцент кафедри "Передача електричної енергії"
Національний технічний університет
"Харківський політехнічний інститут"
61002, Харків, вул. Фрунзе 21

Pridubkov P.Y., Khomenko I.V.

Four-dimensional space and a bias current vector.

Application of vector and scalar potentials for computation of the principal electromagnetic field vectors is considered. Formation of the given field 4-D tensor components with 4-D potential derivatives is shown, expression for bias current in terms of the potentials is derived.

Key words – electromagnet field, vector and scalar potentials, bias current.