ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.08.065
УДК 550.34 + 539.3

О.В. Кендзера[1], член-кореспондент НАН України,
Я.Я. Рущицький[2], член-кореспондент НАН України

[1] Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ
[2] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: kendzera@igph.kiev.ua, rushch@inmech.kiev.ua

До теорії пружних і в'язкопружних сейсмічних хвиль, що поширюються в шаруватій земній товщі

Застосовано прямий метод механіки в дослідженні проходження і відбиття зсувної хвилі при її поширенні через скінченну кількість грунтових шарів з різними товщинами і реологічними властивостями. Механічні властивості грунтових шарів описано гуковою та стандартною реологічною моделями. Отримані явні формули для обчислення хвильового числа і коефіцієнта затухання гармонічної SH-хвилі. Затухання хвилі вивчено за двома варіантами: затухання за просторовою координатою і затухання з часом. Отримані результати можна вважати певним продовженням класичних робіт проф. Саваренського (Росія) в області пружних сейсмічних хвиль і проф. Степанишина (США) в області в'язкопружних сейсмічних хвиль.

Ключові слова: *багатошарова ґрунтова товща, пружна і реологічна моделі, зсувна плоска хвиля, затухання хвилі, коливання на поверхні ґрунту.*

Наука про хвилі в матеріалах виділяє сейсмічні хвилі в окремий розділ, що спричинено трьома основними особливостями цих хвиль: 1) середовище, в якому поширюються сейсмічні хвилі, є товщею Землі; 2) сейсмічні хвилі є хвилями з малими значеннями частоти; 3) джерелом виникнення сейсмічних хвиль є землетруси, виверження вулканів, рух магми в Землі, великі природні зсуви ґрунту чи великі антропогенні (спричинені людською діяльністю) вибухи. Середовище поширення сейсмічних хвиль звичайно вважається здатним до деформування (матеріалом), і для його моделювання застосовуються різні моделі деформування матеріалів, серед яких найчастіше вибирають модель пружного деформування. Тому для аналізу сейсмічних хвиль важливо знати фізичні характеристики різних компонентів земної товщі — ґрунтів, гірських порід тощо. В моделі пружного деформування це означає знання густини і пружних постійних. Історично аналіз сейсмічних хвиль проводився в рамках теорії пружності, яка оперує з такими видами пружних хвиль, як об'ємні хвилі, плоскі хвилі, поверхневі хвилі. Найчастіше приймається, що джерело сейсмічних хвиль є локалізованим і генерує сферичні хвилі. Однак коли предмет вивчення сейсмічних хвиль досить віддалений від джерела, то хвилі вважають плоскими. Тому плоскі хвилі займають значну частину науки про сейсмічні хвилі.

Це повідомлення присвячене теоретичному аналізу поширення плоскої горизонтально поляризованої гармонічної хвилі (SH-хвилі) зі скельного ґрунту через ґрунтові шари до поверхні Землі. Такий аналіз дає в результаті формули для обчислення коливань поверхні Землі і необхідних коефіцієнтів відбиття та проходження хвиль через границі між елементами системи "скельний масив — ґрунтові шари — атмосфера". Знання про коливання поверхні Землі внаслідок приходу сейсмічної SH-хвилі є необхідним компонентом сейсмічного мікрорайонування будівельних майданчиків. Тому важливість теоретичного обґрунтування для даних про коливання поверхні Землі є очевидною [1—8].

Перша частина повідомлення містить певне розширення класичного підходу і кінцевих результатів Саваренського в області пружних сейсмічних хвиль [4]. Тут розглянуто п'ять варіантів аналізу пружної класичної і сейсмічної лінійної гармонічної SH-хвилі: двокомпонентну пружну систему "верхній півпростір — нижній півпростір" з плоскою границею розділу; трикомпонентну пружну систему "верхній півпростір — шар — нижній півпростір"; трикомпонентну систему "атмосфера — пружний ґрунтовий шар — пружний скельний масив"; $(N+2)$-компонентну пружну систему "верхній півпростір — N шарів — нижній півпростір"; $(N+2)$-компонентну систему "атмосфера — N пружних ґрунтових шарів — пружний скельний масив".

Друга частина повідомлення містить певне розширення класичного підходу і кінцевих результатів Степанишина в області в'язкопружних сейсмічних хвиль [8]. В ній використана реологічна стандартна (в'язкопружна триелементна) модель деформування ґрунту і проаналізована сейсмічна гармонічна SH-хвиля в трикомпонентній системі "атмосфера — в'язкопружний ґрунтовий шар — пружний скельний масив" та в $(N+2)$-компонентній системі "атмосфера — N в'язкопружних ґрунтових шарів — пружний скельний масив".

1. До теорії пружних сейсмічних гармонічних SH-хвиль. У найпростішій класичній задачі механіки з аналізу сейсмічної SH-хвилі вважається, що хвиля поширюється в двокомпонентній пружній системі "верхній півпростір $z>0$ — нижній півпростір $z<0$" з границею розділу $z=0$ у вигляді площини Oxy. Таку тривимірну задачу звичайно зводять до двовимірної, припускаючи, що хвильовий вектор має вигляд $\vec{k}=(k_1, 0, k_3)$ або, якщо ввести поняття кута падіння хвилі на границю розділу θ як кута між напрямком хвилі і вертикальною координатою z, $\vec{k}=(k\sin\theta, 0, k\cos\theta)$. Тоді залежністю від координати y можна знехтувати і вважати задачу плоскою. В площині всі параметри, що належать до верхньої півплощини $\infty \leqslant z \leqslant 0$, позначаются індексом 1 і ті параметри, що належать до нижньої півплощини $-\infty \leqslant z \leqslant 0$, позначаються індексом 2. Припускається, що кожна півплощина має свої фізичні властивості лінійно пружного ізотропного матеріалу (в даному випадку — модуль зсуву μ_α і густину $\rho_\alpha (\alpha = 1; 2)$) і хвиля поширюється знизу вверх — з нижньої півплощини до верхньої і зліва направо. У цьому разі падаюча на лінію розділу хвиля може бути представлена у вигляді (тут і далі у зміщенні в напрямку Oy пропущено індекс 2)

$$u_{2(inc)}(x, z, \theta_2, t) = A_2 e^{i[(k_2 \sin\theta_2)x + (k_2 \cos\theta_2)z - \omega t]}, \tag{1}$$

де всі параметри вважаються відомими, включаючи кут падіння хвилі θ_2.

При переході через лінію розділу хвиля (1) розділяється на дві — одна відбивається симетрично від лінії розділу (тобто під відомим кутом $(-\theta_2)$) і поширюється з невідомою амплітудою, інша продовжує поширення у верхній півплощині 1 під невідомим кутом (заломлюється) і з невідомою амплітудою.

Звичайно ці хвилі записуються таким чином:

відбита хвиля

$$u_{2(inc)}(x, z, \theta_2, t) = VA_2 e^{i\,[(k_2 \sin\theta_2)x - (k_2 \cos\theta_2)z - \omega t]}, \tag{2}$$

заломлена хвиля

$$u_{1(inc)}(x, z, \theta_1, t) = WA_2 e^{i\,[(k_1 \sin\theta_1)x + (k_1 \cos\theta_1)z - \omega t]}. \tag{3}$$

Тут введені стандартні і поки що невідомі постійні коефіцієнти перед амплітудами, що характеризують границю — коефіцієнт відбиття V як відношення амплітуд відбитої VA_2 і падаючої A_2 хвиль і коефіцієнт прозорості (пропускання) W як відношення амплітуд заломленої WA_2 і падаючої A_2 хвиль.

Для знаходження невідомих величин θ_1, V, W використовуються граничні умови повного механічного контакту на лінії розділу — рівність зміщень і зсувних напружень (в умовах поля зміщень (1) відмінним від нуля є лише зсувне напруження $\sigma_{yz} = \mu(\partial u/\partial z)$):

$$u_{2(inc)}(x, 0, t) + u_{2(ref)}(x, 0, t) = u_{1(tra)}(x, 0, t), \tag{4}$$

$$\sigma_{yz(2inc)}(x, 0, t) + \sigma_{yz(2ref)}(x, 0, t) = \sigma_{yz(1tra)}(x, 0, t), \tag{5}$$

або умова (4)

$$A_2 e^{i\,[(k_2 \sin\theta_2)x + (k_2 \cos\theta_2)(z=0) - \omega t]} + VA_2 e^{i\,[(k_2 \sin\theta_2)x - (k_2 \cos\theta_2)(z=0) - \omega t]} =$$
$$= WA_2 e^{i\,[(k_1 \sin\theta_1)x + (k_1 \cos\theta_1)(z=0) - \omega t]},$$

$$(1+V)e^{i\,(k_2 \sin\theta_2)x} = We^{i\,(k_1 \sin\theta_1)x}, \tag{6}$$

умова (5)

$$\sigma_{yz} = \mu\,\partial u/\partial z = \mu\left(\partial/\partial z\right) Ae^{i\,[(k \sin\theta)x + (k \cos\theta)z - \omega t]} = i\mu k \cos\theta \cdot u,$$

$$(\mu_2 k_2 \cos\theta_2)\,(1-V)e^{i(k_2 \sin\theta_2)x} = (\mu_1 k_1 \cos\theta_1)We^{i\,(k_1 \sin\theta_1)x}. \tag{7}$$

Умова (6) виконується, коли виконується закон заломлення Снелля

$$k_2 \sin\theta_2 = k_1 \sin\theta_1 \tag{8}$$

і рівність $1+V=W$. Вважається, що формули

$$V = \frac{\mu_2 k_2 \cos\theta_2 - \mu_1 k_1 \cos\theta_1}{\mu_2 k_2 \cos\theta_2 + \mu_1 k_1 \cos\theta_1}, \quad W = \frac{2\mu_2 k_2 \cos\theta_2}{\mu_2 k_2 \cos\theta_2 + \mu_1 k_1 \cos\theta_1} \tag{9}$$

завершують аналіз задачі про поширення гармонічної SH-хвилі в двокомпонентній пружній системі "верхня півплощина — нижня півплощина".

Проведений аналіз трикомпонентної пружної системи “верхній півпростір — шар — нижній півпростір”, трикомпонентної системи “атмосфера — пружний ґрунтовий шар — пружний скельний масив”, $(N+2)$-компонентної пружної системи “верхній півпростір — N шарів — нижній півпростір” складають основу для розв’язування задачі про $(N+2)$-компонентну систему “атмосфера — N пружних ґрунтових шарів — пружний скельний масив”.

Слід зазначити, що моделювання ґрунтової товщі над скельним масивом одним шаром є суттєвим спрощенням реальної ситуації, коли шарів багато і вони різняться за товщиною і літологічним складом та, відповідно, за фізичними властивостями. Тому переважно ґрунтову товщу моделюють певним (для різних місцевостей різним) скінченним числом шарів з відмінними між собою товщинами (потужностями) густиною та реологічними властивостями.

Також треба нагадати, що в задачі про сейсмічні хвилі враховується відмінність від класичної задачі як у частині термінології, так і самої постановки задачі саме через розгляд сейсмічної хвилі. Зокрема, верхньою компонентою системи є атмосфера, що характерно для сейсмічних хвиль у товщі ґрунтових порід, які виявляються на поверхні Землі під час сейсмічної активності (землетруси і т. п.). Вважається, що атмосфера відбиває хвилю назад у ґрунтовий шар (частина енергії хвилі переходить у коливання покрівлі шару). Також верхню частину грунтового шару називають покрівлею, а нижню — підошвою, нижній півпростір називають підстеляючим скельним масивом.

Постановка задачі про $(N+2)$-компонентну систему є такою: хвиля поширюється з підстеляючого скельного масиву під заданим кутом до площини розділу між масивом і першим шаром. Позначимо всі параметри масиву індексом $(N+2)$, параметри шарів — індексами від $(N+1)$ до 2, атмосфери — індексом 1. Необхідно знайти параметри хвилі, яка прийде на поверхню Землі.

Тут виникає нова ситуація, коли у верхньому шарі кожна відбита від покрівлі в підошву хвиля формує нову хвилю в нижньому шарі, яка відбивається нескінченну кількість разів від підошви цього шару до його покрівлі і назад, але при цьому при кожному приході до границі з масивом формується нова пропущена хвиля в масиві і при кожному приході до границі з верхнім шаром формується нова пропущена у верхній шар хвиля. Цей процес є нескінченним і на кожному кроці якась частина енергії з верхнього шару передається назад у скельний масив.

Вказана вище процедура прямого підходу механіки дає такий результат: при взаємодії з N границями $z=h_{N-1},\ldots,z=h_2$ без врахування багатократного відбиття хвиль в ґрунтових шарах падаюча зі скельного масиву хвиля

$$u_{(N+2)(inc)}(x,z,\theta_{N+2},t)=A_{N+2}e^{i[(k_{N+2}\sin\theta_{N+2})x+(k_{N+2}\cos\theta_{N+2})z-\omega t]}$$

трансформується на поверхні Землі у коливання

$$u(x,z,t)=2W_2\cdots W_{N+1}A_{N+2}\cos[(k_2\sin\theta_2)x-\omega t]\cos(k_2h\cos\theta_2). \qquad (10)$$

Формула для знаходження поля зміщень в скельному масиві така:

$$u_{N+2}(x,z,\theta_{N+2},t)=A_{N+2}e^{i[(k_{N+2}\sin\theta_{N+2})x-\omega t]}(e^{i(k_{N+2}\cos\theta_{N+2})z}+V_{N+1}e^{-i(k_{N+2}\cos\theta_{N+2})z}). \qquad (11)$$

 ISSN 1025-6415. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. 2018. № 8

Зазначимо, що останні дві формули описують основні характеристики, які потрібно знати в результаті розв'язування задачі про сейсмічну гармонічну SH-хвилю в $(N+2)$-компонентній системі "атмосфера — N пружних ґрунтових шарів — пружний скельний масив".

Треба зазначити, що припущення про пружне деформування шарів є спрощенням реальної ситуації, шари при деформуванні поводять себе як реологічні тіла. Тому далі розглянемо узагальнення отриманих формул на випадок, коли деформування скельного ґрунту і ґрунтових шарів відбувається за реологічними законами.

2. До теорії в'язкопружних сейсмічних гармонічних SH-хвиль. Далі аналіз обмежено стандартною реологічною моделлю. Але слід нагадати, що задача поширення SH-хвилі в рамках лінійної теорії в'язкопружності є класичною. Оскільки будь-яка одновимірна гармонічна хвиля зміщення має вигляд $u(x,t)=u^o e^{i(kx-\omega t)}$, тобто з часом відбуваються коливання з частотою ω, то загальноприйнятий метод отримання рівняння поширення такої хвилі в теорії в'язкопружності використовує так звані комплексні модулі. Вони вводяться на основі представлення рівняння руху, яке в теорії в'язкопружності отримують з використанням інтегрального в'язкопружного оператора заміною в рівнянні теорії пружності пружного модуля на цей оператор.

Але для простих моделей, до яких належить стандартна модель, можна застосувати прямий підхід. На першому кроці цього підходу використовується факт, що будь-який одновимірний рух для будь-якої залежності напруження від деформації (конкретно, як для пружного закону деформування, так і для в'язкопружного закону) описується рівнянням $\rho(\partial^2 u/\partial t^2)=(\partial\sigma/\partial x)$. Далі прямий підхід полягає у підстановці конститутивного закону для стандартної моделі в це рівняння. Такий підхід уможливлює пряме обчислення параметрів плоскої гармонічної SH-хвилі зміщення, саме яка є предметом аналізу.

Представлення хвилі у цьому випадку використовує поняття постійної амплітуди A, дійсного хвильового числа k та коефіцієнта релаксації $\gamma>0$:

$$u(x,t)=Ae^{-\gamma x-i(kx-\omega t)}. \qquad (12)$$

У стандартній моделі рівняння зв'язку між напруженням і деформацією (конститутивне рівняння) має вигляд звичайного диференціального рівняння 1-го порядку з постійними коефіцієнтами:

$$\frac{\eta_K}{\mu_K+\mu_S}\dot{\sigma}(t)+\sigma(t)=\frac{\mu_S\eta_K}{\mu_K+\mu_S}\dot{\varepsilon}(t)+\frac{\mu_S\mu_K}{\mu_K+\mu_S}\varepsilon(t),$$

яке звичайно записують у вигляді

$$n\dot{\sigma}(t)+\sigma(t)=En\dot{\varepsilon}(t)+H\varepsilon(t), \qquad (13)$$

де $E=\mu_S$ — миттєвий модуль пружності, $H=\mu_S\mu_K/(\mu_K+\mu_S)<E$ — тривалий модуль пружності, $n=\eta_K/(\mu_K+\mu_S)$ — час релаксації.

Якщо в (13) ввести модуль зсуву μ $(\mu_0=E, \mu_\infty=H)$, то отримаємо рівняння

$$n\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sigma=\mu_0 n\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+\mu_\infty\frac{\partial u}{\partial x} \text{ або } \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+n\rho\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=\mu_0 n\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\mu_\infty\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (14)$$

Зауважимо, що це не найпростіше хвильове рівняння, яким описується пружна SH-хвиля — воно містить додатково два члени третього порядку.

При вивченні гармонічних хвиль, які описує реологічне рівняння (14), можливі два випадки. У першому випадку вважається, що хвиля затухає за просторовою координатою і має вигляд (12) $u(x,t) = Ae^{-\gamma x - i(kx - \omega t)}$. Другий випадок розглядає затухання за часом і тоді хвиля має інший вигляд:

$$u(x,t) = Ae^{i[kx - (\omega + i\alpha)t]}. \tag{15}$$

Почнемо з випадку 1 і перевіримо, чи має рівняння (14) розв'язок у вигляді хвилі (12). Для цього підставляємо (12) в (14) і отримуємо рівняння зв'язку між хвильовим числом і коефіцієнтом затухання:

$$\begin{gathered}[(v_T^o)^{-2}\omega^2 + (\mu_\infty/\mu_0)(\gamma^2 - k^2) - 2n\omega\gamma k] + \\ + i[n(v_T^o)^{-2}\omega^3 + n\omega(\gamma^2 - k^2) + 2(\mu_\infty/\mu_0)\gamma k] = 0, \quad v_T^o = \sqrt{\mu_0/\rho}.\end{gathered} \tag{16}$$

З рівності уявної частини цього рівняння нулеві отримуємо значення γ через k з врахуванням позначення $(\mu_0/\mu_\infty) = (v_T^{o2})/(v_T^{\infty 2}) = m$:

$$\gamma = -\frac{1}{nv_T m}\left[1 \mp \sqrt{1 + (n\omega)^2 m^2\left(1 - \frac{v_T^2}{v_T^{o2}}\right)}\right]. \tag{17}$$

Отже, в стандартній моделі затухання визначається не лише коефіцієнтом затухання і початковою фазовою швидкістю, але додатково відношенням миттєвого модуля до тривалого модуля і миттєвої швидкості хвилі до актуальної швидкості.

Підстановка (12) в дійсну частину рівняння (14) дає формулу для визначення фазової швидкості:

$$\begin{gathered}(v_T)^2 = \frac{2(v_T^o)^2}{(nm\omega)^2}\left\{1 + (m^2 - 1)\Big/\left\{(nm\omega)^2\left[1 + \frac{1}{(nm\omega)^2}\right]\right\}\right\} \times \\ \times\left\{1 \pm \sqrt{1 + \frac{(m^2-1)^2}{(nm\omega)^2\{[1 + (1/(nm\omega)^2)] + (m^2 - 1)\}^2}}\right\}.\end{gathered} \tag{18}$$

Можливо, найбільш важливим висновком з отриманих формул щодо швидкості хвилі і її затухання для подальшого аналізу сейсмічних хвиль є те, що ці характеристики хвилі в окремо взятому шарі ґрунту є різними для різних частот, що не узгоджується з загальноприйнятим припущенням про їх постійне значення в окремо взятому шарі ґрунту.

Розглянемо випадок 2, коли гармонічна хвиля затухає з часом і має вигляд (15). Підстановка представлення (15) у рівняння (14) дає рівняння зв'язку між хвильовим числом і коефіцієнтом затухання:

$$(v_T^{\infty 2} - v_T^{o2} n\alpha)k^2 - \omega^2 + \alpha^2 + (3\omega^2 + \alpha^2)n\alpha - i\omega[2\alpha + n(\omega^2 + 3\alpha^2) - v_T^{o2} nk^2] = 0\,.$$

З цього рівняння отримується кубічне рівняння для коефіцієнта затухання α:

$$\alpha^3 - \left(\frac{3v_T^{\infty 2} - v_T^{o2}}{2nv_T^{o2}}\right)\alpha^2 - \left(\frac{v_T^{\infty 2} + \omega^2 n^2 v_T^{o2}}{n^2 v_T^{o2}}\right)\alpha + \omega^2 \frac{v_T^{o2} - v_T^{\infty 2}}{2nv_T^{o2}} = 0\,, \tag{19}$$

яке розв'язується стандартним способом і в якому всі коефіцієнти — дійсні величини і виражаються через відомі параметри реологічної моделі і частоту хвилі.

При відомому коефіцієнті затухання швидкість хвилі визначається за формулою

$$v_T = v_T^o \sqrt{n\omega^2 / (n\omega^2 + 2\alpha + 3n\alpha^2)}\,.$$

Перевагою в застосуванні стандартної реологічної моделі до аналізу сейсмічних хвиль можна вважати можливість аналітично порахувати характеристики хвилі. Для кожного шару треба знати три константи стандартної моделі (миттєвий модуль, тривалий модуль, час релаксації) і параметри хвилі на вході в шар (амплітуду, кут падіння, частоту, коефіцієнт затухання). Константи стандартної моделі визначаються зі стандартних (регламентованих) дослідів на повзучість зразків при зсуві.

Розглянемо сейсмічну гармонічну SH-хвилю в трикомпонентній системі "атмосфера — в'язкопружний ґрунтовий шар — пружний скельний масив", яка є базовою для досліджуваної далі більш складної задачі. Виберемо варіант затухання за просторовою координатою і припустимо, що хвиля, яка падає під відомим кутом у напрямку знизу вверх і зліва направо з пружного скельного масиву на підошву в'язкопружного ґрунтового шару $z = 0$ має вигляд

$$u_{2(inc)}(x, z, \theta_2, t) = A_2 e^{i[(k_2 \sin\theta_2)x + (k_2\cos\theta_2)z - \omega t]}, \tag{20}$$

де всі параметри вважаються відомими. При переході через підошву ця хвиля розділяється на відбиту пружну хвилю $u_{2(ref)}(x, z, \theta_2, t) = V_1 A_2 e^{i[(k_2\sin\theta_2)x - (k_2\cos\theta_2)z - \omega t]}$ і заломлену в'язкопружну хвилю $u_{1(tra)}(x, z, \theta_2, t) = W_1 A_2 e^{i[(k_1 \sin\theta_1)x + ((k_1 + i\gamma)\cos\theta_1)z - \omega t]}$.

Далі слід розглядати дві хвилі, які генеруються в шарі і які вже є в'язкопружними: заломлена хвиля (20) і відбита від атмосфери хвиля

$$u_{1(ref)}(x, z, \theta_1, t) = V_0 W_1 A_2 e^{i[(k_1\sin\theta_1)x - ((k_1 + i\gamma)\cos\theta_1)z - \omega t]}.$$

Ці хвилі створюють поле зміщень, яке на границі з атмосферою є таким:

$$u_1(x, h, \theta_1, t) = W_1 A_2 e^{i[(k_1\sin\theta_1)x - \omega t]}(e^{-\gamma_1 h\cos\theta_1} e^{ihk_1\cos\theta_1} + V_0 e^{\gamma_1 h\cos\theta_1} e^{-ihk_1\cos\theta_1}). \tag{21}$$

Для знаходження невідомих величин θ_1, V_1, W_1, V_0 використовуються граничні умови повного механічного контакту на лініях розділу — рівність зміщень і зсувних напружень при $z = 0$ і рівність нулеві зсувних напружень при $z = h$.

У результаті отримуємо вираз для коефіцієнтів V_0, V_1, W_1:

$$V_0 = e^{2ih(k_1 + i\gamma_1)\cos\theta_1} \text{ або } V_0 = e^{-2\gamma_1\cos\theta_1 h}\cos(2k_1 h\cos\theta_1)\,. \tag{22}$$

$$W_1 = \frac{2(\mu_2 k_2 \cos\theta_2)}{\begin{bmatrix}(\mu_2 k_2 \cos\theta_2)(1+e^{2k_1\cos\theta_1 h}\cos(2\gamma_1\cos\theta_1 h))+\\+(e^{i\varphi_1}M_{z1}\mu_1^\infty\cos\theta_1)(1-e^{2k_1\cos\theta_1 h}\cos(2\gamma_1\cos\theta_1 h))\end{bmatrix}}, \quad (23)$$

$$V_1 = \frac{\begin{bmatrix}(\mu_2 k_2 \cos\theta_2)(1+e^{2k_1\cos\theta_1 h}\cos(2\gamma_1\cos\theta_1 h))-\\-(e^{i\varphi_1}M_{z1}\mu_1^\infty\cos\theta_1)(1-e^{2k_1\cos\theta_1 h}\cos(2\gamma_1\cos\theta_1 h))\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}(\mu_2 k_2 \cos\theta_2)(1+e^{2k_1\cos\theta_1 h}\cos(2\gamma_1\cos\theta_1 h))+\\+(e^{i\varphi_1}M_{z1}\mu_1^\infty\cos\theta_1)(1-e^{2k_1\cos\theta_1 h}\cos(2\gamma_1\cos\theta_1 h))\end{bmatrix}}. \quad (24)$$

Зауважимо, що кут заломлення в шарі змінюється зі зміною частоти, тому що хвильове число у в'язкопружному шарі залежить від частоти хвилі.

Таким чином, формули (21)—(24) дають розв'язок задачі про поширення гармонічної SH-хвилі в трикомпонентній пружній системі "атмосфера — в'язкопружний ґрунтовий шар — пружний скельний масив" за умови, що деформування в'язкопружного шару описується стандартною моделлю і затухання хвилі враховується за варіантом 1.

Отже, в'язкопружність деформування ґрунтового шару виявляється в зміні амплітуди коливань, яка вже залежить від способу затухання хвилі, зсуву за фазою, параметрів стандартної реологічної моделі (миттєвого і тривалого модулів пружності та часу релаксації), кутів падіння хвилі і товщини шару.

З отриманих формул випливає, що відповідні формули для випадку максимального врахування відбиття хвиль у задачі, де шар є в'язкопружним, можуть бути записані з міркувань аналогії:

пружний масив з пружним шаром зверху

$$u_2(x,z,\theta_2,t) = [e^{i(k_2\cos\theta_2)z} + (V_1 + ((W_1)^2/(1-V_1)))e^{-i(k_1\cos\theta_1)z}]A_2 e^{i[(k_2\sin\theta_2)x-\omega t]},$$

поверхня в'язкопружного шару

$$u_1(x,h,\theta_1,t) = \frac{W_1}{1-V_0V_1}A_2 e^{i[(k_1\sin\theta_1)x-\omega t]}(e^{-\gamma_1 h\cos\theta_1}e^{ihk_1\cos\theta_1} + V_0 e^{\gamma_1 h\cos\theta_1}e^{-ihk_1\cos\theta_1}).$$

Слід звернути увагу на те, що в системі "атмосфера — пружний ґрунтовий шар — пружний скельний масив" немає механізму повернення хвиль як з атмосфери, так і з масиву. Тому багатократне відбиття хвиль у в'язкопружному ґрунтовому шарі може бути враховане повністю.

Далі розглянемо сейсмічну гармонічну SH-хвилю в $(N+2)$-компонентній системі "атмосфера — N в'язкопружних ґрунтових шарів — пружний скельний масив". Повторення методики, апробованої на попередній задачі, дає такі результати:

$$V_N = e^{i[((k_{(N+1)}\cos\theta_{(N+1)} - k_N\cos\theta_N)) - (\gamma_{(N+1)}\cos\theta_{(N+1)} - \gamma_N\cos\theta_N)]h_{N+1} + i(\varphi_{N+1}-\varphi_N)} \times$$
$$\times \frac{[(e^{i\varphi_N}M_{zN}\mu_N^\infty\cos\theta_N) - (e^{i\varphi_{N+1}}M_{z(N+1)}\mu_{N+1}^\infty\cos\theta_{N+1})e^{2[((ik_N-\gamma_N)\cos\theta_{(N)})h_{N+1}+i\varphi_N]}]}{[(e^{i\varphi_N}M_{zN}\mu_N^\infty\cos\theta_N) + (e^{i\varphi_{N+1}}M_{z(N+1)}\mu_{N+1}^\infty\cos\theta_{N+1})e^{2[((ik_N-\gamma_N)\cos\theta_{(N)})h_{N+1}+i\varphi_N]}]}, \quad (25)$$

$$W_N = e^{i[((k_{(N+1)}\cos\theta_{(N+1)} - k_N\cos\theta_N)) - (\gamma_{(N+1)}\cos\theta_{(N+1)} - \gamma_N\cos\theta_N)]h_{N+1} + i(\varphi_{N+1} - \varphi_N)} \times$$

$$\times \frac{2(e^{i\varphi_{N+1}} M_{z_{(N+1)}} \mu_{N+1}^{\infty} \cos\theta_{N+1})}{[(e^{i\varphi_N} M_{zN} \mu_N^{\infty} \cos\theta_N) + (e^{i\varphi_{N+1}} M_{z_{(N+1)}} \mu_{N+1}^{\infty} \cos\theta_{N+1}) e^{2[((ik_N - \gamma_N)\cos\theta_{(N)}) h_{N+1} + i\varphi_N]}]}, \qquad (26)$$

$$V_3 = e^{i[((k_4\cos\theta_4 - k_3\cos\theta_3)) - (\gamma_4\cos\theta_4 - \gamma_3\cos\theta_3)]h_4 + i(\varphi_4 - \varphi_3)} \times$$

$$\times \frac{[(e^{i\varphi_3} M_{z3} \mu_3^{\infty} \cos\theta_3) - (e^{i\varphi_4} M_{z4} \mu_4^{\infty} \cos\theta_4) e^{2[((ik_3 - \gamma_3)\cos\theta_3) h_4 + i\varphi_3]}]}{[(e^{i\varphi_3} M_{z3} \mu_3^{\infty} \cos\theta_3) + (e^{i\varphi_4} M_{z4} \mu_4^{\infty} \cos\theta_4) e^{2[((ik_3 - \gamma_3)\cos\theta_3) h_4 + i\varphi_3]}]}, \qquad (27)$$

$$W_3 = e^{i[((k_4\cos\theta_4 - k_3\cos\theta_3)) - (\gamma_4\cos\theta_4 - \gamma_3\cos\theta_3)]h_4 + i(\varphi_4 - \varphi_3)} \times$$

$$\times \frac{2(e^{i\varphi_4} M_{z4} \mu_4^{\infty} \cos\theta_4)}{[(e^{i\varphi_3} M_{z3} \mu_3^{\infty} \cos\theta_3) + (e^{i\varphi_4} M_{z4} \mu_4^{\infty} \cos\theta_4) e^{2[((ik_3 - \gamma_3)\cos\theta_3) h_4 + i\varphi_3]}]}. \qquad (28)$$

Верхній шар, який межує з атмосферою, потребує аналізу чотирьох в'язкопружних хвиль, що характерно для всіх розглянутих задач про сейсмічні SH-хвилі, коли верхньою компонентою системи є атмосфера. Остаточні формули для верхнього шару з товщиною h_2 такі:

$$W_2 = \frac{2(e^{i\varphi_3} M_{z3} \mu_3^{\infty} \cos\theta_3) e^{i[((k_3\cos\theta_3 - k_2\cos\theta_2)) - (\gamma_3\cos\theta_3 - \gamma_2\cos\theta_2)]h_3 + i(\varphi_3 - \varphi_2)}}{[(e^{i\varphi_2} M_{z2} \mu_2^{\infty} \cos\theta_2) + (e^{i\varphi_3} M_{z3} \mu_3^{\infty} \cos\theta_3) e^{2[((ik_2 - \gamma_2)\cos\theta_2) h_3 + i\varphi_2]}]}, \qquad (29)$$

$$V_2 = e^{i[((k_3\cos\theta_3 - k_2\cos\theta_2)) - (\gamma_3\cos\theta_3 - \gamma_2\cos\theta_2)]h_3 + i(\varphi_3 - \varphi_2)} \times$$

$$\times \frac{[(e^{i\varphi_2} M_{z2} \mu_2^{\infty} \cos\theta_2) - (e^{i\varphi_3} M_{z3} \mu_3^{\infty} \cos\theta_3) e^{2[((ik_2 - \gamma_2)\cos\theta_2) h_3 + i\varphi_2]}]}{[(e^{i\varphi_2} M_{z2} \mu_2^{\infty} \cos\theta_2) + (e^{i\varphi_3} M_{z3} \mu_3^{\infty} \cos\theta_3) e^{2[((ik_2 - \gamma_2)\cos\theta_2) h_3 + i\varphi_2]}]}. \qquad (30)$$

Основна формула — формула для коливань на поверхні Землі — є такою:

$$u_2(x, h_2, t) = 2W_2 \cdots W_{N+1} A_{N+2} e^{-\gamma_2 h_2 \cos\theta_2} \cos(h_2 k_2 \cos\theta_2) \cos[(k_2 \sin\theta_2)x - \omega t]. \qquad (31)$$

Таким чином, отримані формули дають розв'язок задачі про гармонічні SH-хвилі в $(N+2)$-компонентній системі "атмосфера — N в'язкопружних ґрунтових шарів — пружний скельний масив" за умови, що деформування шарів описується стандартною реологічною моделлю з відмінними між собою реологічними постійними і багатократне відбиття хвиль не враховується. При цьому розглядаються два варіанти затухання хвилі в шарі. Формули для кожного варіанту можна поділити на три групи. Перша містить формули для обчислення швидкості хвилі і коефіцієнта її затухання. Тут у варіанті 1 формули дещо простіші. Друга група стосується коефіцієнтів відбиття і прозорості. Тут уже варіант 2 описується дещо простішими формулами. Третя група включає формули для хвиль в скельному масиві і коливання на поверхні Землі. Ці формули фактично ідентичні для обох варіантів.

Насамкінець зазначимо, що постановка задачі як задачі механіки передбачає, що півпростори і шари деформуються за певними законами і геометрична картина така, що всі границі між шарами є площинами. Також приймається, що на границях виконуються умови повного механічного контакту (рівність зміщень і напружень). Хвиля у цьому повідомленні називається сейсмічною через дві обставини – хвиля поширюється у нижньому півпросторі під заданим кутом до площини розділу цього півпростору з першим знизу ґрунтовим шаром (що відповідає реальній ситуації щодо сейсмічної хвилі в скельному масиві) і верхній півпростір вважається середовищем, у якому хвиля не поширюється (що відповідає реальній ситуації, коли хвиля приходить з останнього ґрунтового (верхнього) шару на поверхню Землі і верхній півпростір є атмосферою).

Загальний висновок з проведеного дослідження є таким, що застосована процедура розв'язування не формалізована і на всіх кроках виявляє фізичний зміст і математичну прозорість. Отримані алгебраїчні формули для коливань на поверхні Землі і сукупної хвилі в скельному масиві є простими і придатними для комп'ютерного моделювання. Показана придатність стандартної реологічної моделі деформування шарів до простого математичного опису затухання амплітуди хвильового руху, яке реально існує при поширенні хвилі в ґрунтових шарах.

Перспективність викладеного підходу може виявитися при його застосуванні у випадках використання інших реологічних моделей, які описуються диференціальними співвідношеннями, оскільки і в цих випадках будуть отримуватися явні алгебраїчні формули для необхідних параметрів сейсмічних хвиль.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Кендзера О.В., Косарев Г.Л., Саваренский Е.Ф. Определение величины истинной скорости колебаний почвы из сейсмограммы. *Геофиз. журн.* 1979. **1**, № 1. С. 56—62.
2. Кендзера О.В., Рущицький Я.Я. Реологічні моделі ґрунтової товщі для сейсмічного мікрорайонування будівельних майданчиків. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2016. № 9. С. 79—87. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.09.079
3. Кендзера О.В., Рущицький Я.Я. Про нелінійні моделі деформування ґрунтової товщі і поширення сейсмічних коливань. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2017. № 11. С. 44—51. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi-2017.11.044
4. Саваренский Е.Ф. Сейсмические волны. Москва: Недра, 1972. 296 с.
5. Rushchitsky J.J. Theory of waves in materials. Copenhagen: Ventus Publ., ApS. 2012. 270 p.
6. Shearer P.M. Introduction to seismology. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 396 p.
7. Slawinski M.A. Seismic waves and rays in elastic media. London: Elsevier, 2003. 424 p.
8. Stepanishen P.R., Strozeski B. Reflection and transmission of acoustic wideband plane waves by layered viscoelastic media. *J. Acoust. Soc. Amer.* 1972. **71**, № 1. P. 9—21.

Надійшло до редакції 10.05.2018

REFERENCES

1. Kendzera, A. V., Kosarev, L. G. & Savarensky, E. F. (1979). Determination of true speed soil oscillations from the seismogram. Geofiz. zhurn., 1, No. 1, pp. 56-62 (in Russian).
2. Kendzera, O. V. & Rushchitsky, J. J. (2016). Rheological models of soil strata for the seismic microzoning of building sites. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 9, pp. 79-87 (in Ukrainian). doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.09.079

3. Kendzera, O. V. & Rushchitsky, J. J. (2017). On nonlinear models of deformation of strata and propagation of seismic vibrations. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 11, pp. 84-91. doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.11.044
4. Savarensky, E. F. (1972). Seismic waves. Moscow: Nedra (in Russian).
5. Rushchitsky, J. J. (2012). Theory of waves in materials. Copenhagen: Ventus Publ., ApS.
6. Shearer, P. M. (2009). Introduction to seismology. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
7. Slawinski, M. A. (2003). Seismic waves and rays in elastic media. London: Elsevier.
8. Stepanishen, P. R. & Strozeski, B. (1972). Reflection and transmission of acoustic wideband plane waves by layered viscoelastic media. J. Acoust. Soc. Amer., 71, No. 1, pp. 9-21.

Received 10.05.2018

А.В. Кендзера[1], *Я.Я. Рущицкий*[2]

[1] Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины, Киев
[2] Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: kendzera@igph.kiev.ua, rushch@inmech.kiev.ua

К ТЕОРИИ УПРУГИХ И ВЯЗКОУПРУГИХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В СЛОИСТОЙ ЗЕМНОЙ ТОЛЩЕ

Применен прямой метод механики в исследовании прохождения и отражения сдвиговой волны при ее распространении через конечное количество ґрунтовых шаров с отличающимися толщинами и реологическими свойствами. Механические свойства ґрунтовых шаров описаны гуковой и стандартной реологической моделями. Получены явные формулы для вычисления волнового числа и коэффициента затухания гармонической SH-волны. Затухание волны изучено в двух вариантах: затухания по пространственной координате и затухания со временем. Полученные результаты можно считать некоторым продолжением классических работ проф. Саваренского (Россия) в области упругих сейсмических волн и проф. Степанишина (США) в области вязкоупругих сейсмических волн.

Ключевые слова: *многослойная грунтовая толща, упругая и вязкоупругая модели, сдвиговая плоская волна, затухание волны, колебания на поверхности грунта.*

O.V. Kendzera[1], *J.J. Rushchitsky*[2]

[1] S.I. Subbotin Institute of Geophysics of the NAS of Ukraine, Kiev
[2] S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: kendzera@igph.kiev.ua, rushch@inmech.kiev.ua

TO THE THEORY OF ELASTIC AND VISCOELASTIC SEISMIC WAVES PROPAGATING IN THE LAYERED EARTH STRATUM

The direct method of mechanics is utilized in studying the passing and reflecting of an SH-wave while it propagates through the finite number of ground layers with differing thicknesses and rheological properties. The mechanical properties of the ground layers are described by the Hookean and standard rheological models. The explicit formulas for the evaluation of the wave number and the attenuation of a harmonic SH-wave are obtained. The wave attenuation is studied by two variants — by the spatial coordinate and in time. The obtained formulas can be treated as some continuation of classical works of Prof. Savarensky (Russia) in the area of elastic seismic waves and Prof. Stepanishen (USA) in the area of viscoelastic seismic waves.

Keywords: *multilayered strata, elastic and viscoelastic models, shear plane wave, attenuation of wave, oscillations on ground surface.*