

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.08.003>

УДК 517.956

В.В. Городецький, Г.П. Вережак

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

E-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, g.verezhak@gmail.com

Нелокальна за часом задача для еволюційних сингулярних рівнянь нескінченного порядку

Представлено академіком НАН України М.О. Перестюком

Встановлюється коректна розв'язність нелокальної багаточислової за часом задачі для еволюційних рівнянь з оператором Бесселя нескінченного порядку в узагальнених просторах типу S та просторах типу S' — просторах узагальнених функцій нескінченного порядку типу ультрарозподілів.

Ключові слова: нелокальна багаточислова за часом задача, оператор Бесселя нескінченного порядку, узагальнені простори типу S , узагальнені функції.

І.М. Гельфанд і Г.Є. Шилов [1, с. 203–211] запропонували метод побудови функціональних просторів нескінченно диференційовних функцій на \mathbb{R} , на які накладаються певні умови спадання на нескінченності. Ці умови задаються за допомогою нерівностей $|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{kn}$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\{c_{kn}\}$ — подвійна послідовність додатних чисел. Якщо ці числа змінюються довільним чином разом з функцією φ , то маємо простір Л. Шварца $S = S(\mathbb{R})$ швидко спадаючих на \mathbb{R} функцій. У монографії [1, с. 203–280] детально вивчений випадок, коли $c_{kn} = k^{k\alpha} n^{n\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — фіксовані параметри; відповідні простори називаються просторами типу S і позначаються символом S_α^β . Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними при $|x| \rightarrow +\infty$ спадають швидше, ніж $\exp\{-a|x|\}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Такі простори часто використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними. У працях [2, 3] встановлено, що простори типу S та S' — простори, топологічно спряжені з ними, збігаються з множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними скінченного та нескінченного порядків, при яких розв'язки є цілими функціями просторових змінних. Наприклад, для рівняння теплопровідності $\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2$ фундаментальний розв'язок задачі Коші — функція $G(t, x) = (2\sqrt{\pi t})^{-1} \exp\{-x^2 / (4t)\}$ при кожному $t > 0$, як функція x , є елементом простору $S_{1/2}^{1/2}$ [4, с. 46], який належить до просторів типу S .

Якщо $c_{kn} = a_k b_n$, де $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — деякі послідовності додатних чисел, то маємо узагальнені простори типу S , які позначаються символом $S_{a_k}^{b_n}$. Простори $S_{a_k}^{b_n}$ (їх топо-

логічна структура, властивості функцій, основні операції в таких просторах) вивчалися в праці [5]. Відомі простори типу W , введені Б.Л. Гуревичем [6] (див. також [7, с. 7–33]), в яких для характеристики поведінки функцій на нескінченності замість степеневих функцій використовуються довільні опуклі функції, також вкладаються в простори $S_{a_k}^{b_n}$ при конкретному виборі послідовностей $\{a_k\}$ та $\{b_n\}$ (див. [8]). Із результатів, наведених в [9, 10], випливає, що узагальнені простори типу S є природним середовищем для дослідження нелокальних багатоточкових за часом задач для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь (зокрема, для рівнянь з операторами диференціювання нескінченного порядку), для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва скінченного та нескінченного порядків.

У цій роботі встановлюється коректна розв’язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння параболічного типу з оператором Бесселя нескінченного порядку в узагальнених просторах типу S та S' , досліджені властивості фундаментального розв’язку такої задачі (оцінки похідних фундаментального розв’язку за просторовою змінною, диференційовність фундаментального розв’язку як абстрактної функції часового параметра із значеннями в узагальнених просторах типу S та ін.)

1. Простори основних та узагальнених функцій. Тут зупинимося на просторах $S_{a_k}^{b_n}$, які будуються за послідовностями вигляду $\{b_n = n! \rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{a_k = k! d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $\{\rho_n\}$, $\rho_0 = 1$, – послідовність додатних чисел, яка має такі властивості:

- а) вона монотонно спадає;
- б) $\exists c_b > 0 \quad \exists \gamma_1 \in (0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N} : \rho_{n-1} / \rho_n \leq c_b \cdot n^{\gamma_1}$;
- в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$;
- г) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_\varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ : \rho_n \geq c_\varepsilon \cdot \varepsilon^n / n^n$.

Послідовності $\{d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $d_0 = 1$, також притаманні властивості a – z , при цьому умова б має вигляд: $\exists c_a > 0 \quad \exists \gamma_2 \in (0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N} : d_{k-1} / d_k \leq c_a \cdot k^{\gamma_2}$. Прикладом послідовності $\{\rho_n\}$ з властивостями a – z може служити послідовність $\rho_n = (n\beta)^{-n\beta} e^{n\beta}$, де $\beta \in (0, 1)$ – фіксований параметр [11].

Вважаємо також, що параметри γ_1, γ_2 в умові б для послідовностей $\{\rho_n\}$ та $\{d_k\}$ пов’язані умовою δ : $\gamma_1 + \gamma_2 = \theta \leq 1$.

Символом $S_{a_k}^{b_n}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову

$$\exists c, A, B > 0 \quad \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \quad \forall x \in \mathbb{R} : |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n a_k b_n.$$

$S_{a_k}^{b_n}$ збігається з об’єднанням зліченно-нормованих просторів $S_{a_k, A}^{b_n, B}$ за всіма індексами $\{A, B\} \subset \mathbb{N}$, де $S_{a_k, A}^{b_n, B}$ – сукупність тих функцій $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$, які для довільних $\delta, \rho > 0$ задовольняють нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{\delta\rho} (A + \delta)^k (B + \rho)^n a_k b_n, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R};$$

система норм у $S_{a_k, A}^{b_n, B}$ визначається за допомогою формул

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x, k, n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^n a_k b_n}, \quad \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

В [5] встановлено, що функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ є елементом простору $S_{a_k}^{b_n}$, де $a_k = k!d_k$, $b_n = n!\rho_n$, тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову

$$\exists a, b, c > 0 \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by),$$

де

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf_k (a_k/|x|^k), & |x| \geq 1, \end{cases} \quad \rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup_n (|y|^n/b_n), & |y| \geq 1. \end{cases}$$

Зауважимо [5], що ρ – неперервно диференційовна, парна на \mathbb{R} функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1, +\infty)$, $\rho(y) \geq 1$, $y \in \mathbb{R}$.

Функція γ є неперервно диференційовною, парною на \mathbb{R} функцією, яка монотонно спадає на $[1, +\infty)$, $0 < \gamma(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

У введених просторах $S_{a_k}^{b_n}$, $a_k = k!d_k$, $b_n = n!\rho_n$, визначені й неперервні оператори, важливі для аналізу; насамперед це оператори множення на x , на всі поліноми, оператори диференціювання, зсуву та розтягу [5].

Символом $\overset{\circ}{S}_{a_k}^{b_n}$ позначимо сукупність усіх парних функцій з простору $S_{a_k}^{b_n}$. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором або узагальненим простором типу S , а його елементи – основними функціями.

Мультіплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}_{a_k}^{b_n}$ є кожна парна функція $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, яка допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_\varepsilon > 0 : |g(z)| \leq c_\varepsilon (\gamma(\varepsilon x))^{-1} \rho(\varepsilon y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Прикладом мультіплікатора в просторі $\overset{\circ}{S}_{a_k}^{b_n}$ може служити нормована функція Бесселя j_ν , $\nu > -1/2$, яка є розв'язком рівняння $B_\nu u + \lambda u = 0$, де B_ν – оператор Бесселя; $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx$, $\nu > -1/2$ – фіксований параметр за умови, що $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ [11].

Із результатів, наведених у [12], випливає, що в просторах $\overset{\circ}{S}_{a_k}^{b_n}$ визначене перетворення Бесселя

$$F_{B_\nu}[\varphi](\sigma) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in \overset{\circ}{S}_{a_k}^{b_n},$$

при виконанні умов $a - \delta$ для послідовностей $\{\rho_n\}$ та $\{d_k\}$, має місце формула $F_{B_\nu} \left[\overset{\circ}{S}_{a_k}^{b_n} \right] = \overset{\circ}{S}_{b_k}^{a_n}$,

при цьому оператор F_{B_ν} є неперервним. Частковим випадком просторів $\overset{\circ}{S}_{a_k}^{b_n}$ є простори $\overset{\circ}{S}_\alpha^\beta$, які складаються з парних функцій з просторів S_α^β , відповідно, правильною є формула

$$F_{B_\nu} \left[\overset{\circ}{S}_\alpha^\beta \right] = \overset{\circ}{S}_\beta^\alpha.$$

Символом T_x^ξ позначимо оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя [13]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \omega}) \sin^{2\nu} \omega d\omega, \quad \varphi \in S_{a_k}^{\overset{\circ}{b}_n},$$

$$b_\nu = \Gamma(\nu+1) / (\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)), \quad \nu > -1/2.$$

Відомо (див. [11]), що операція узагальненого зсуву визначена і диференційовна в просторі $S_{a_k}^{\overset{\circ}{b}_n}$.

Розглянемо псевдодиференціальний оператор $A_\varphi = F_{B_\nu}^{-1}[\varphi F_{B_\nu}]$, де функція-символ φ є мультиплікатором у просторі $S_{b_k}^{\overset{\circ}{a}_n}$. За цієї умови оператор A_φ є лінійним і неперервним у просторі $S_{a_k}^{\overset{\circ}{b}_n}$. У праці [11] з'ясовано, що оператор A_φ можна розуміти як оператор Бесселя “нескінченного порядку” у просторі $S_{a_k}^{\overset{\circ}{b}_n}$ вигляду

$$(A_\varphi \psi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (-1)^k B_\nu^k \psi(x), \quad \varphi(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \sigma^{2k}, \quad \forall \psi \in S_{a_k}^{\overset{\circ}{b}_n}.$$

Символом $\left(S_{a_k}^{\overset{\circ}{b}_n} \right)'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю. Елементи простору $\left(S_{a_k}^{\overset{\circ}{b}_n} \right)'$ називатимемо узагальненими функціями.

Перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in \left(S_{a_k}^{\overset{\circ}{b}_n} \right)'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F_{B_\nu}[f], \psi \rangle = \langle f, F_{B_\nu}[\psi] \rangle, \quad \forall \psi \in S_{b_k}^{\overset{\circ}{a}_n}. \tag{1}$$

Із (1), властивостей лінійності і неперервності функціонала f та властивостей перетворення Бесселя основних функцій випливає лінійність і неперервність функціонала $F_{B_\nu}[f]$ над простором основних функцій $S_{b_k}^{\overset{\circ}{a}_n}$, тобто $F_{B_\nu}[f] \in \left(S_{b_k}^{\overset{\circ}{a}_n} \right)'$. Оскільки в просторі $S_{a_k}^{\overset{\circ}{b}_n}$ визначена операція узагальненого зсуву, то згортку узагальненої функції $f \in \left(S_{a_k}^{\overset{\circ}{b}_n} \right)'$ з основною функцією $\psi \in S_{a_k}^{\overset{\circ}{b}_n}$ задамо формулою

$$(f * \psi)(x) = \langle f_\xi, T_x^\xi \psi(x) \rangle = \langle f_\xi, T_\xi^x \psi(\xi) \rangle.$$

Нехай $f \in \left(S_{a_k}^{\circ b_n} \right)'$. Якщо $f * \psi \in S_{a_k}^{\circ b_n}$, $\forall \psi \in S_{a_k}^{\circ b_n}$ і із співвідношення $\psi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ за топологією простору $S_{a_k}^{\circ b_n}$ випливає, що $f * \psi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ за топологією простору $S_{a_k}^{\circ b_n}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $S_{a_k}^{\circ b_n}$. В [11] встановлено, що якщо узагальнена функція $f \in \left(S_{a_k}^{\circ b_n} \right)'$ – згортувач у просторі $S_{a_k}^{\circ b_n}$, то для довільної функції $\psi \in S_{a_k}^{\circ b_n}$ правильною є формула

$$F_{B_\nu} [f * \psi] = F_{B_\nu} [f] \cdot F_{B_\nu} [\psi].$$

2. Нелокальна багаточкова за часом задача. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_\varphi u, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Pi_T, \quad (2)$$

де A_φ – псевдодиференціальний оператор (оператор Бесселя нескінченного порядку), який діє в просторі $S_{b_k}^{\circ b_n}$ (див. п. 1). При цьому вважаємо, що функція φ – символ оператора A_φ , належить до класу $P_{b_k}^{\circ b_n}$, який складається з функцій, які задовольняють умови: 1) φ – мультиплікатор у просторі $S_{b_k}^{\circ b_n}$, 2) $e^\varphi \in S_{b_k}^{\circ b_n}$ (ці умови є певними аналогами умови “параболічності” для еволюційних рівнянь з частинними похідними). Для (2) задамо нелокальну багаточкову за часом умову

$$\mu u(t, \cdot) \Big|_{t=0} - \mu_1 u(t, \cdot) \Big|_{t=t_1} - \dots - \mu_m u(t, \cdot) \Big|_{t=t_m} = \psi, \quad (3)$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$, $0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, $\psi \in S_{b_k}^{\circ b_n}$. Класичний розв’язок $u \in C^1 \left((0, +\infty), S_{b_k}^{\circ b_n} \right)$ задачі (2), (3), який шукаємо за допомогою перетворення Бесселя, має вигляд

$$u(t, x) = \int_0^\infty T_x^\xi G(t, x) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi = G(t, x) * \psi(x), \quad (t, x) \in \Pi_T,$$

$$G = F_{B_\nu}^{-1} [Q], \quad Q(t, \sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\} \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k \varphi(\sigma)\} \right)^{-1}.$$

Основні властивості функції G сформулюємо в нижченаведеному твердженні.

Лема 1. а) $G(t, \cdot) \in S_{b_k}^{\circ b_n}$ при кожному $t \in (0, T]$. Функція $B_\nu^k G(t, x)$ задовольняє нерівність

$$\left| B_\nu^k G(t, x) \right| \leq L_0 t^{-2(\nu+1)} A_0^{2k} b_{2k} \exp\{-\ln \tilde{\gamma}(d_0 x)\}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (t, x) \in \Pi_T,$$

де $\tilde{\gamma} = 1/\gamma$, сталі $L_0, A_0, d_0 > 0$ не залежать від t ;

б) $G(t, \cdot), t \in (0, T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_{b_k}^{\circ b_n}$, диференційовна за t ;

в) правильною є формула

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t, \cdot)) = f * \frac{\partial G(t, \cdot)}{\partial t}, \quad \forall f \in \left(S_{b_k}^{\circ b_n} \right), \quad t \in (0, T].$$

Доведення тверджень леми 1 використовує властивості функції

$$Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma),$$

$$Q_1(t, \sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\}, \quad Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{t_k \varphi(\sigma)\} \right)^{-1}.$$

Зокрема, $Q_1(t, \cdot) \in S_{b_k}^{\circ b_n}$ при кожному $t \in (0, T]$, функція $Q_2(\sigma)$ є мультиплікатором у просторі $S_{b_k}^{\circ b_n}$, при цьому правильним є таке зображення функції Q_2 :

$$Q_2(\sigma) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1 + \dots + r_m = r} \frac{r!}{r_1! \dots r_m!} \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m} Q_1(\lambda, \sigma),$$

де $\lambda := t_1 r_1 + \dots + t_m r_m$, $Q_1(\lambda, \sigma) = \exp\{\lambda \varphi(\sigma)\}$.

Символом $\left(S_{b_k}^{\circ b_n}, * \right)'$ позначимо клас узагальнених функцій з $\left(S_{b_k}^{\circ b_n} \right)'$, які є згортувачами

в просторі $S_{b_k}^{\circ b_n}$.

Лема 2. Нехай

$$\omega(t, x) = f * G(t, x), \quad f \in \left(S_{b_k}^{\circ b_n}, * \right)', \quad (t, x) \in \Pi_T.$$

Тоді в просторі $\left(S_{b_k}^{\circ b_n} \right)'$ справджується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} \omega(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} \omega(t, \cdot) = f.$$

З леми 2 випливає, що для рівняння (2) m -точкову за часом задачу можна ставити так: знайти розв'язок $u \in C^1\left((0, T], S_{b_k}^{\circ b_n}\right)$ рівняння (2), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k \lim_{t \rightarrow t_k} u(t, \cdot) = f, \quad f \in \left(S_{b_k}^{\circ b_n}, * \right)', \quad (4)$$

де граничне співвідношення розглядається в просторі $\left(S_{b_k}^{\circ b_n} \right)'$ (обмеження на параметри $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m, t_1, \dots, t_m$) такі ж, як у випадку задачі (2), (3). Правильним є таке основне твердження.

Теорема. *Задача (2), (4) коректно розв'язна. Розв'язок дається формулою*

$$u(t, x) = f * G(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_T, \quad u(t, \cdot) \in S_{b_k}^{\circ b_n} \text{ при кожному } t \in (0, T].$$

Як приклад розглянемо рівняння (2) з оператором A_φ , побудованим за функцією-символом $\varphi(\sigma) = -\sigma^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$. У цьому випадку, як відомо, $A_\varphi = F_{B_v}^{-1}[-\sigma^2 F_{B_v}] = B_v$, а рівняння (2) – рівняння з оператором Бесселя

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad (t, x) \in \Pi_T.$$

Функція $\varphi(\sigma) = -\sigma^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$, є елементом класу $P_{1/2}^{\circ}$. Справді, $e^{-\sigma^2} \in S_{1/2}^{\circ}$, оскільки

$$|e^{-z^2}| = |e^{-(\sigma+iy)^2}| = e^{-\sigma^2+y^2}, \quad z = \sigma+iy \in \mathbb{C}.$$

Звідси та з характеристики просторів S_α^β (див. [1, с. 210]) випливає, що $e^{-\sigma^2} \in S_{\alpha'}^\beta$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{1-\beta} = 2$, тобто $\beta = \frac{1}{2}$. Крім того, функція $-\sigma^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$ – мультиплікатор у просторі $S_{1/2}^{\circ}$.

Внаслідок наведеної теореми нелокальна m -точкова за часом задача для рівняння (2) ко-

ректно розв'язна, якщо $f \in \left(S_{1/2}^{\circ}, * \right)'$, при цьому

$$u(t, x) = f * G(t, x),$$

де

$$\begin{aligned} G(t, x) &= c_\nu \int_0^\infty Q_1(t, \sigma) Q_2(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma = \\ &= c_\nu \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m}}{r_1! \dots r_m!} \int_0^\infty e^{-(t+t_1 r_1+\dots+t_m r_m) \sigma^2} j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma = \\ &= 2^{-\nu} \Gamma^{-1}(\nu+1) \sum_{r=0}^\infty \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m}}{r_1! \dots r_m!} (2\tilde{\lambda}(t, r))^{-(\nu+1)} \exp\{-x^2/(4\tilde{\lambda}(t, r))\}, \end{aligned}$$

$\tilde{\lambda} = t + t_1 r_1 + \dots + t_m r_m$. Тут ми скористалися відомим інтегралом Вебера для бesselевих функцій. Зокрема, якщо $f = \delta \in \left(S_{1/2}^{\circ}, * \right)'$, $m = 1$, $t_1 = T$ (випадок двоточкової задачі), то $\delta(x) * G(t, x) = G(t, x)$,

$$u(t, x) = G(t, x) = 2^{-(2\nu+1)} \mu^{-1} \Gamma^{-1}(\nu+1) \sum_{r=0}^\infty \left(\frac{\mu_1}{\mu} \right)^r \frac{1}{(t+rT)^{\nu+1}} \exp\left\{ \frac{-x^2}{4(t+rT)} \right\}$$

(δ – дельта-функція Дірака).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. Москва: Физматгиз, 1958. 307 с.
2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наук. думка, 1984. 284 с.
3. Городецький В.В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. Чернівці: Рута, 1998. 225 с.
4. Городецький В.В. Множини початкових значень гладких розв'язків дифференціально-операторних рівнянь параболічного типу. Чернівці: Рута, 1998. 219 с.
5. Городецький В.В., Мартинюк О.В. Операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева в пространствах типа S . *Сиб. мат. журн.* 2013. **54**, № 3. С. 569–584.
6. Гуревич Б.Л. Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем. *Докл. АН СССР.* 1954. **99**, № 6. С. 893–896.
7. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Москва: Физматгиз, 1958. 274 с.
8. Готинчан Т.І., Атаманюк Р.М. Різні форми означення просторів типу W . *Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика.* Чернівці: Рута, 2001. С. 21–26.
9. Городецький В.В., Мартинюк О.В. Задача Коші та двочоква задача для еволюційних рівнянь із операторами узагальненого диференціювання. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2013. № 3. С. 7–13.
10. Городецький В.В., Петришин Р.І., Тодоріко Т.С. Нелокальна багаточоква за часом задача для одного класу рівнянь з частинними похідними нескінченного порядку. *Нелінійні коливання.* 2015. **18**, № 3. С. 176–191.
11. Городецький В.В., Вережак Г.П. Узагальнені простори типу \dot{S} . *Буковин. матем. журн.* 2017. **5**, № 1–2. С. 49–61.
12. Городецький В.В., Готинчан Т.І. Перетворення Бесселя у просторах типу \dot{S} . *Буковин. матем. журн.* 2017. **5**, № 3–4. С. 50–55.
13. Левитан Б.И. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. *Успехи мат. наук.* 1951. **6**, Вып. 2. С. 102–143.

Надійшло до редакції 22.03.2018

REFERENCES

1. Gel'fand, I. M. & Shylov, G. E. (1958). The spaces of basic and generalized functions. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
2. Gorbacuk, V. I. & Gorbacuk, M. L. (1984). Boundary value problems for operator differential equations. Kiev: Naukova dumka (in Russian).
3. Gorodetsky, V. V. (1998). Boundary properties in the layer of smooth solutions of equations of parabolic type. Chernivtsi: Ruta (in Ukrainian).
4. Gorodetsky, V. V. (1998). The set of initial values of smooth solutions of differential-operator equations of a parabolic type. Chernivtsi: Ruta (in Ukrainian).
5. Gorodetsky, V. V. & Martynyuk, O. V. (2013). Gel'fond–Leont'ev generalized differentiation operators in spaces of type S . *Sibirsk. Mat. Zh.*, 54, No. 3, pp. 569-584 (in Russian).
6. Gurevich, B. L. (1954). Some spaces of principal and generalized functions and the Cauchy problem for finite-difference schemes. *Dokl. AN SSSR.*, 99, No. 6, pp. 893-896 (in Russian).
7. Gel'fand, I. M. & Shylov, G. E. (1958). Some questions in the theory of differential equations. Moscow: Fizmatgiz (in Russian).
8. Gotinchan, T. I. & Atamanyuk, R.M. (2001). Different forms of definitions of spaces of the type W . *Nauk. visnyk Cherniv. un-tu: Zbirnyk nauk. prats. Vyp. 111. Matematyka* (pp. 21-26). Chernivtsi: Ruta (in Ukrainian).
9. Gorodetsky, V. V. & Martynyuk, O. V. (2013). The Cauchy problem and the two-point problem for the evolution equations with operators of generalized differentiation. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 3, pp. 7-13 (in Ukrainian).

10. Horodets'kyi, V. V., Petryshyn, R. I. & Todoriko, T. S. (2015). Nonlocal problem multipoint in time for a class of partial differential equations of infinite order. *Nelineini kolyvannia*, 18, No. 3, pp. 176-191 (in Ukrainian).
11. Gorodetskyi, V. V. & Verezhak, G. P. (2017). Generalized of \mathring{S} type spaces. *Bukovyn. matem. zhurn.*, 5, No. 1-2, pp. 49-61 (in Ukrainian).
12. Gorodetskyi, V. V. & Gotinchan, T. I. (2017). Transformation of Bessel in spaces of type \mathring{S} . *Bukovyn. matem. zhurn.*, 5, No. 3-4, pp. 50-55 (in Ukrainian).
13. Levitan, B. I. (1951). Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 6, Iss. 2, pp. 102-143 (in Russian).

Received 22.03.2018

В.В. Городецкий, Г.П. Вережак

Черновицкий национальный университет им. Юрия Федьковича

E-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, g.verzhak@gmail.com

НЕЛОКАЛЬНАЯ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Устанавливается корректная разрешимость нелокальной многоточечной по времени задачи для эволюционных уравнений с оператором Бесселя бесконечного порядка в обобщенных пространствах типа S и пространствах типа S' — пространствах обобщенных функций бесконечного порядка типа ультрараспределений.

Ключевые слова: нелокальная многоточечная по времени задача, оператор Бесселя бесконечного порядка, обобщенные пространства типа S , обобщенные функции.

V.V. Gorodetskii, G.P. Verezhak

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

E-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, g.verzhak@gmail.com

THE NONLOCAL BY TIME PROBLEM FOR EVOLUTIONARY SINGULAR EQUATIONS OF INFINITE ORDER

The correct solvability of a nonlocal by time multipoint problem for evolutionary equations with the Bessel operator of infinite order in generalized spaces of the type S and spaces of the type S' that are spaces of generalized functions of infinite order of the type of ultra distributions is proved.

Keywords: a nonlocal multipoint by time problem, Bessel operator of infinite order, generalized spaces of the type S , generalized functions.