

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ СОЛЕНОИДА С ПОМОЩЬЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

*Детально розглядаються аналітичні представлення для зовнішнього та внутрішнього магнітного поля кругового контуру зі струмом та тонкого соленоїда на основі циліндричних гармонік скалярного потенціалу. Запропоновано використовувати ці аналітичні рішення при розрахунку токових елементів технічних об'єктів циліндричної форми.*

*Подробно рассматриваются аналитические представления для внешнего и внутреннего магнитного поля кругового контура с током и тонкого соленоида на основе цилиндрических гармоник скалярного потенциала. Предложено использовать эти аналитические решения при расчете токовых элементов технических объектов цилиндрической формы.*

### ВВЕДЕНИЕ

Расчет магнитных характеристик различных технических объектов (ТО) остается актуальной задачей электротехники, несмотря на многообразие численных методов ее решения. При использовании численных методов получают результат в виде набора векторов и матриц, представление которых ограничивает применение комплексного анализа электротехнического объекта сразу по нескольким независимым параметрам (например, напряжение сети, потребляемый ток, геометрия обмотки, удельная проводимость обмоточного провода и т.д.).

В этом плане гораздо шире выглядят возможности использования аналитических моделей магнитных характеристик ТО, которые позволяют производить анализ всего электротехнического изделия в комплексе. Однако, одним из ограничений применения аналитических моделей магнитного поля ТО остается недостаточная их проработка для электротехнических изделий сложной геометрии. Замена реальной геометрии объекта на упрощенное аналитическое представление негативно сказывается на точности метода, поскольку достоверность результатов расчета зависит от адекватности используемых математической модели и метода расчета. В случае применения методов пространственного гармонического анализа (ПГА) магнитного поля ограничения накладываются на форму граничной поверхности ТО, которая должна быть аналитической функцией. Для ряда ТО такой поверхностью является поверхность цилиндра, что позволяет использовать методы ПГА в цилиндрической системе координат. В частности, простейшими моделями элементов электротехнических изделий являются круговой контур с током и соленоид.

Целью работы является построение моделей магнитного поля кругового контура с током и однослойного соленоида на основе цилиндрических гармоник скалярного потенциала как составных частей аналитической модели ТО.

### ПОЛЕ КРУГОВОГО КОНТУРА С ТОКОМ

Вычислим магнитное поле, создаваемое круговым контуром радиуса  $R$ , по которому течет ток  $J$ . Введем цилиндрическую систему координат с центром, совпадающим с центром контура и осью аппликата, направленной вдоль его оси (рис. 1).

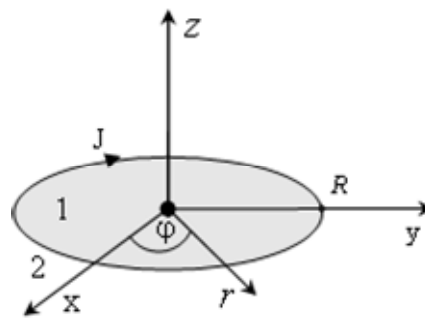


Рис. 1. Круговой контур с током

Уравнение Лапласа для скалярного потенциала магнитного поля в цилиндрической системе координат [1] записывается в виде:

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Учитывая симметрию поля по  $\varphi$ , и применяя метод разделения переменных, из уравнения (1) приходим к следующим решениям [2]:

$$\begin{cases} R(r) = C_1 I_0(\lambda r) + C_2 K_0(\lambda r), \\ Z(z) = C_3 \sin \lambda z + C_4 \cos \lambda z, \end{cases} \quad (2)$$

где  $I_0$  и  $K_0$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка;  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$  – константы,  $\lambda$  – произвольный параметр.

Поэтому скалярный потенциал представляется интегрированием соответствующих решений по  $\lambda$  в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ :

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ C_1 I_0(\lambda r) \right\} \left\{ C_3 \sin(\lambda z) \right\} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ C_2 K_0(\lambda r) \right\} \left\{ C_4 \cos(\lambda z) \right\} d\lambda. \quad (3)$$

Запишем выражение скалярного потенциала для внутренней и внешней области, отделенных друг от друга круговой линией контура ( $r = R$ ). Обозначим эти области индексами 1 и 2 соответственно. Принимая во внимание, что поле ограничено как в нуле, так и на бесконечности, а также симметрию скалярного потенциала относительно начала координат, приходим к следующему:

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) I_0(\lambda r) \sin(\lambda z) d\lambda, \\ U_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} B(\lambda) K_0(\lambda r) \sin(\lambda z) d\lambda. \end{aligned} \quad (4)$$

Компоненты поля выражаются через скалярный потенциал следующим образом:

$$H_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad H_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (5)$$

Из (4) и (5) приходим к записи компонент магнитного поля для внутренней и внешней областей, используя цилиндрические гармоники [2]:

$$\begin{cases} H_{1r} = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda A(\lambda) I_1(\lambda r) \sin(\lambda z) d\lambda, \\ H_{1z} = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda A(\lambda) I_0(\lambda r) \cos(\lambda z) d\lambda; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} H_{2r} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda B(\lambda) K_1(\lambda r) \sin(\lambda z) d\lambda, \\ H_{2z} = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda B(\lambda) K_0(\lambda r) \cos(\lambda z) d\lambda. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь мы учли следующие соотношения:

$$\frac{d}{dx} I_0(x) = I_1(x); \quad \frac{d}{dx} K_0(x) = -K_1(x). \quad (8)$$

Найдем  $A(\lambda)$  и  $B(\lambda)$ , пользуясь граничными условиями. На границе областей 1 и 2 нормальная составляющая поля непрерывна, разность же тангенциальных составляющих равна линейной плотности тока [3].

$$H_{1r}|_{r=R, \Delta z \rightarrow 0} = H_{2r}|_{r=R, \Delta z \rightarrow 0}; \quad (9)$$

$$(H_{2z} - H_{1z})|_{r=R, \Delta z \rightarrow 0} = \begin{cases} \frac{J}{\Delta z}, z \in \left(-\frac{\Delta z}{2}; \frac{\Delta z}{2}\right), \\ 0, z \notin \left(-\frac{\Delta z}{2}; \frac{\Delta z}{2}\right). \end{cases} \quad (10)$$

Здесь мы приняли допущение, что контур имеет толщину  $\Delta z$ . Тогда из уравнений (9) и (10) следует, что

$$A(\lambda) = -B(\lambda) \cdot \frac{K_1(\lambda R)}{I_1(\lambda R)}; \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\lambda) \cdot \frac{\lambda(K_0(\lambda R)I_1(\lambda R) + K_1(\lambda R)I_0(\lambda R)) \cos(\lambda z) d\lambda}{I_1(\lambda R)} = \frac{J}{\Delta z}, \quad \Delta z \rightarrow 0 \quad (12)$$

Замечаем, что

$$\begin{aligned} K_0(\lambda R)I_1(\lambda R) + K_1(\lambda R)I_0(\lambda R) &= \\ &= W[K_0(\lambda R), I_0(\lambda R)] = \frac{1}{\lambda R} \end{aligned} \quad (13)$$

– вронскиан (определитель Вронского) и получаем:

$$\frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} B(\lambda) \cdot \frac{\cos(\lambda z)}{I_1(\lambda R)} d\lambda = \frac{J}{\Delta z}, \quad \Delta z \rightarrow 0. \quad (14)$$

Далее, пусть

$$B(\lambda) = C \cdot I_1(\lambda R), \quad (15)$$

где  $C$  – неизвестный коэффициент.

Основание полагать, что коэффициент  $C$  не зависит от  $\lambda$  дает ортогональность тригонометрических функций с весом, равным 1. Для вычисления  $C$  помножим левую и правую части уравнения на  $\cos(\mu z)$ , где  $\mu$  – произвольный параметр и проинтегрируем по

$z$  от  $-\pi$  до  $\pi$ :

$$\frac{C}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \lambda z \cos \mu z d\lambda dz = \frac{J}{\Delta z} \int_{-\frac{\Delta z}{2}}^{\frac{\Delta z}{2}} \cos \mu z dz, \quad \Delta z \rightarrow 0. \quad (16)$$

Интеграл слева в выражении (16) равен  $2\pi$ . Интеграл в правой части (16), вычисленный с помощью теоремы о среднем, равен  $\Delta z$  при  $\Delta z \rightarrow 0$ . В результате из (16) получаем:

$$\frac{2\pi C}{R} = J, \quad (17)$$

откуда находим выражение для  $C$ , а затем, согласно (11) и (15), для  $A$  и  $B$ :

$$A(\lambda) = -\frac{JR}{2\pi} K_1(\lambda R); \quad B(\lambda) = \frac{JR}{2\pi} I_1(\lambda R). \quad (18)$$

В уравнениях для компонент магнитных полей подынтегральные функции четные, (в случае функций  $K_0$  и  $K_1$  это относится к вещественной части значения этих функций), поэтому в (6) и (7) переходим к интегрированию от нуля до бесконечности. В результате, получим выражения для компонент магнитного поля, созданного круговым контуром с током:

$$\begin{cases} H_{1r} = \frac{JR}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda K_1(\lambda R) I_1(\lambda r) \sin(\lambda z) d\lambda, \\ H_{1z} = \frac{JR}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda K_1(\lambda R) I_0(\lambda r) \cos(\lambda z) d\lambda; \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} H_{2r} = \frac{JR}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda I_1(\lambda R) K_1(\lambda r) \sin(\lambda z) d\lambda, \\ H_{2z} = -\frac{JR}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda I_1(\lambda R) K_0(\lambda r) \cos(\lambda z) d\lambda. \end{cases} \quad (20)$$

На рис. 2 представлены силовые линии магнитного поля кругового контура, построенные с помощью выражений (19), (20).

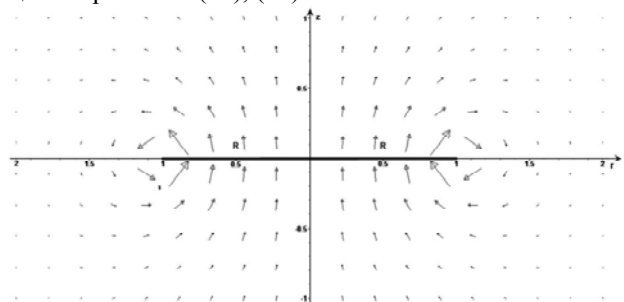


Рис. 2. Поле кругового контура

### ПОЛЕ ОДНОСЛОЙНОГО СОЛЕНОИДА

Теперь непосредственно перейдем к рассмотрению магнитного поля однослойного бесконечно тонкого соленоида высотой  $h$ . Пусть круговой виток с током расположен на высоте  $z'$  над началом координат.

Тогда компоненты поля, исходя из уравнений (19) и (20) запишутся в виде:

$$\begin{cases} H_{1r} = \frac{JR}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda K_1(\lambda R) I_1(\lambda r) \sin(\lambda(z+z')) d\lambda, \\ H_{1z} = \frac{JR}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda K_1(\lambda R) I_0(\lambda r) \cos(\lambda(z+z')) d\lambda, \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} H_{2r} = \frac{JR}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda I_1(\lambda R) K_1(\lambda r) \sin(\lambda(z+z')) d\lambda, \\ H_{2z} = -\frac{JR}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda I_1(\lambda R) K_0(\lambda r) \cos(\lambda(z+z')) d\lambda. \end{cases} \quad (22)$$

Магнитное поле однослойного бесконечно тонкого соленоида с нулевым шагом обмотки состоит из суперпозиции магнитных полей токовых витков с учетом, что теперь ток  $J$  заменяется линейной плотностью тока  $j = J/h$ , протекающего по всей боковой поверхности соленоида (рис. 3).

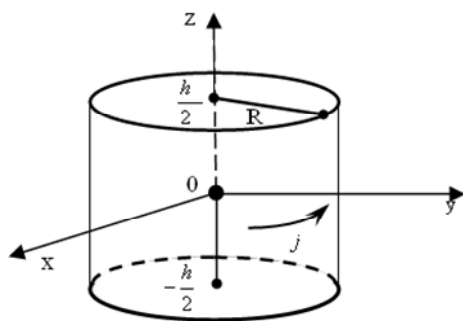


Рис. 3. Однослойный бесконечно тонкий соленоид

Интегрируя уравнения (21) и (22) по  $z'$  от  $-h/2$  до  $h/2$ , наконец, получим:

$$\begin{cases} H_{1r} = \frac{2jR}{\pi} \int_0^{\infty} K_1(\lambda R) I_1(\lambda r) \sin\left(\lambda \frac{h}{2}\right) \sin(\lambda z) d\lambda, \\ H_{1z} = \frac{2jR}{\pi} \int_0^{\infty} K_1(\lambda R) I_0(\lambda r) \sin\left(\lambda \frac{h}{2}\right) \cos(\lambda z) d\lambda, \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} H_{2r} = \frac{2jR}{\pi} \int_0^{\infty} I_1(\lambda R) K_1(\lambda r) \sin\left(\lambda \frac{h}{2}\right) \sin(\lambda z) d\lambda, \\ H_{2z} = -\frac{2jR}{\pi} \int_0^{\infty} I_1(\lambda R) K_0(\lambda r) \sin\left(\lambda \frac{h}{2}\right) \cos(\lambda z) d\lambda. \end{cases} \quad (24)$$

На рис. 4 представлены силовые линии магнитного поля соленоида, построенные согласно выражениям (23) и (24).

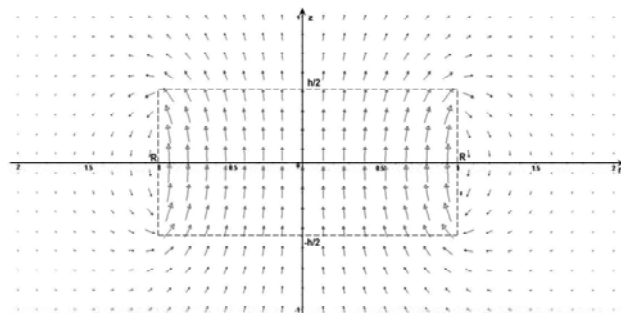


Рис. 4. Поле однослойного бесконечно тонкого соленоида

## ВЫВОДЫ

Результаты расчета внешнего и внутреннего магнитного поля кругового контура с током и тонкого соленоида на основе цилиндрических гармоник полностью совпадают с результатами, полученными на основе закона Био-Савара-Лапласа. Тем самым показано, что математический аппарат цилиндрических гармоник магнитного потенциала может быть использован для разработки аналитических моделей магнитного поля технических объектов цилиндрической формы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. W. Smythe. Static and Dynamic Electricity. – ISBN: 0891169172, Publisher: Hemisphere Publishing Corporation, 1989. – 623 p.
2. Новгородцев Б.В. Расчет электрических и магнитных полей. – Л.: Ленинградский политехнический институт им. М.И. Калинина, 1975. – 80 с.
3. Зацепин Н.Н. Об электромагнитных методах контроля качества изделий. – Свердловск, 1965. – 331с.

Поступила 27.07.2010

Гетьман Андрей Владимирович, к.т.н.

Константинов А.В.

Научно-технический центр магнетизма технических объектов Национальной академии наук Украины 61106, Украина, г. Харьков, ул. Индустриальная, 19 тел. (0572) 99-11-75

A.V. Getman, A.V. Konstantinov

### Analytic representation of magnetic field of a solenoid through cylindrical harmonics

Analytic representations for external and internal magnetic fields of a circular current loop and a single-layer solenoid are considered in detail on the basis of cylindrical harmonics of a scalar potential. These analytical solutions are proposed for applying to computation of current elements of cylindrical technical objects.

**Key words** – circular loop current, solenoid, cylindrical harmonics, modified Bessel functions.