

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.07.033>

УДК 539.3

**Д.М. Ли́ла**

Черкасский национальный университет им. Богдана Хмельницкого

E-mail: dim\_l@ukr.net

## **Второе приближение по малому параметру к решению задачи о потере устойчивости вращающегося диска в уточненной постановке**

*Представлено академиком НАН Украины А.А. Мартынюком*

*При исследовании возможной потери устойчивости быстровращающегося сплошного кругового тонкого диска характеристическое уравнение получено во втором приближении по малому параметру на основе условия текучести Сен-Венана. Найдена критическая угловая скорость вращения.*

**Ключевые слова:** упругопластическая задача, метод возмущения формы границы, вращающийся диск, потеря устойчивости, критическая угловая скорость.

Необходимость уточненной постановки задачи о потере устойчивости вращающихся дисков в рамках применения приближенного аналитического метода малого параметра [1–4] обсуждалась ранее в статье [5] со ссылкой на работу [6]. Суть этой постановки состоит в развитии метода сходящихся последовательных приближений, исходя из первого приближения в виде простейшей самоуравновешенной формы потери устойчивости [7] и учета исключительно возмущений, порождающих некруговую равновесную форму диска. Цель настоящей работы – получение второго приближения по малому параметру для характеристического уравнения, критического радиуса пластической зоны и критической угловой скорости [8–10].

**Постановка задачи.** Рассматривается вращающийся однородный и изотропный сплошной круговой тонкий диск постоянной толщины [5]. Предел текучести материала диска  $\sigma_s$ , модуль упругости  $E$ , плотность  $\gamma$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ , а также постоянная угловая скорость вращения  $\omega$  известны. Срединная плоскость диска принята за плоскость  $r\theta$  радиальной и угловой координат. Поле невозмущенных напряжений (обобщенное плоское напряженное состояние применительно к тонким пластинам [10]) определяется из обыкновенного дифференциального уравнения квазистатического равновесия, учитывающего объемные радиальные нагрузки, а также уравнений связи в упругой зоне и условия текучести  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s$  в пластической зоне.

© Д.М. Ли́ла, 2018

Возмущенное состояние упругой области диска

$$\sigma_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \sigma_{\lambda i},$$

$$u_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i u_{\lambda i}$$

находится с учетом того, что линеаризованные по малому параметру  $\delta$  возмущения удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия плоской задачи (без учета вращения) и уравнениям связи между напряжениями и перемещениями в частных производных. Предмет исследования составляет критическая угловая скорость вращения диска  $\omega = \omega_*$ , теряющего устойчивость, когда уравнение внешней его границы принимает вид [1, 2, 5, 6]

$$\rho = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \rho_i(\theta), \quad (1)$$

где  $\rho = r/r_0$  — безразмерный текущий радиус,  $\rho_0 = 1$ ,  $\rho_1 = \cos 2\theta$ ,  $\rho_2 = -(1/4)\cos 4\theta$ , ... Для определения значения  $\omega_*$  требуется получить во втором приближении по малому параметру характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны  $\rho = \beta_{0*}$ , установив условие существования решений системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} R_2 - 2T_1\dot{\rho}_1 + (\Theta_0 - R_0)\dot{\rho}_1^2 + R_1'\dot{\rho}_1 + R_0'\dot{\rho}_2 + \frac{1}{2}R_0''\dot{\rho}_1^2 &= 0, & \rho = 1, \\ T_2 - (\Theta_1 - R_1)\dot{\rho}_1 + (\Theta_0 - R_0)(\rho_1\dot{\rho}_1 - \dot{\rho}_2) + \{T_1 - (\Theta_0 - R_0)\dot{\rho}_1\}'\dot{\rho}_1 &= 0, & \rho = 1, \\ \left[ R_2 + R_1'\rho_{1*} + R_0'\rho_{2*} + \frac{1}{2}R_0''\rho_{1*}^2 \right] &= 0, & \rho = \beta_0, \\ \left[ T_2 + T_1'\rho_{1*} + T_0'\rho_{2*} + \frac{1}{2}T_0''\rho_{1*}^2 \right] &= 0, & \rho = \beta_0, \end{aligned} \quad (2)$$

в которой  $R := \sigma_{rr}$ ,  $\Theta := \sigma_{\theta\theta}$ ,  $T := \tau_{r\theta}$ , штрихом обозначена производная по  $\rho$ ; точкой — производная по  $\theta$ ; квадратными скобками — скачек функции в точке, а  $\rho_{1*}$ ,  $\rho_{2*}$  — отнесенные к  $r_0$  возмущения радиального смещения соответствующего порядка на упругопластической границе.

**Вспомогательные результаты.** Учитывая (1), (2), первое приближение линеаризованных по  $\delta$  граничных условий и условий сопряжения [1, 2, 6], вид невозмущенного состояния вращающегося диска [7], а также общий вид возмущений напряжений упругой области [5–9]

$$\begin{aligned} R_1 &= (2A_1 + 2B_1\rho^{-4} + 4D_1\rho^{-2})\cos 2\theta, \\ \Theta_1 &= (-2A_1 - 2B_1\rho^{-4} - 4C_1\rho^2)\cos 2\theta, \\ T_1 &= (-2A_1 + 2B_1\rho^{-4} - 2C_1\rho^2 + 2D_1\rho^{-2})\sin 2\theta \end{aligned} \quad (3)$$

(напряжения отнесены к  $\sigma_s$ ), приведем выражения для некоторых необходимых в дальнейшем величин:

$$\begin{aligned}
 a_1 &:= R'_0(1) = (2(3\nu+1)\beta_0^4 - 6(\nu+3))z^{-1}, \\
 a_2 &:= \Theta_0(1) - R_0(1) = (2(3\nu+1)\beta_0^4 + 6(1-\nu))z^{-1}, \\
 a_3 &:= \Theta'_0(\beta_0+) = -8(3\nu+1)\beta_0 z^{-1}, \\
 a_4 &:= R''_0(1) = (-6(3\nu+1)\beta_0^4 - 6(\nu+3))z^{-1}, \\
 a_5 &:= \Theta'_0(1) - R'_0(1) = (-4(3\nu+1)\beta_0^4 + 12(1-\nu))z^{-1}, \\
 a_6 &:= R''_0(\beta_0+) - R''_0(\beta_0-) = -8(3\nu+1)z^{-1}, \\
 A_1 &= \{a_1(2\beta_0^2 - \beta_0^{-4} - 1) - a_2(4\beta_0^2 - 4)\}(2N)^{-1}, \\
 B_1 &= \{a_1(2\beta_0^2 + \beta_0^4 - 3) - a_2(-4\beta_0^2 + 4\beta_0^4)\}(2N)^{-1}, \\
 C_1 &= \{a_1(2\beta_0^2 + \beta_0^{-4} - 3) - 2a_2(4\beta_0^{-2} - \beta_0^{-4} - 3)\}(2N)^{-1}, \\
 D_1 &= \{a_1(2\beta_0^{-2} - \beta_0^4 - 1) - 2a_2(-\beta_0^4 + 1)\}(2N)^{-1}, \\
 \rho_{1*} &= U_1 \cos 2\theta,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
 z &= 3(\nu+3) - (3\nu+1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2, \\
 N &= 6 - 4(\beta_0^2 + \beta_0^{-2}) + (\beta_0^4 + \beta_0^{-4}), \\
 U_1 &= -\frac{(1 + \beta_0^2)\{3(\nu+3) - (3\nu+1)\beta_0^4\} + 2\beta_0^2\{3(1-\nu) + (3\nu+1)\beta_0^4\}}{(3\nu+1)(1 - \beta_0^2)^2\beta_0}.
 \end{aligned}$$

**Характеристическое уравнение.** С учетом разложения (1), общего вида возмущенного напряженного состояния при самоуравновешенной форме потери устойчивости [7], а также принципа наложения полагаем

$$\begin{aligned}
 R_2 &= G_2 - H_2\rho^{-2} + (4A_2\rho^2 + 4B_2\rho^{-6} + 2C_2\rho^4 + 6D_2\rho^{-4})\cos 4\theta, \\
 \Theta_2 &= G_2 + H_2\rho^{-2} + (-4A_2\rho^2 - 4B_2\rho^{-6} - 6C_2\rho^4 - 2D_2\rho^{-4})\cos 4\theta, \\
 T_2 &= (-4A_2\rho^2 + 4B_2\rho^{-6} - 4C_2\rho^4 + 4D_2\rho^{-4})\sin 4\theta.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Поскольку  $T_0 = 0$ ,  $R_1(\beta_0-) = R_2(\beta_0-) = 0$ ,  $T_1(\beta_0-) = T_2(\beta_0-) = 0$  [5, 6], из соотношений (1), (2), (4), (5) получаем систему уравнений

$$Sx = g, \tag{6}$$

в которой

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 6 & -1 & 1 \\ 8 & 8 & 4 & 12 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 8\beta_0^2 & 8\beta_0^{-6} & 4\beta_0^4 & 12\beta_0^{-4} & 0 & 0 \\ 4\beta_0^2 & 4\beta_0^{-6} & 2\beta_0^4 & 6\beta_0^{-4} & -1 & \beta_0^{-2} \\ -4\beta_0^2 & 4\beta_0^{-6} & -4\beta_0^4 & 4\beta_0^{-4} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ G_2 \\ H_2 \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a_1 - 4a_2 \\ \frac{1}{2}a_1 - 4a_2 - \frac{1}{2}a_4 + 8B_1 + 8D_1 \\ 2a_2 - a_5 + 4A_1 + 8B_1 + 6C_1 + 6D_1 \\ -\frac{1}{2}a_6U_1^2 + (8B_1\beta_0^{-5} + 8D_1\beta_0^{-3})U_1 \\ 0 \\ (4B_1\beta_0^{-5} + 2C_1\beta_0 + 2D_1\beta_0^{-3})U_1 \end{pmatrix}.$$

Система (6) эквивалентна системе

$$Tx = h, \tag{7}$$

где

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 6 & -1 & 1 \\ 4(\beta_0^2 - \beta_0^{-2}) & 4(\beta_0^{-6} - \beta_0^{-2}) & 2(\beta_0^4 - \beta_0^{-2}) & 6(\beta_0^{-4} - \beta_0^{-2}) & \beta_0^{-2} - 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1,25 & -0,25 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-0,25\beta_0^{-4} - \beta_0^2 + 1,25\beta_0^4}{\beta_0^{-6} - 0,75\beta_0^{-4} - 0,25\beta_0^4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h = \begin{pmatrix} g_1 \\ -\beta_0^{-2}g_1 \\ 0,25g_3 \\ 0,0625(g_2 - 3g_3) \\ 0,0625\{(\beta_0^4 - \beta_0^{-4})g_2 - (3\beta_0^4 + \beta_0^{-4})g_3 + 4g_6\}\{\beta_0^{-6} - 0,75\beta_0^{-4} - 0,25\beta_0^4\}^{-1} \\ 0,0625\{(-\beta_0^{-10} - 3\beta_0^{-2} + 4)g_2 + (\beta_0^{-10} - 1,5\beta_0^{-8} + 9\beta_0^{-2} - 8,5)g_3 + 4(\beta_0^{-6} - 0,75\beta_0^{-4} - 0,25\beta_0^4)\} \times \\ \times \{g_4 - 4(2\beta_0^{-6} - 2,25\beta_0^{-4} + 0,25\beta_0^4)g_6\}\{-0,25\beta_0^{-10} + 4\beta_0^{-4} - 7,5\beta_0^{-2} + 4 - 0,25\beta_0^6\}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Решение системы (7) имеет вид

$$\begin{aligned} A_2 &= h_6, \\ B_2 &= h_5 - t_{51}A_2, \\ C_2 &= h_4 - t_{41}A_2 - t_{42}B_2, \\ D_2 &= h_3 - t_{31}A_2 - t_{32}B_2 - t_{33}C_2, \\ G_2 &= (h_2 - t_{21}A_2 - t_{22}B_2 - t_{23}C_2 - t_{24}D_2)(\beta_0^{-2} - 1)^{-1}, \\ H_2 &= h_1 - t_{11}A_2 - t_{12}B_2 - t_{13}C_2 - t_{14}D_2 - t_{15}G_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку возмущение радиального смещения имеет вид

$$u_2 = u_{21} + u_{22},$$

где

$$u_{21} = \frac{\sigma_s}{E} ((1-\nu)G_2\rho + (1+\nu)H_2\rho^{-1}),$$

$$u_{22} = \frac{\sigma_s}{E} \left( \frac{4(\nu+1)}{3} A_2\rho^3 - \frac{4(\nu+1)}{5} B_2\rho^{-5} + \frac{2(3\nu+1)}{5} C_2\rho^5 - \frac{2(\nu+3)}{3} D_2\rho^{-3} \right) \cos 4\theta,$$

в соответствии с  $\rho_2$  (см. (1)) искомое характеристическое уравнение получаем таким:

$$\frac{\sigma_s}{E} \left( \frac{4(\nu+1)}{3} A_2 - \frac{4(\nu+1)}{5} B_2 + \frac{2(3\nu+1)}{5} C_2 - \frac{2(\nu+3)}{3} D_2 \right) + \frac{1}{4} = 0. \quad (9)$$

Его корню  $\beta_{0*}$  соответствует критическая относительная угловая скорость [2, 7]

$$\frac{\omega_*}{q} = 2 \sqrt{\frac{6}{z(\beta_{0*})}}, \quad q = \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{\sigma_s}{\gamma}}.$$

Используя в дополнение к (2) условие сопряжения решений для  $\Theta$  в виде

$$\left[ \Theta_2 + \Theta'_1 \rho_{1*} + \Theta'_0 \rho_{2*} + \frac{1}{2} \Theta''_0 \rho_{1*}^2 \right] = 0, \quad \rho = \beta_0,$$

и учитывая, что  $\Theta_1(\beta_0-) = \Theta_2(\beta_0-) = 0$ , на основе (3)–(5) и (8) получаем выражение для радиального смещения второго порядка малости на упругопластической границе:

$$\rho_{2*} = U_{21} + U_{22} \cos 4\theta,$$

где

$$U_{21} = -\{G_2 + H_2\beta_0^{-2} + (4B_1\beta_0^{-5} - 4C_1\beta_0)U_1\}a_3^{-1},$$

$$U_{22} = -\{-4A_2\beta_0^2 - 4B_2\beta_0^{-6} - 6C_2\beta_0^4 - 2D_2\beta_0^{-4} + (4B_1\beta_0^{-5} - 4C_1\beta_0)U_1\}a_3^{-1}.$$

**Численные примеры и обсуждение результатов.** В таблице приведены результаты решения данной задачи в предложенной постановке для различных значений  $\nu$  и  $\sigma_s/E = 0,01$  (ср. с [1, 2, 7, 8]).

$\nu$	0,2	0,3	0,4	0,5
$\beta_{0*}$	0,3511	0,3684	0,3834	0,3967
$\omega_*/q$	1,6125	1,5962	1,5810	1,5669

Разрешимость характеристического уравнения второго приближения (9) свидетельствует о появившейся возможности развития метода последовательных приближений к значению критической скорости вращения диска (ср. с [5]), а полученные значения  $\beta_{0*}$  и  $\omega_*/q$  позволяют предположить сходимость метода с учетом дальнейшего рассмотрения высших приближений.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. Москва: Наука, 1978. 208 с.
2. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред: В 2 т. Т. 2: Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. Москва: Физматлит, 2002. 448 с.
3. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. Москва: Физматлит, 2001. 704 с.
4. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. Киев: Вища шк., 1989. 352 с.
5. Ли́ла Д.М. Второе приближение по малому параметру к решению задачи об упругопластической неустойчивости вращающегося диска. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2018. № 5. С. 36–43. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.05.036>
6. Ли́ла Д.М. К методу возмущений в задаче об упругопластической неустойчивости вращающегося диска. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2017. № 9. С. 48–54. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.048>
7. Ли́ла Д.М., Мартынюк А.А. О потере устойчивости вращающегося упруго-пластического кругового диска. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2011. № 1. С. 44–51.
8. Ли́ла Д.М. Эксцентричная форма потери устойчивости вращающегося упруго-пластического диска. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2011. № 2. С. 49–53.
9. Lila D.M., Martynyuk A.A. Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk. *Int. Appl. Mech.* 2012. **48**, № 2. P. 224–233.
10. Ли́ла Д.М. Упругопластическая неустойчивость вращающегося тонкого диска. *Прикл. проблеми мех. і мат.* 2016. № 14. С. 92–98.

Поступило в редакцию 29.11.2017

REFERENCES

1. Ivlev, D. D. & Ershov, L. V. (1978). Perturbation Method in the Theory of Elastoplastic Bodies. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Ivlev, D. D. (2002). Mechanics of Plastic Media, Vol. 2: General Problems. Rigid-Plastic and Elastoplastic State of Bodies. Hardening. Deformation Theories. Complex Media. Moscow: Fizmatlit (in Russian).
3. Ishlinskii, A. Yu. & Ivlev, D. D. (2001). Mathematical Theory of Plasticity. Moscow: Fizmatlit (in Russian).
4. Guz', A. N. & Nemish, Yu. N. (1989). Method of Perturbation of the Shape of the Boundary in Continuum Mechanics. Kyiv: Vyshcha Shkola (in Russian).
5. Lila, D. M. (2018). The second approximation in the small parameter to the solution of the problem of the elastoplastic instability of a rotating disk. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 5, pp. 36-43(in Russian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.05.036>
6. Lila, D. M. (2017). On the method of perturbations in the problem of elastoplastic instability of a rotating disk. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 9, pp. 48-54 (in Russian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.09.048>
7. Lila, D. M. & Martynyuk, A. A. (2011). About the stability loss of a rotating elastoplastic circular disc. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 1, pp. 44-51 (in Russian).
8. Lila, D. M. (2011). Eccentric form of stability loss of a rotating elastoplastic disk. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 2, pp. 49-53 (in Russian).
9. Lila, D. M. & Martynyuk, A. A. (2012). Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk. *Int. Appl. Mech.*, 48, No. 2, pp. 224-233.
10. Lila, D. M. (2016). Elastoplastic instability of thin rotating disk. *Appl. Probl. Mech. and Math.*, No. 14, pp. 92-98 (in Russian).

Received 29.11.2017

*Д.М. Ли́ла*

Черкаський національний університет ім. Богдана Хмельницького  
E-mail: dim\_l@ukr.net

ДРУГЕ НАБЛИЖЕННЯ ЗА МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ  
ПРО ВТРАТУ СТІЙКОСТІ ДИСКА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ, В УТОЧНЕНІЙ ПОСТАНОВЦІ

При дослідженні можливої втрати стійкості суцільного кругового тонкого диска, що обертається, характеристичне рівняння одержано як друге наближення за малим параметром на основі умови текучості Сен-Венана. Знайдено критичну кутову швидкість обертання.

**Ключові слова:** пружно-пластична задача, метод збурення форми межі, диск, що обертається, втрата стійкості, критична кутова швидкість.

*D.M. Lila*

Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy  
E-mail: dim\_l@ukr.net

THE SECOND APPROXIMATION IN A SMALL PARAMETER TO THE SOLUTION  
OF THE PROBLEM OF LOSS OF THE STABILITY OF A ROTATING DISK  
IN THE REFINED FORMULATION

We have proposed a way of the investigation of the possible loss of stability by a rotating thin circular disk by the method of small parameter. We have obtained a characteristic equation for the critical radius of plastic zone in the second approximation in a small parameter on the basis of Saint-Venant's yield condition. We also have found the critical angular rotational velocity.

**Keywords:** elastoplastic problem, boundary shape perturbation method, rotating disc, stability loss, critical angular velocity.