ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.07.026
УДК 531.37:531.396:537.634:537.612.4:519.6

С.И. Ляшко [1], С.И. Зуб [2], С.С. Зуб [1]

[1] Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
[2] ННЦ “Институт метрологии”, Харьков
E-mail*:* stah@univ.kiev.ua

Математическая модель разделения магнитной руды

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины С.И. Ляшко

Исследован процесс магнитного взаимодействия руды с полем в полёте. Созданы новые математические модели магнитной руды и движения парамагнитного тела в поле силы тяжести под влиянием магнитного поля. Полученные оценки и результаты математического моделирования указывают на магнитное разделение руды. Представлено схему расположения магнитного поля. Определены параметры для оптимизации.

Ключевые слова*: динамические системы, математические модели, оптимизация, баллистика, экология.*

Исследованиям по магнитному разделению минералов на основе различия их магнитных характеристик посвящено множество работ. Основные подходы достаточно полно изложены в публикациях [1, 2].

Цель данной задачи — предложить по возможности новый, оригинальный метод разделения. Работа носит исследовательский характер, т.е. ставит своей задачей обоснование принципов, создание и исследование моделей, по необходимости, идеализированных.

Как хорошо известно из классических курсов макроскопической электродинамики, на тела, помещённые в неоднородное магнитное поле, действует сила, зависящая от магнитной проницаемости тела и степени неоднородности поля. У парамагнетиков $\mu > \mu_0$ и объемная плотность силы направлена в сторону увеличения индукции поля, тогда как у диамагнетиков $\mu < \mu_0$ и объемная плотность силы направлена в сторону уменьшения индукции поля.

Таким образом, поведение магнитных и немагнитных тел в магнитном поле отличается. В частности, магнитное и немагнитное тела, начинающие движение с одинаковой скоростью из одной и той же области поля, будут испытывать различные ускорения и будут двигаться по разным траекториям. В этом и состоит идея нашего метода.

Физические процессы, происходящие в ферромагнитных материалах под влиянием магнитного поля, очень сложны, и построение теоретических моделей, детально учитывающих все свойства этих веществ и тел, из них состоящих, не только невозможно, но и не целесообразно.

Поэтому для обоснования работоспособности метода и оценки его эффективности были предложены достаточно простые идеализированные модели, которые, тем не менее, отражают существенные свойства поведения тел в магнитном поле.

Рассмотрим одномерное движение магнита из области, где магнитное поле имеет максимум, в область с нулевым магнитным полем. Баланс кинетической и потенциальной энергии, если пренебречь кинетической энергией вращения магнита, имеет вид:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \vec{\mu}\cdot\vec{B}_0 = \frac{mv_\infty^2}{2} - \vec{\mu}\cdot\vec{B}_\infty = \frac{mv_\infty^2}{2}. \qquad (1)$$

Отсюда получаем

$$v_\infty = \sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{m}B_0}.$$

Замедление скорости между начальным и конечным моментом времени

$$\Delta v = v_\infty - v_0 = \sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu}{m}B_0} - v_0.$$

Можно также написать, что

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \left(\sqrt{1 - \frac{2\mu}{mv_0^2}B_0} - 1\right) \approx -\frac{\mu B_0}{mv_0^2}. \qquad (2)$$

Из (2) видно, что кроме B_0 и v_0 параметром нашей модели будет отношение μ/m.

Замечание 1. Для магнитотвердых материалов характерным параметром является остаточная индукция образца B_r

$$\frac{\mu}{m} = \frac{J}{\rho} = \frac{B_r}{\rho\mu_0} \qquad (3)$$

Уравнения движения намагниченного тела произвольной формы во внешнем магнитном поле получены в работах [3, 4].

Замечание 2. Форма кусков руды (далее тело) может быть произвольной, но для наших оценочных расчётов будет проще, если мы рассмотрим модель симметричного волчка.

Уравнения движения намагниченного симметричного волчка во внешнем магнитном поле, но без поля силы тяжести представлены в работах [5, 6]. Учёт поля силы тяжести дополняет гамильтониан четвёртым слагаемым

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{\alpha\vec{m}^2}{2} - \mu(\vec{\nu}, \vec{B}(\vec{x})) + mgx^3. \qquad (4)$$

Однородная сила тяжести не создает момента сил, поэтому наша система уравнений теперь имеет вид [7]:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \dfrac{1}{m}\vec{p}; \\ \dot{\vec{p}} = \mu\nu_s B_{s,r}\vec{e}_r - mg\vec{e}_3; \\ \dot{\vec{\nu}} = \alpha(\vec{m}\times\vec{\nu}); \\ \dot{\vec{m}} = \mu(\vec{\nu}\times\vec{B}). \end{cases} \qquad (5)$$

Функции Казимира остаются без изменений:

$$\begin{cases} \vec{\nu}^{\,2} = 1; \\ (\vec{\nu}, \vec{m}) = M_3 = \text{const.} \end{cases} \tag{6}$$

По существу задачи, поступательная скорость тел является более подходящей величиной, чем импульс. Более того, при использовании скорости можно исключить m (т.е. массу) из наших расчётов. Поэтому сделаем следующие замены переменных в системе уравнений (5):

$$\vec{v} = \frac{1}{m}\vec{p}; \quad \vec{n} = \frac{1}{m}\vec{m}; \tag{7}$$

и соответствующие замены параметров:

$$\bar{\alpha} = m\alpha = \frac{1}{I/m}; \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{m}. \tag{8}$$

Тогда уравнения движения принимают вид

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{v}; \\ \dot{\vec{v}} = \bar{\mu}\nu_s B_{s,r}\vec{e}_r - g\vec{e}_3; \\ \dot{\vec{\nu}} = \bar{\alpha}(\vec{n} \times \vec{\nu}); \\ \dot{\vec{n}} = \bar{\mu}(\vec{\nu} \times \vec{B}). \end{cases} \tag{9}$$

Вычисленное ранее отношение (2) теперь можно переписать в виде $\dfrac{\Delta v}{v_0} = -\dfrac{\bar{\mu}B_0}{v_0^2}$.

Замечание 3. Дополнительные упрощения модели связаны с конкретным выбором формы тела. Будем считать, что тело имеет форму шара. Момент инерции I_i шара с массой m и радиусом R, где $I_1 = I_2 = I_3 = \dfrac{2}{5}mR^2$.

Тогда рассмотрим задачу о шаре из магнетика в постоянном магнитном поле.

Обычно в курсах по электромагнитизму вначале рассматривают вспомогательную задачу о диэлектрическом шаре в постоянном электрическом поле, а затем по аналогии задачу о шаре из магнетика в постоянном магнитном поле.

Для составления математической модели нам понадобятся выражения скалярного потенциала φ_e — электрического диполя [8, (16.84), с. 128]; [9, (26), с. 161], скалярного потенциала φ_1 — внутри и φ_2 — вне диэлектрического шара [8, с. 150—151]; [9, с. 187—188], энергия шара при заданных внешних зарядах [8, (18.30), (18.35), с. 158—159]; [9, с. 188]:

$$\begin{cases} \varphi_e(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{\vec{p}_e \cdot \vec{r}}{r^3}; \\ \varphi_1(\vec{r}) = -\dfrac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}E_0 r\cos\theta = -\dfrac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}E_0 z; \\ \varphi_2(\vec{r}) = -E_0 z + \dfrac{R^3}{r^3}\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}E_0 z = -E_0 z + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_2}\dfrac{\vec{P}_e \cdot \vec{r}}{r^3}; \\ W_e = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = -\dfrac{1}{2}(\vec{P}_e \cdot \vec{E}_0), \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\vec{P}_e = V(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\vec{E}_0,$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ — объём шара,}$$

θ — угол между векторами $\vec{E}_0$ и $\vec{r}$, $\vec{E}_0$ — напряжённость внешнего электрического поля, $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ — напряжённость электрического поля внутри и вне шара; аналогично $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — диэлектрические проницаемости внутри и вне шара.

Таким образом, поле шара, вызванное смещением связанных зарядов, является полем диполя с дипольным моментом $\vec{P}_e$. Соответственно имеем скалярный потенциал φ_m — магнитного диполя [9, (18), с. 208] в форме

$$\varphi_m(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{p}_m \cdot \vec{r}}{r^3}. \tag{11}$$

Замечание 4. В (11) отсутствует μ_0, так как при заданных токах напряжённость магнитного поля не зависит от магнитной проницаемости однородной среды (см. замечание после [8, (38.27), с. 271], а φ_m — потенциал именно для напряжённости магнитного поля.

Аналогично для шара из магнетика в магнитном поле получим

$$H_1 = \frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}H_0, \tag{12}$$

где $\vec{H}_0$ — напряжённость внешнего магнитного поля; $\vec{H}_1$ — напряжённость поля внутри шара; аналогично μ_1, μ_2 — магнитные проницаемости внутри и вне шара.

Тогда по аналогии с электростатикой вне шара скалярный потенциал напряжённости магнитного поля

$$\varphi_{m2}(\vec{r}) = -H_0 z + \frac{R^3}{r^3}\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}H_0 z, \tag{13}$$

или

$$\varphi_{m2}(\vec{r}) = -H_0 z + \frac{1}{4\pi}\frac{\vec{P}_m \cdot \vec{r}}{r^3}, \tag{14}$$

где

$$\vec{P}_m = V\frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_2}\frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}\vec{H}_0. \tag{15}$$

Энергия шара при заданных внешних токах дается следующим выражением [8, (47.42), (47.43), с. 329]:

$$W_m = \frac{1}{2}\int(\mu_1 - \mu_2)\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 = \frac{1}{2}(\vec{P}_m \cdot \vec{B}_0). \tag{16}$$

Подставляя (15) в (16) получаем

$$W_m = \frac{1}{2}V\frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_2}\frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}\vec{H}_0 \cdot \vec{B}_0 = \frac{1}{2}V\frac{3}{\mu_1 + 2\mu_2}\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2}\vec{B}_0^2. \tag{17}$$

Если $\mu_2 = \mu_0$ и $\mu_1 = \mu$, то

$$W_m = \frac{1}{2}V\frac{3}{\mu + 2\mu_0}\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\vec{B}_0^2 = \frac{1}{2}V\frac{3\chi}{3 + \chi}\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_0^2. \tag{18}$$

Находим силу, действующую на шар из магнетика [8, (47.53), с. 331]:

$$\vec{F} = \nabla W_m . \tag{19}$$

Мы предполагаем, что в пределах шара поле изменяется слабо, так что для магнитного момента шара и его энергии во внешнем поле можно пользоваться формулами (11)—(19).

Так как магнитный момент шара параллелен внешнему полю (15), то магнитное поле не создает момента сил. Сила тяжести тоже не создает момента сил. Тогда вращательные степени свободы можно не рассматривать.

Таким образом, полная система уравнений движения имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{v}; \\ \dot{\vec{v}} = \kappa B_s B_{s,r} \vec{e}_r - g\vec{e}_3, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$\kappa = \frac{3\chi}{3+\chi} \frac{1}{\rho\mu_0} . \tag{21}$$

Для системы (20) можно ввести интеграл энергии. Введем кинетическую T, потенциальную U и полную E энергии:

$$T = \frac{1}{2} v^2; \quad U = -\frac{1}{2} \kappa B^2(\vec{x}) + gz; \quad E = T + U. \tag{22}$$

Отбросив на время влияние поля силы тяжести, рассмотрим одномерное движение вдоль оси x. В этом случае достаточно воспользоваться законом сохранения энергии $E = E_0$, из которого следует

$$v = v_0 \left[1 + \kappa \frac{B^2 - B_0^2}{v_0^2} \right]^{1/2}; \quad \frac{v - v_0}{v_0} = \left[1 + \kappa \frac{B^2 - B_0^2}{v_0^2} \right]^{1/2} - 1 . \tag{23}$$

Если действие силы сравнительно невелико (приращение кинетической энергии значительно меньше начальной), то

$$\frac{v - v_0}{v_0} = \frac{1}{2} \kappa \frac{B^2 - B_0^2}{v_0^2} . \tag{24}$$

Замечание 5. В [8, с. 270] находим следующее утверждение: “При комнатной температуре парамагнитная восприимчивость веществ в твердом состоянии имеет порядок $\sim 10^{-3}$, т. е. примерно на два порядка больше диамагнитной восприимчивости”.

Это означает, что и у слабоферромагнитных материалов парамагнитная восприимчивость больше диамагнитной. Кроме того, это означает, что поле размагничивания очень мало, и им можно пренебречь.

Проведём оценки для нашего случая, т.е. подставим $\chi = 3.2 \cdot 10^{-3}$, $\rho = 4 \cdot 10^3$ кг/м^3 в формулу (21) и затем в (24) в результате имеем

$$\begin{cases} \kappa \approx 8; \\ \dfrac{v - v_0}{v_0} \approx -4 \dfrac{B_0^2}{v_0^2}. \end{cases} \tag{25}$$

Приведенные выше оценки по предложенным математическим моделям показывают обоснованность “магнитного разделения налету”. Траектории намагниченных и немагнитных тел оказываются пространственно разделёнными. Величина разделения значительным образом зависит от магнитных свойств вещества, с одной стороны, и от величины поля в области бросания, с другой стороны. Величина разделения является заметной даже для слабоферромагнитных руд, но вывод о технологической применимости метода на конкретном производстве будет существенным образом зависеть от других не физических факторов. Для сильноферромагнитных руд эффект разделения может быть очень значительным. Имеется зависимость пространственного разделения также от других параметров, таких как начальная скорость, угол бросания, геометрия магнита, по которым возможна оптимизация. Постоянное магнитное поле, используемое в методе, не вредно для человека и говорит об определенной экологической чистоте. Об этом же говорит вероятное снижение уровня шума при разделении руды. В целом, снижается загрязнение окружающей среды за счет уменьшения перевозок пустой породы и снижения отходов переработки на горно-обогатительном комбинате.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Львов Е.Л. Связь между различными методами расчёта статических тяговых сил в электромагнитных системах. *Труды Москов. энергетического института*. Москва: Госэнергоиздат, 1951. Вып. 7. С. 54—86.
2. Деркач В.Г., Дацюк И.С. Электромагнитные процессы обогащения. Москва: Металлургиздат, 1947. 267 с.
3. Зуб С.С. Каноническая пуассонова структура на T*SE(3) и гамильтонова механика твердого тела. Динамика магнитного диполя во внешнем поле. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2014. № 4. С. 37—42.
4. Ляшко С.И., Зуб С.И., Зуб С.С., Ляшко Н.И., Чернявский А.Ю. Грид и облачные технологии для моделирования движения намагниченного асимметричного тела во внешнем магнитном поле. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2016. № 9. С. 29—36. doi:http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.09.029
5. Dullin H.R., Easton R.W. Stability of levitrons. *Physica D*. 1999. **126**, № 1. P. 1—17.
6. Zub S.S. Mathematical model of magnetically interacting rigid bodies. Proceedings of Science. URL: https://pos.sissa.it/070/116/pdf. (Дата звернення: 26.02.2018).
7. Zub S.S. Magnetic levitation in orbitron system. *Вопр. атом. наук. и техн.* 2014. № 5. С. 168—176.
8. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. Москва: Высш. школа, 1983. 463с.
9. Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. Москва—Ленинград: Гостехиздат, 1948. 540 с.

Поступило в редакцию 13.03.2018

REFERENCES

1. Lvov, E. L. (1951). The relationship between various methods of calculating static traction forces in electromagnetic systems. Trudy Moskovskogo energeticheskogo instituta. Moscow: Gosenergoizdat, Iss. 7, pp. 54-86 (in Russian).
2. Derkach, V. G. & Datsjuk, I. S. (1947). Electromagnetic processes of ore processing form. Moscow: Metallurgizdat (in Russian).
3. Zub, S. S. (2014). Canonical Poisson structure on T*SE(3) and the Hamiltonian mechanics of solids. Dynamics of a magnetic dipole in the external field. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 4, pp. 37-42 (in Russian).
4. Lyashko, S. I., Zub, S. I., Zub, S. S. Lyashko, N.I. & Chernyavskiy, A. Yu. (2016). Grid and cloud computing for the modeling of the motion of a magnetized assymmetric body in an external magnetic field. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 9, pp. 29-36 (in Russian). doi:http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.09.029
5. Dullin, H. R. & Easton, R. W. (1999). Stability of levitrons. Physica D. 126, No. 1, pp. 1-17.
6. Zub, S. S. (2008). Mathematical model of magnetically interacting rigid bodies. Proceedings of Science. Retrieved from https://pos.sissa.it/070/116/pdf

7. Zub, S. S. (2014). Magnetic levitation in orbitron system. Vopr. atom. nauk. i tehn. No. 5, pp. 168-176.
8. Matveev, A. N. (1983). Electricity and Magnetism. Moscow: Vyssh. shkola (in Russian).
9. Stretton, Dzh. A. (1948). Theory of electromagnetism. Moscow—Leningrad: OGIZ, Gostehizdat (in Russian).

Received 13.03.2018

С.І. Ляшко [1], С.І. Зуб [2], С.С. Зуб [1]

[1] Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
[2] ННЦ “Інститут метрології”, Харків
E-mail: stah@univ.kiev.ua

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗДІЛЕННЯ МАГНІТНОЇ РУДИ

Досліджено процес магнітної взаємодії руди з полем у польоті. Створено нові математичні моделі магнітної руди та руху парамагнітного тіла в однорідному полі сили тяжіння та під впливом магнітної сили. Одержані оцінки та математичне моделювання свідчать про розділення магнітної руди. Представлено схему розподілу магнітного поля. Визначено параметри для оптимізації.

Ключові слова: *динамічні системи, математичні моделі, оптимізація, балістика, екологія.*

S.I. Lyashko [1], S.I. Zub [2], S.S. Zub [1]

[1] Taras Shevchenko National University of Kiev
[2] NSC "Institute of Metrology", Kharkiv
E-mail: stah@univ.kiev.ua

MATHEMATICAL MODEL OF SEPARATION OF MAGNETIC ORE

The magnetic interaction of an ore with a field in the flight is investigated. New mathematical models of a magnetic ore and the motion of a paramagnetic body in the uniform field of gravity under the influence of a magnetic force are created. Our estimates and the mathematical modelling indicate the magnetic ore separation. A scheme of the magnetic field distribution is presented. Optimization parameters are defined.

Keywords: *dynamic systems, mathematical models, optimization, ballistics, ecology.*