УДК 621.313.322

В.В. Кузьмин, В.С. Шпатенко

# О ЛЕГИТИМНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФОРМУЛЫ СТОКСА ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ АМПЕРА (ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА)

***В статті виконано критичний аналіз сучасного підходу, а також запропоновано більш просту та фізично змістовну методу доказу теореми Ампера (закону повного струму).***

***В статье выполнен критический анализ современного похода и предложен более простой и физически содержательный метод доказательства теоремы Ампера (закона полного тока).***

## ВВЕДЕНИЕ

Закон полного тока (ЗПТ) – один из основных законов электромагнитного поля, нашедший широкое применение в теоретической и прикладной электротехнике. В современной литературе [1] ЗПТ формулируется так: "при обходе по замкнутому контуру линейный интеграл вектора магнитной индукции равен току, проходящему через поверхность, ограниченную контуром интегрирования, умноженному на постоянную $\mu_0$:

$$\oint \boldsymbol{B}d\boldsymbol{l} = \mu_0 I \,. \qquad (1)$$

Авторство здесь принадлежит А.М. Амперу [2, I, (70)], который предвосхитил вывод формулы Стокса. В отечественной литературе ЗПТ связывают с теоремой Ампера, в то время как за рубежом его называют "законом Ампера". У нас же под последним принято понимать дифференциальный закон Ампера взаимодействия двух элементов тока [2, I, (69)]:

$$d\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{12}^3}(d\boldsymbol{l}_2 \times (d\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{r}_{12})). \qquad (2)$$

Несмотря на широкое применение ЗПТ в практике расчетов и измерений (пояс Роговского, трансформаторы тока), универсальность его остается недоказанной, а границы применения – неочерченными.

В [3] нами отмечено, что при доказательстве ЗПТ на базе формулы Стокса в большинстве случаев нарушаются условия допустимости её применения.

Статья посвящена критическому анализу ситуации в части теоретического обоснования ЗПТ. В ней предложены более простые и физически содержательные подходы к выводам основных принципов применения ЗПТ в реальных цепях постоянного и квазистационарного токов.

## 1. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНЯЕМОСТИ ФОРМУЛЫ СТОКСА

Согласно канонам математики [4, 5] формула (теорема) Стокса

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{V}d\boldsymbol{S} = \oint_L \boldsymbol{V}d\boldsymbol{l} \qquad (3)$$

справедлива при условии

- односвязности области $\boldsymbol{S}$;
- непрерывности подынтегральных функций и их первых производных в $\boldsymbol{S}$.

Эти требования выполняются только для области $\boldsymbol{S}$, соответствующей поперечному сечению сплошного проводника с током, ибо

- вне проводника с током (на границе $L$) нарушается требование непрерывности;
- сечение полого проводника представляет многосвязную область.

Вследствие изложенного использование формулы Стокса для доказательства справедливости ЗПТ для контуров, расположенных внутри полых проводников и вне проводников с током [6] совершенно необоснованно.

Ряд авторов, отдавая себе отчет о нелегитимности такого доказательства, избрали другие пути.

Первый [7, 8] – чисто эмпирический: "опыт показывает, что независимо от формы контура интегрирования интеграл магнитной индукции вдоль него пропорционален току, охватываемому этим контуром, т.е. имеет место равенство (1)".

Второй – более сложный и доказательный используется применительно к классу одиночных контуров с током. Здесь анализ ведется либо на базе подсчета циркуляции непосредственно вектора индукции $\boldsymbol{B}$ [9], либо с помощью скалярного магнитного потенциала [1].

В [10] автор вводит понятие "магнитного напряжения" для пояснения принципа действия пояса Роговского и экспериментального обоснования ЗПТ.

## 2. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ НОВОГО ПОДХОДА

Иллюстрируемый нами в дальнейшем новый, более простой и наглядный, физически содержательный и математически непротиворечивый подход определения границ применимости ЗПТ основывается на следующих фундаментальных положениях.

2.1. Во-первых, в основу расчетов магнитного поля положен дифференциальный закон Ампера (2) в полевом варианте представления его центральной части (закон Био-Савара)

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r_{12}^3}(d\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{r}_{12}). \qquad (4)$$

2.2. Во-вторых, для магнитного поля вне проводов используется принцип потенциальности магнитного поля, когда

$$\int_A^B \boldsymbol{H}d\boldsymbol{l} = \mathrm{const} \qquad (5)$$

независимо от траектории АВ.

2.3. В-третьих, во всех без исключения случаях применяется принцип суперпозиции.

И наконец, для большей строгости и общности исследования ведутся для контуров в немагнитной среде, когда (1) предельно упрощается до

$$\oint \boldsymbol{H}d\boldsymbol{l} = I \,. \qquad (6)$$

Как будет показано ниже, применение этих принципов позволяет свести к минимуму использование законов (2) и (4) для большого класса прикладных задач.

## 3. АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ ЗПТ ДЛЯ ДЛИННЫХ ПРОВОДНИКОВ

*3.1. Провод – нить тока*

Известно [1, 6], что для длинной нити тока $jdS\boldsymbol{e}_z$ напряженность внешнего магнитного поля составляет

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{j}dS}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\varphi, \quad (7)$$

где $j$, $dS$ – плотность тока и сечение нити, $\rho$ – радиальная координата точки, в которой рассчитывается $H$.

Найдем интеграл (6) по любому замкнутому пути в районе нити тока, элемент которого в общем виде составит

$$\boldsymbol{dl} = d\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho d\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + dz\boldsymbol{e}_z\,. \quad (8)$$

Перемножая скалярно последние два вектора, получаем

$$\oint \boldsymbol{Hdl} = \frac{jdS}{2\pi}\oint\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{\rho}\rho\, d\varphi\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{jdS}{2\pi}\oint d\varphi\,. \quad (9)$$

Последнее соотношение дает (независимо от формы кривой $L$!) два варианта решения:

$\oint \boldsymbol{Hdl} = jdS$ – при обходе вокруг нити, (10.1)

$\oint \boldsymbol{Hdl} = 0$ – при обходе вне нити тока, т.е. в соответствии с ЗПТ. (10.2)

Результаты получены исключительно на основании учета реального характера внешнего магнитного поля нити тока (найденного по закону (4)) без каких-либо ссылок на формулу Стокса, т.е. без ограничений по разделу 1.

*3.2. Длинный провод реального сечения*

*3.2.1. Внешнее магнитное поле*

Рассмотрим длинный провод произвольного сечения $S$ (рис. 1) в виде многосвязной области, через которую протекают составляющие тока

$$dI = jdS\,. \quad (11)$$

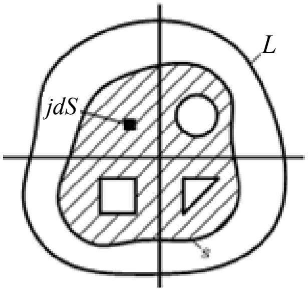


Рис. 1

Каждый из отмеченных элементов нитей тока при интегрировании по произвольному контуру $L$ дает вклад в общий интеграл в виде (10.1). Складывая действие всех элементов тока на площади $S$, получаем

$$\oint_L \boldsymbol{Hdl} = \sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{j}_n dS = \sum_{n=1}^{N} dI_n = I\,. \quad (12)$$

Следует отметить, что в последнем соотношении результат не зависит от закона изменения $j_n$ – плотность тока не обязательно должна быть постоянной. Вывод – согласно (12) ЗПТ остается справедливым и в квазистатических режимах при умеренных частотах (действие скин-эффекта не должно сказываться на результатах измерениях тока).

Во всех случаях, когда поперечное сечение проводника представляет центральносимметричную фигуру (круг, кольцо, набор колец и т. п.) внешнее магнитное поле также может быть рассчитано по ЗПТ (аналогично (7))

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\varphi\,. \quad (13)$$

Для случая некруглого поперечного сечения соотношение (13) начинает соблюдаться по мере удаления от оси привода.

Рассматривать внешнее поле реальных проводов "короткой" длины не имеет смысла по соображениям, которые будут рассмотрены ниже.

*3.2.2. Внутреннее магнитное поле*

Внутри сплошного проводника круглого поперечного сечения радиусом $r$, где соблюдаются все условия для применения формулы Стокса (3) окружная составляющая напряженности магнитного поля при $j$ = const дается согласно (6) в соответствии с ЗПТ в виде

$$H = \frac{I}{2\pi\rho} = 0{,}5\,j\rho\,, \quad (14)$$

т.е. в виде известной линейной зависимости от радиальной координаты.

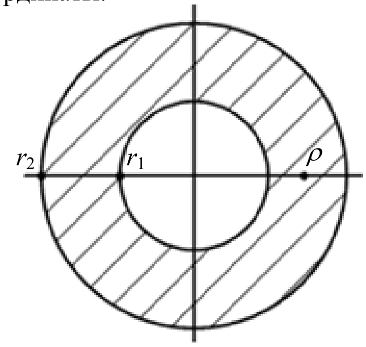


Рис. 2

Аналогичный подход может быть использован и для проводников, поперечное сечение которых обладает осевой симметрией, например, для цилиндрической трубы (рис. 2). Здесь в токоведущем слое ($r_1 < \rho < r_2$) напряженность поля согласно принципу 2.3 можно найти как разность напряженностей от действия круглого провода (радиус $r_2$), внутри него по (14) и круглого провода (радиус $r_1$) с обратным направлением тока по (13)

$$H(\rho) = 0{,}5\,j(\rho - \frac{r_1^2}{\rho}) = 0{,}5\,j\frac{\rho^2 - r_1^2}{\rho}\,, \quad (15)$$

что эквивалентно применению ЗПТ для слоя толщиной $\rho - r_1$,с током $I^* = j\pi(\rho^2 - r_1^2)$.

Та же процедура приложима к более сложным конфигурациям поперечного сечения.

Если же последнее условие не соблюдается (квадрат, эллипс и т.п.) напряженность $H$ становится функцией двух переменных ($\rho$, $\varphi$), вследствие чего применение ЗПТ теряет смысл.

## 4. ТОКОВЕДУЩИЕ КОНТУРЫ

*4.1. Круговой контур*

Использование ЗПТ применительно к контурам с током, в основном, реализуется в сфере измерений этих токов. Доказать справедливость ЗПТ в приложении к круговому контуру (рис. 3) можно двумя способами. Во-первых, используя принцип 2.3 для реального тока, как суммы "нитей тока", нетрудно показать, что при диаметре нити $d$ много меньше радиуса $R$ вблизи нее справедливо соотношение (10.1).

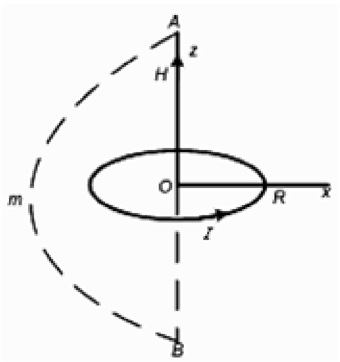


Рис. 3

Во-вторых, можно на основе принципов 2.1 и 2.2 найти напряженность поля по оси $Z$ от реального провода с током $I$

$$H(Z) = \frac{IR^2}{2\left(R^2 + Z^2\right)^{3/2}} .$$

Интегрируя последнее выражение по пути "$OAmBO$" и учитывая, что на достаточном удалении от контура напряженность поля практически равна нулю, получаем

$$\int_L \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = 2\int_0^{\infty} H(Z) dZ = I .$$

*4.2. Контур произвольной формы*

Аналогичные результаты можно столь же строго получить и для контуров прямоугольной формы.

Контур с током произвольной формы может быть, в силу принципа 2.3, представлен в виде комбинации вложенных в него (рис. 4) упомянутых элементарных, один из которых касается того участка, на котором реализуется измерение тока (заштрихован на рис. 4). Все эти внутренние контуры обтекаются одним и тем же током $I$, но путь интегрирования $L$ охватывает только ток кругового контура "1", потому такой подход доказывает универсальность ЗПТ применительно к одиночному контуру *любой формы*, в том числе и пространственной.

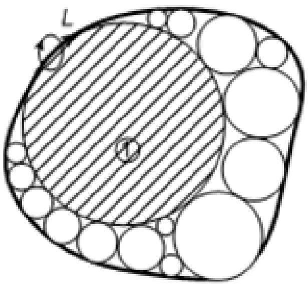


Рис. 4

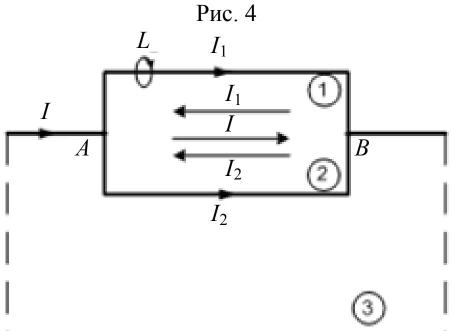


Рис. 5

*4.3. Токоведущий контур с параллельными ветвями*

В заключение следует остановиться на рассмотрении более сложного контура, содержащего ветви и узлы. Здесь также, идя по пути от простого к сложному, достаточно рассмотреть контур с двумя узлами (рис. 5) и вариантом пути обхода $L$.

Если внутри раздвоения контура между точками $AB$ условно ввести три ветви с нулевым эквивалентным током $I + I_1 + I_2 = 0$, то рассматриваемый контур получает представление в виде трех простых прямоугольных, из которых только контур "1" с током $I_1$ имеет связь с кривой $L$. Другими словами токи в ветвях $I$ и $I_2$ не оказывают влияния на результаты измерения тока $I_1$.

## ВЫВОДЫ

1. Формула Стокса справедлива только применительно к решению задачи по определению поля в сечении сплошного проводника с током.
2. Справедливость теоремы Ампера (закон полного тока) для контуров наружного обхода проводника с током основана не на формуле Стокса, а на реальных закономерностях изменения поля в этих зонах.
3. Показано, что ЗПТ справедлив для контуров с током любой формы в предположении, что эти токи могут быть представлены в виде суммы нитей тока, для которых справедлив закон непрерывности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Нетушил А.В., Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Теория электро-магнитного поля. – М. – Л. ГЭН, 1956.
2. Физическая энциклопедия, тт. 1-5. – М., 1988-1998.
3. Кузьмин В.В. О математических некорректностях в теоретических основах электротехники. // Электротехника и электромеханика. – 2006. – № 2.
4. Бронштейн Н.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1981. – 720 с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973. – 831 с.
6. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976.
7. Нейман Л.Г., Калантаров П.Л. Теоретические основы электротехники. Ч.1. – М.-Л.: ГЭИ, 1959. – 296 с.
8. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т. 1. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 516 с.
9. Сукачев А.Н., Теоретические основы электротехники. Ч. 1 Физические основы, опт. – Харьков, 1959. – 460 с.
10. Поль Р.В. Учение об электричестве. – М.: Физматгиз, 1962. – 506 с.



*Поступила 20.02.2010*



*Кузьмин В.В., д.т.н., проф.*
*Шпатенко В.С.*
НИИ завода "Электротяжмаш"
Украина, 61055, Харьков, пр-т Московский, 299
тел. (0572) 95-66-81, e-mail:kuzmin@spetm.com.ua

*V.V. Kuzmin, V.S. Shpatenko*


**About legitimity of the use of formula Stocs for proof of Ampere's theorem (law of complete current).**


On the buse of modern approach critical analysis the article demonstrate new, more simple and physically consistent method of Ampere's theorem (Full Current Law) verification proof.



*Key words* – **Ampere's theorem, new method of proof.**