

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА В СВЯЗИ С РЕШЕНИЕМ ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЕ

Реуцкий С.Ю., к.т.н., Ассуиров Д.А., к.т.н.
 Научно-технический центр магнетизма технических объектов НАН Украины
 Украина, 61106, Харьков, ул. Индустриальная, 19
 тел./факс: (0572) 99-21-62, E-mail: magnetizm@kharkov.com

Викладено чисельний метод рішення зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа, що заснований на методі фундаментальних рішень, і проведено його порівняння з методом граничних інтегральних рівнянь. Запропонований метод рішення задачі Неймана дозволяє суттєво підвищити точність і швидкість перетворення первинної інформації о зовнішнім магнітним полі технічних об'єктів при здійсненні автоматичного управління цим полем у замкнутій системі.

Изложен численный метод решения внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа, основанный на методе фундаментальных решений, и проведено его сравнение с методом граничных интегральных уравнений. Предложенный метод решения задачи Неймана позволяет существенно повысить точность и скорость преобразования первичной информации о внешнем магнитном поле технических объектов при осуществлении автоматического управления этим полем в замкнутой системе.

ВВЕДЕНИЕ

Магнитное поле (МП) является неотъемлемой физической составляющей многих технических объектов (ТО), конструктивные элементы которых обладают магнитоактивными свойствами и в составе которых имеется электротехническое оборудование различного функционального назначения. Для некоторых ТО, таких, например, как суда для геофизических исследований, наличие собственного внешнего МП (то есть поля вне наружной поверхности ТО) является нежелательным фактором и, поэтому, его величину стремятся уменьшить до минимального значения [1]. Эффективным способом снижения внешнего МП ТО является его компенсация с помощью специальных обмоток с регулируемым током, размещенных на поверхности ТО, управление током которых осуществляется автоматически в функции отклонения скалярного потенциала МП в отдельных точках поверхности ТО от нулевого значения [2]. Такое управление реализуется в замкнутой системе с использованием данных о параметрах МП, измеренных на поверхности ТО.

Поскольку скалярный потенциал является расчетной характеристикой МП и не может быть измерен непосредственно, для его определения используют физически измеряемую характеристику МП – напряженность. При этом исходят из существования известной зависимости между скалярным потенциалом U и вектором напряженности \vec{H} МП

$$\vec{H} = -\text{grad}U. \quad (1)$$

Согласно (1), по измеренной на поверхности ТО S нормальной составляющей H_n вектора напряженности МП может быть определена нормальная производная скалярного потенциала на этой поверхности

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = H_n.$$

Задача определения скалярного потенциала поля вне замкнутой поверхности S по его нормальным

производным на этой поверхности относится к краевым задачам уравнений математической физики и в теории потенциала известна как внешняя задача Неймана для уравнения Лапласа. Ее решение в общем случае произвольной поверхности S возможно только численными методами с использованием вычислительных устройств.

В настоящее время существуют различные методы численного решения краевых задач теории потенциала, отличающиеся как математическими методами, лежащими в основе алгоритма нахождения решения задачи, так и эффективностью, оцениваемой по критериям точности и быстродействия [3, 4]. Как правило, эти методы создавались для решения прикладных задач, связанных с разработкой различных технических устройств и систем, поэтому требования к их эффективности формировались в первую очередь исходя из обеспечения заданной точности расчета при приемлемом времени счета от единиц до десятков минут. В случае необходимости точность расчета всегда можно было увеличить при соответствующем увеличении времени счета.

При осуществлении управления внешним МП ТО с использованием преобразования измеренных значений напряженности МП в скалярный магнитный потенциал наряду с точностью преобразования существенную роль играет и время, затрачиваемое на это преобразование, поскольку процесс управления протекает в реальном масштабе времени. В этой связи актуальной проблемой является создание новых эффективных численных методов решения внешней задачи Неймана, обеспечивающих достижение высокой точности решения при минимальных временных затратах.

Целью работы является сравнение эффективности двух численных методов решения внешней задачи Неймана, один из которых – метод фундаментальных решений – разработан с учетом применения к решению задачи управления внешним МП ТО.

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (МГИУ)

МГИУ можно отнести к традиционной методике, применяемой к численному решению задач теории потенциала начиная с 60-х годов.

Пусть D есть некоторая неограниченная область, дополнение которой $R^3 \setminus D$ есть ограниченная односвязная область. Требуется найти функцию $u \in C^2(\bar{D})$, которая удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 u(P) = 0, \quad P \in \bar{D}, \quad (2)$$

граничному условию Неймана

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} = f(P), \quad P \in S \quad (3)$$

и условиям роста на бесконечности

$$|u(P)| = O(|P|^{-1}), \quad |\nabla u(P)| = O(|P|^{-2}), \quad (4)$$

если $|P| \rightarrow \infty$.

Здесь n_P есть внешняя нормаль к поверхности S .

Используя формулу Грина, задачу (2) – (4) можно представить в виде интегрального уравнения

$$4\pi u(P) = \int_S f(Q) \frac{1}{|P-Q|} dS_Q - \int_S u(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left[\frac{1}{|P-Q|} \right] dS_Q, \quad P \in D. \quad (5)$$

Устремляя $P \rightarrow S$ мы получаем интегральное уравнение

$$2\pi u(P) + \int_S u(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left[\frac{1}{|P-Q|} \right] dS_Q + [2\pi - \Omega(P)]u(P) = \int_S f(Q) \frac{1}{|P-Q|} dS_Q, \quad P \in S, \quad (6)$$

где n_Q – вектор внешней нормали в точке Q , лежащей на поверхности S ; $\Omega(P)$ – внешний телесный угол поверхности в точке P .

Если P находится на гладкой поверхности, то $\Omega(P) = 2\pi$ и уравнение (6) упрощается

$$2\pi u(P) + \int_S u(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left[\frac{1}{|P-Q|} \right] dS_Q = \int_S f(Q) \frac{1}{|P-Q|} dS_Q, \quad P \in S. \quad (7)$$

В дальнейшем мы рассматриваем случай гладкой поверхности S .

Подобного рода интегральные уравнения хорошо изучены как для гладких, так и для кусочно-гладких поверхностей. Алгоритм решения включает в себя: 1) однородную триангуляцию поверхности S ; 2) локальную аппроксимацию кусочно-гладкими полиномами внутри каждого поверхностного треугольника; 3) коллокацию решения в вершинах треугольников; 4) вычисление интегралов в пределах каждого поверхностного треугольника с использованием квадратуры Гаусса; 5) решение результирующей системы линейных уравнений методом исключения Гаусса. Более

подробная информация о методе граничных интегральных уравнений представлена в работах [5, 6].

Ниже приведены результаты применения указанного алгоритма для случая, когда область решения D является внешностью эллипсоида

$$S = \left\{ x, y, z \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}, \quad (8)$$

у которого $a = 1$, $b = 1.5$, $c = 2$. В качестве источников поля использована система из четырех диполей, потенциал которых определяется точным решением

$$u_{ex}(x, y, z) = \sum_{j=1}^4 d_j \frac{\langle \bar{r} - \bar{\zeta}_j, \bar{e}_j \rangle}{|\bar{r} - \bar{\zeta}_j|^3}. \quad (9)$$

где $\bar{r} = (x, y, z)$ – точка наблюдения; $\bar{\zeta}_j$ – координата расположения дипольного источника; \bar{e}_j – вектор направления диполя; d_j – величина дипольного момента.

В расчете использованы следующие параметры: $d_j = 1$, $\zeta_1 = (0.1, 0, 0)$, $\zeta_2 = (-0.1, 0, 0)$, $\zeta_3 = (0, 0, 0.1)$, $\zeta_4 = (0, 0, -0.1)$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (-1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, $e_4 = (0, 0, -1)$.

В левой части табл. 1 помещена среднеквадратичная ошибка решения

$$e_{sq} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [u(\bar{x}_j) - u_{ex}(\bar{x}_j)]^2}. \quad (10)$$

Здесь \bar{x}_j – координаты точек, в которых вычисляется решение. Эти координаты равномерно расположены на поверхности эллипсоида и получаются в результате применения алгоритма триангуляции. В вычислительном процессе также измерялось время использования центрального процессора – T_{CPU} .

Таблица 1

МГИУ			МФР			
N	e_{sq}	T_{CPU}	N	M	e_{sq}	T_{CPU}
18	$4 \cdot 10^{-3}$	1.02	18	18	$3 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}
66	$6 \cdot 10^{-4}$	14.9	66	66	$7 \cdot 10^{-8}$	0.05
162	$1 \cdot 10^{-4}$	57	66	162	$3 \cdot 10^{-9}$	0.08
258	$9 \cdot 10^{-5}$	114	152	258	$4 \cdot 10^{-11}$	0.32
642	$1 \cdot 10^{-5}$	301	268	642	$9 \cdot 10^{-15}$	1.5

Триангуляция поверхности S в процессе вычислений.

Задается начальная триангуляция. Для эллипсоида она производится сечением его поверхности тремя взаимно перпендикулярными плоскостями на восемь треугольных элементов Δ_k , один из которых изображен на рис. 1 ($v_{k,j}$ – узлы элемента Δ_k). Для увеличения количества элементов разбиения и повышения точности аппроксимации середины сторон внутри каждого элемента Δ_k соединяются, как это показано на рис. 2. В результате получается новое разбиение поверхности, содержащее вчетверо больше элементов. Для уточнения решения эту операцию можно повторять несколько раз.

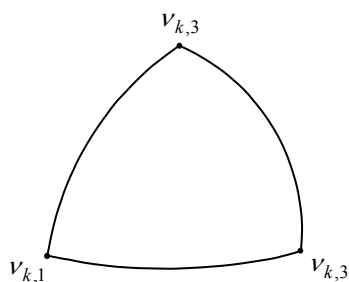


Рис. 1

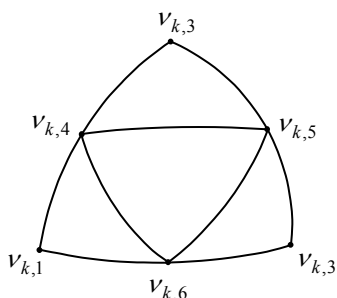


Рис. 2

Параметризация элемента Δ_k для квадратичной интерполяции.

Рассматриваемый алгоритм решения граничных интегральных уравнений основан на использовании локальной кусочно-полиномиальной аппроксимации решения внутри каждого элемента Δ_k . Используются аппроксимирующие функции, которые внутри каждого элемента Δ_k являются квадратичными полиномами по каждой из локальных координат. Вводим базовый элемент интерполяции, который является общим для всех элементов Δ_k :

$$\sigma = \{(s, t) \mid 0 \leq s, t, s + t \leq 1\}.$$

Каждый элемент Δ_k представляется, как результат отображения этого базового элемента при помощи некоторого преобразования $m_k: \sigma \rightarrow \Delta_k$.

Вводим квадратичные базисные функции $\{l_j\}$:

$$l_1(s, t) = u(2u - 1), \quad l_2(s, t) = t(2t - 1), \quad l_3(s, t) = s(2s - 1),$$

$$l_4(s, t) = 4tu, \quad l_5(s, t) = 4st, \quad l_6(s, t) = 4su,$$

где $u = 1 - t - s$.

Вводим точки, принадлежащие базисному элементу, которые при отображении $m_k: \sigma \rightarrow \Delta_k$ переходят в узлы $v_{k,j}$:

$$q_1 = (0, 0), \quad q_2 = (0, 1), \quad q_3 = (1, 0), \quad q_4 = (0, 0.5),$$

$$q_5 = (0.5, 0.5), \quad q_6 = (0.5, 0).$$

Легко показать, что

$$l_j(q_i) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, 6. \quad (11)$$

Соответствие точек при отображении $m_k: \sigma \rightarrow \Delta_k$ указано на рис. 3. Тогда, квадратичную аппроксимацию решения внутри элемента Δ_k запишем в виде

$$u(P) \approx \sum_{j=1}^6 u(v_{k,j}) l_j(s, t). \quad (12)$$

Из (11) следует, что квадратичная аппроксимация (12) совпадает с точными значениями аппроксимируемой функции в узловых точках базисного элемента σ .

Для приближенного решения интегрального уравнения запишем его для $P_i \in S$

$$2\pi u(P_i) + \sum_{k=1}^N \int_{\Delta_k} u(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left[\frac{1}{|P_i - Q|} \right] dS_Q =$$

$$= \sum_{k=1}^N \int_{\Delta_k} f(Q) \frac{1}{|P_i - Q|} dS_Q, \quad P_i \in S. \quad (13)$$

Здесь точка P_i пробегает узловые точки всех триангуляционных элементов Δ_k , $k = 1, \dots, N$.

Внутри каждого элемента Δ_k аппроксимируем решение с помощью (12) и заменяем интегрирование по Δ_k интегрированием по базовому элементу σ

$$\int_{\Delta_k} F(Q) dS_Q = \int_{\sigma} F(m_k(s, t)) J(s, t) d\sigma,$$

где $J(s, t)$ – якобиан преобразования $m_k: \sigma \rightarrow \Delta_k$.

Следует отметить, что при использовании локальных координат s, t численное интегрирование всегда производится по поверхности стандартного треугольника, изображенного в левой части рис. 3. Когда точка наблюдения находится за пределами области интегрирования, интеграл является неособым и может быть вычислен стандартными методами. В сингулярном случае приходится использовать квадратуры Гаусса.

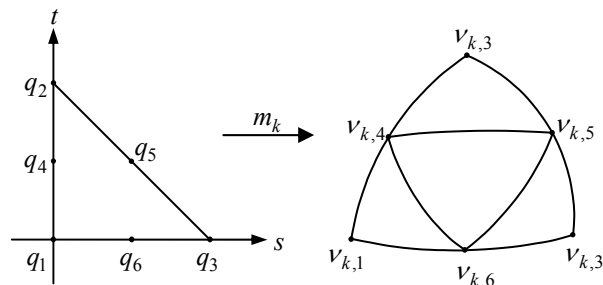


Рис. 3

В результате уравнение (13) аппроксимируем системой линейных уравнений:

$$2\pi u(P_i) + \sum_{k=1}^N A_{k,i} u(P_k) = F_i. \quad (14)$$

Здесь точки P_k соответствуют координатам узлов, а коэффициенты матрицы $A_{k,i}$ зависят от используемой квадратуры интегрирования.

Система уравнений (14) решается численно с использованием стандартной процедуры гауссового исключения.

МЕТОД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ (МФР)

МФР принадлежит к группе так называемых "бессеточных" численных методов решения уравнений с частными производными.

Следует отметить, что в последние три десятилетия

тия в области инженерных и научных расчетов доминировали метод конечных элементов (МКЭ) и метод конечных разностей (МКР). Оба этих метода используют сложные и весьма затратные алгоритмы разбиения области решения. В частности, генерация сетки является главным препятствием при решении трехмерных задач в нерегулярных областях.

С вычислительной точки зрения крайне желательно решать краевые задачи, используя только дискретизацию границы области решения. В результате интенсивных исследований в этой области возник метод граничных элементов (МГЭ) как альтернативный подход к решению уравнений с частными производными. В настоящее время он рассматривается как один из основных методов в области инженерных и научных расчетов. Одной из версий МГЭ является метод граничных интегральных уравнений, рассмотренный выше.

Несмотря на тот факт, что МГЭ является граничным методом, разбиение на поверхности общего вида является нетривиальной задачей. Кроме того, он включает в себя достаточно сложный алгоритм интегрирования сингулярных функций. Подобная ситуация возникает при вычислении интегралов, входящих в (13), когда точка коллокации P_i является одним из узлов элемента Δ_k . В этом случае интегрирование производится с аналитическим выделением сингулярности интегрируемой функции. Детальное описание этого алгоритма изложено в работах [5, 6].

В последние десятилетия большие усилия были направлены на разработку бессеточных (meshless) методов, которые не требуют дискретизации ни области решения, ни ее границы. МФР принадлежит к этой группе и является эффективным средством решения однородных эллиптических граничных задач. Первоначально этот метод был предложен В.Д. Купрадзе [7, 8]. Современное состояние развития МФР изложено в [9, 10]. Метод не требует дискретизации ни области решения, ни ее границы. Он не содержит численного интегрирования и, таким образом, трудности граничных методов, связанные с интегрированием сингулярных функций также исключены. При решении краевых задач с гладкими краевыми условиями МФР имеет спектральную сходимость.

Основная идея МФР состоит в аппроксимации решения конечным рядом фундаментальных решений рассматриваемого уравнения. Точнее, пусть рассматривается решение следующей краевой задачи:

$$L[u(x)] = 0, \quad x \in D, \quad (15)$$

$$B[u(x)] = g(x), \quad x \in \partial D, \quad (16)$$

где $L[\dots]$ – линейный дифференциальный оператор с известным фундаментальным решением; $D \in R^d$, $d = 2, 3$ – ограниченная непустая связная область с достаточно гладкой границей ∂D ; $B[\dots]$ оператор краевого условия и $g(x)$ известная гладкая функция.

Согласно МФР приближенное решение задачи ищем в виде линейной комбинации

$$u_N(x, \bar{q}) = \sum_{j=1}^N q_j \Psi(x - \xi_j), \quad (17)$$

где функция $\Psi(x - \xi)$ удовлетворяет уравнению

$$L[\Psi(x - \xi)] = \delta(x - \xi).$$

Особые точки ξ_j , $j = 1, \dots, N$ расположены за пределами области решения.

Таким образом, линейная комбинация (16) удовлетворяет дифференциальному уравнению (15) при любом выборе q_j . Коэффициенты q_j мы находим из краевого условия (16). Это можно сделать, записав (16) в виде условия минимума квадратичного функционала

$$\min_{\bar{q}} \int_{\partial D} [B[u_N(x, \bar{q})] - g(x)]^2 dl. \quad (18)$$

Аппроксимируя интеграл конечной суммой, получим

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} [B[u_N(x, \bar{q})] - g(x)]^2 dl &= \sum_{i=1}^M \int_{l_i} [B[u_N(x, \bar{q})] - g(x)]^2 dl \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^M [B[u_N(x_i, \bar{q})] - g(x_i)]^2 \Delta l_i. \end{aligned}$$

Если длины участков разбиения границы области взять одинаковыми $\Delta l_i = \Delta l$, то для определения неизвестных коэффициентов q_j получаем задачу о наименьших квадратах

$$\begin{aligned} \min_{\bar{q}} \sum_{i=1}^M [B[u_N(x_i, \bar{q})] - g(x_i)]^2 = \\ = \min_{\bar{q}} \sum_{i=1}^M \left[\sum_{j=1}^N q_j B[\Psi(x_i - \xi_j)] - g(x_i) \right]^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $x_i \in l_i$.

Этот же алгоритм определения q_j получается, если записать условия коллокации граничного условия (13) в M точках x_i на границе области решения

$$\sum_{j=1}^N q_j B[\Psi(x_i - \xi_j)] = g(x_i), \quad x_i \in \partial D, \quad i = 1, \dots, M. \quad (20)$$

Если взять $M > N$ и решать переопределенную линейную систему (20) методом наименьших квадратов, то получим алгоритм, совпадающий с (19).

Применим МФР для решения внешней задачи Неймана (2) – (4). С точностью до несущественной постоянной, фундаментальное решение уравнения Лапласа равно

$$\Psi(x - \xi) = \frac{1}{|x - \xi|}.$$

Решение ищем в виде (17). Для определения неизвестных коэффициентов используем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^N q_j \frac{\partial}{\partial n(x)} \left[\frac{1}{|x_i - \xi_j|} \right] = f(x_i), \quad x_i \in \partial D, \quad i = 1, \dots, M.$$

Задача решалась для того же эллипсоида (8) и дипольного источника поля (9). Особые точки ξ_j расположены на сфере радиуса $R = 0,2$. Таким образом, все источники поля попадают внутрь этой сферы. Точки коллокации x_i мы выбираем в узлах триангуляционного разбиения эллипсоида. Переопределенная система уравнений решалась с использованием алгоритма DLQRRV из библиотеки Microsoft IMSL Libraries. Результаты представлены в правой части табл. 1.

ВЫВОДЫ

Приведенные данные демонстрируют значительное преимущество МФР по сравнению с методом граничных интегральных уравнений. При этом следует отметить, что МГИУ значительно превосходит по эффективности объемные вычислительные методы МКЭ и МКР, поскольку работает только с граничными данными. Кроме того, использование МГИУ позволяет получить решение только в фиксированных точках – узлах Δ_k триангуляционного разбиения поверхности. Для получения решения в других точках необходимо использовать интерполирование или интегральное представление, подобное (5). Это же относится и к объемным методам. В тоже время, после решения задачи с использованием МФР мы получаем аналитическое выражение (17) с известными коэффициентами q_j , которое легко может быть вычислено в любой точке области решения. Это решение можно аналитически продифференцировать, численно проинтегрировать или получить другие необходимые характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Проблемы электромагнитной совместимости и расчетного уровня электромагнитных помех: Симпозиум, Санкт-Петербург, 1993 // Электричество.-1994. -№ 1. -С. 78.
- [2] Розов В.Ю., Ассуиров Д.А. Принципы построения систем автоматического управления внешним магнитным полем технических объектов. Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут". – Харків, НТУ "ХПІ", 2005, № 45.- С. 101-102.
- [3] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1974. – 832 с.
- [4] Курбатов П.А., Аринчин С.А. Численный расчет электромагнитных полей. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 168 с.
- [5] K. Atkinson. The Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [6] K. Atkinson. A survey of boundary integral equation methods for the numerical solution of Laplace's equation in three dimensions, in Numerical Solution of Integral Equations, ed. by M. Golberg, Plenum Press, New York, 1990, pp. 1 - 34.
- [7] В.Д. Купрадзе. О приближенном решении задач математической физики. Успехи математических наук, т. 22, № 2, 1967, С. 59–107.
- [8] В.Д. Купрадзе, М.А. Алексидзе. Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных задач. Журнал вычислительной мате-

матики и математической физики, т. 4, № 4, 1964, С. 683–715.

- [9] G. Fairweather and A. Karageorghis. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. Advances in Comp. Math. 9, pp. 69 - 95, 1998.
- [10] GB : M.A. Golberg and C.S. Chen. The Method of Fundamental Solutions for Potential, Helmholtz and Diffusion Problems, in: M.A. Golberg (Ed.), Boundary Inetgral Methods - Numerical and Mathematical Aspects, Computational Mechanics Publications, 1998, pp. 103-176.

Поступила 04.07.2007