

## ВИХРЕВЫЕ ТОКИ В ПЛОСКИХ ЛИСТОВЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЗАГОТОВКАХ

Батыгин Ю.В., д.т.н., проф.

Национальный технический университет Харьковский политехнический институт"  
Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21, НТУ "ХПИ", кафедра "Высшая математика".  
тел. (057) 707-60-87, email: batygin@kpi.kharkov.ua

Чаплыгин Е.А.,

Харьковский Национальный автомобильно-дорожный университет  
Украина, 61002, Харьков, ул. Петровского, 25, "Автомобильная электроника"  
тел. (057) 700-38-52, email: chaplygin\_e\_a@mail.ru

*Проведено теоретичний у одновиткових індукторних системах для магніто-імпульсної обробки листових металів з кінцевою удільною електропровідністю. Дійсність отриманих результатів підтверджується граничними переходами. Встановлено, що зсув за фазою між індуктованим сигналом та струмом у індукторі належить до діапазону  $\Delta\varphi \in [0.5\pi, \pi]$ .*

*Проведен теоретичний в одновиткових індукторних системах для магнітно-імпульсної обробки листових металів з кінцевою удільною електропровідністю. Достовірність отриманих результатів підтверджується граничними переходами. Встановлено, що сдвиг по фазі между індуктованим сигналом и током в індукторе приналежить до діапазону  $\Delta\varphi \in [0.5\pi, \pi]$ .*

Практическое использование энергии импульсных электромагнитных полей предоставляет уникальные возможности для создания новых современных технологий.

Отличительной особенностью которых, является отсутствие непосредственного контакта с обрабатываемым материалом. В этом нет необходимости, поскольку трансформация энергии поля в механическую работу происходит собственно в материале заготовки, подлежащей обработке. Практический смысл этой особенности проявляется, например, в сравнении механической штамповки с электромагнитной. Так, для реализации последней на современном уровне импульсной техники не требуется пуансон. Более того, в недалеком будущем такие технологии позволят обрабатывать материалы исключительно силами поля заданной пространственно-временной геометрии. В электромагнитной штамповке исчезнет и матрица, форму которой требуется придать обрабатываемой заготовке [1, 2]. Как известно, производственной практикой наиболее апробированы магнитно-импульсные методы обработки массивных металлических объектов с высоким значением удельной электропроводности. Современные технологии требуют расширения и включения металлов с низкой проводимостью в номенклатуру материалов, подлежащих обработке силами магнитного давления. Процессы взаимодействия поля с тонкостенными заготовками из плохих проводников обладают целым рядом особенностей. Среди них не только диффузия поля, но и появление интенсивной нормальной компоненты магнитной напряженности, существенно искажающей направления действующих пондермоторных сил и картину возможных деформаций в целом [1, 3].

В экспериментах с низкочастотными (~2.5 кГц) одновитковыми индукторными системами было зафиксировано не простое притяжение тонкого метал-

лического листа к рабочей поверхности витка, а образование вмятины сферической формы на поверхности плоской заготовки [4].

В известной мере, это противоречит практике традиционной магнитно-импульсной обработки металлов, когда силовое воздействие на заготовку ведет к отталкиванию металла от индуктора. Определение вектора сил при этом не вызывает сомнений: его амплитуда пропорциональна разности квадратов касательных компонент напряженности магнитного поля на граничных поверхностях обрабатываемого металла, направление – в сторону ее меньшего значения. Силовое взаимодействие поля с проводящей средой обусловлено появлением сил Лоренца. Их направление устанавливается взаимным расположением вектора магнитной напряженности и вектора тока, возбуждаемого в металле обрабатываемой заготовки [1, 3]. В этой связи вопрос о вихревых токах вызывает не только научный, но и практический интерес.

Следует отметить, что близкие электродинамические задачи рассматривались авторами [4, 6], а с привлечением физической идеализации "прозрачных" проводников возбуждение индуцированных токов описано в работе [5]. Выводы исследований требуют обобщений для случаев, реальных в практике магнитно-импульсной обработки металлов.

Цель настоящей работы – теоретический анализ процессов возбуждения вихревых токов, индуцированных полем плоского одновиткового соленоида, в плоских листовых заготовках из металлов с конечной величиной удельной электропроводности и определение соотношений между временными характеристиками индуцированного тока и тока индуктора.

Для проведения расчетов и анализа процессов возбуждения вихревых токов рассмотрим индукторную систему из одновиткового соленоида и плоской листовой металлической заготовки (рис.1).

Принятая физико-математическая модель соответствует реальной конструкции индукторной системы, первоначально использованной в экспериментах взаимодействия низкочастотных магнитных полей со стальными заготовками.

При решении задачи примем следующие допущения.

- Приемлема цилиндрическая система координат, связанная с рассматриваемой моделью индукторной системы.
- Виток индуктора достаточно тонок и "прозрачен" для действующих полей ( $\Delta \rightarrow 0$ ), так что его металл не оказывает никакого влияния на протекающие электромагнитные процессы.
- Система обладает аксиальной симметрией, так что  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$  ( $\varphi$  - полярный угол).
- Поперечные размеры индукторной системы настолько велики, что в рамках поставленной задачи их можно считать бесконечными.
- В индукторе течёт ток  $I(t)$ , временные параметры которого таковы, что в расчётах вполне приемлемо известное условие квазистационарности происходящих электромагнитных процессов, так что  $\frac{\omega}{c} \cdot \ell \ll 1$  (здесь  $\omega$  - циклическая частота процесса,  $c$  - скорость света в вакууме,  $\ell$  - наибольший характерный геометрический размер системы, в данном случае - это поперечный размер,  $\ell \gg 2R_2$ ).
- Листовая заготовка является достаточно тонкостенной с геометрической -  $\frac{d}{R_{1,2}} \ll 1$  и электродинамической -  $\omega \cdot \tau \ll 1$  точек зрения (в последнем неравенстве:  $\tau = \mu_0 \cdot \gamma \cdot d^2$ ,  $\mu_0$  - магнитная проницаемость вакуума,  $\gamma$  - удельная электропроводность металла заготовки,  $d$  - её толщина).

Уравнения Максвелла для возбуждаемых составляющих вектора электромагнитного поля ( $E_\varphi \neq 0, H_{r,z} \neq 0$ ), преобразованных по Лапласу с учётом нулевых начальных условий, имеют вид [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_r(p, r, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_r(p, r, z)}{\partial r} = j_\varphi(p, r, z); & (1) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi(p, r, z)) = -\mu_0 \cdot p \cdot H_z(p, r, z); & (2) \\ \frac{\partial E_\varphi(p, r, z)}{\partial z} = \mu_0 \cdot p \cdot H_r(p, r, z), & (3) \end{cases}$$

где  $p$  - параметр преобразования Лапласа;  $j_\varphi(t, r, z)$  - плотность стороннего тока в индукторе,  $E_\varphi(p, r, z) = L\{E_\varphi(t, r, z)\}$ ;

$$H_{r,z}(p, r, z) = L\{H_{r,z}(t, r, z)\}$$

$$j_\varphi(p, r, z) = j(p) \cdot f(r) \cdot \delta(z+h); j(p) = \frac{I(p)}{R_2 - R_1};$$

$f(r)$  - функция радиального распределения тока в витке индуктора;  $\delta(z+h)$  - дельта функция Дирака.

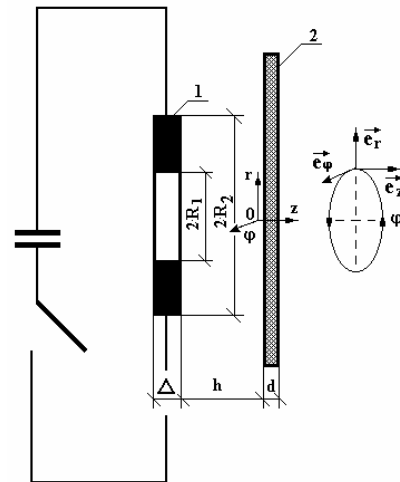


Рис. 1. Схема индукторной системы с одновитковым соленоидом (1) и плоской листовой заготовкой (2),  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$  - направляющие орты цилиндрической системы координат

Интегрирование (1) - (3) проведём для каждой из условно выделенных областей:

- полупространство вне листовой заготовки со стороны индуктора -  $z \in (-\infty, 0]$ ;
- область металла листовой заготовки -  $z \in [0, d]$ ;
- свободное полупространство с внешней стороны листовой заготовки -  $z \in [d, \infty)$ .

В рамках принятых допущений уравнения для азимутальной компоненты напряжённости электрического поля  $E_\varphi(p, r, z)$  в каждой из выделенных областей получим из дифференциальной системы (1) - (3).

Вне металла листовой заготовки со стороны индуктора ( $z \in (-\infty, 0]$ ) находим, что

$$\frac{\partial^2 E_\varphi(p, r, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi(p, r, z)) \right) \approx p \mu_0 j_\varphi(p, r, z). \quad (4)$$

В металле листовой заготовки ( $z \in [0, d]$ ) имеем:

$$\frac{\partial^2 E_\varphi(p, r, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi(p, r, z)) \right) - p \gamma \mu_0 E_\varphi(p, r, z) = 0 \quad (5)$$

Вне металла листовой заготовки ( $z \in [d, \infty)$ ) записываем, что:

$$\frac{\partial^2 E_\varphi(p, r, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi(p, r, z)) \right) \approx 0 \quad (6)$$

Условию ограниченности радиального распределения  $E_\varphi(p, r, z)$  из уравнений (4) - (6) при  $r=0$  и  $r=\infty$  удовлетворяет интегральное преобразование Фурье-Бесселя [6]:

$$E_{\varphi}(p, r, z) = \int_0^{\infty} E_{\varphi}(p, \lambda, z) \cdot J_1(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (7)$$

где  $J_1(\lambda r)$  – функция Бесселя первого порядка.

В соответствии с (7) уравнения (4) – (6) приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка:

а) вне металла листовой заготовки со стороны индуктора,  $z \in (-\infty, 0]$ :

$$\frac{d^2 E_{\varphi}(p, \lambda, z)}{dz^2} - \lambda^2 \cdot E_{\varphi}(p, \lambda, z) = K(p, \lambda) \cdot \delta(z+h), \quad (8)$$

где  $K(p, \lambda) = \mu_0 \cdot j(p) \cdot f(\lambda)$ ;  $f(\lambda) = \int_0^{\infty} f(r) \cdot J_1(\lambda \cdot r) r dr$ ;

б) в металле листовой заготовки,  $z \in [0, d]$ :

$$\frac{d^2 E_{\varphi}(p, \lambda, z)}{dz^2} - (\lambda^2 + p \cdot \mu_0 \cdot \lambda) \cdot E_{\varphi}(p, \lambda, z) = 0, \quad (9)$$

в) вне металла листовой заготовки,  $z \in [d, \infty)$ :

$$\frac{d^2 E_{\varphi}(p, \lambda, z)}{dz^2} - \lambda^2 \cdot E_{\varphi}(p, \lambda, z) = 0. \quad (10)$$

Общие интегралы уравнений (8), (9) и (10) для выделенных областей имеют вид:

а) в полупространстве вне листовой заготовки со стороны витка индуктора ( $z \in (-\infty, 0]$ ) условию ограниченности при  $z \rightarrow \infty$  удовлетворяет функция:

$$E_{\varphi}^{(1)}(p, \lambda, z) = C(p, \lambda) e^{\lambda z} + \frac{K(p, \lambda)}{\lambda} \eta(z+h) sh(z+h), \quad (11)$$

где  $C(p, \lambda)$  – произвольная постоянная интегрирования;

б) в металле листовой заготовки ( $z \in [0, d]$ ):

$$E_{\varphi}^{(2)}(p, \lambda, z) = D_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot z} + D_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot z}, \quad (12)$$

где  $D_1(p, \lambda), D_2(p, \lambda)$  произвольные постоянные интегрирования,  $q(p, \lambda) = \sqrt{\lambda^2 + p \mu_0 \lambda}$ ;

в) в пространстве за листовой заготовкой ( $z \in [d, \infty)$ ) условию ограниченности при  $z \rightarrow \infty$  удовлетворяет функция:

$$E_{\varphi}^{(3)}(p, \lambda, z) = B(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda z}, \quad (13)$$

где  $B(p, \lambda)$  – произвольная постоянная интегрирования.

Из уравнения (3) с помощью (11), (12) и (13) находим тангенциальную компоненту напряжённости магнитного поля:

а)  $z \in (-\infty, 0]$ :

$$H_r^{(1)}(p, \lambda, z) = \frac{\lambda}{p \mu_0} (C(p, \lambda) \cdot e^{\lambda z} + \frac{K(p, \lambda)}{\lambda} \cdot \eta(z+h) \cdot ch(z+h)), \quad (14)$$

б)  $z \in [0, d]$ :

$$H_{\varphi}^{(2)}(p, \lambda, z) = \frac{q(p, \lambda)}{p \mu_0} (D_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot z} - D_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot z}), \quad (15)$$

в)  $z \in [d, \infty)$ :

$$H_{\varphi}^{(3)}(p, \lambda, z) = -\frac{\lambda}{p \mu_0} B(p, \lambda) e^{-\lambda z}. \quad (16)$$

Из условия непрерывности касательных компонент напряжённости электромагнитного поля на границах выделенных областей получаем системы алгебраических уравнений для определения неизвестных произвольных постоянных интегрирования в выражениях (11) – (16):

$z = 0$ :

$$\begin{cases} C(p, \lambda) + p \mu_0 j(p) \cdot \frac{f(\lambda)}{\lambda} \cdot sh(\lambda h) = D_1(p, \lambda) + D_2(p, \lambda); \\ C(p, \lambda) + p \mu_0 j(p) \cdot \frac{f(\lambda)}{\lambda} \cdot ch(\lambda h) = \frac{q(p, \lambda)}{\lambda} (D_1(p, \lambda) - D_2(p, \lambda)); \end{cases} \quad (17)$$

$z = d$ :

$$\begin{cases} D_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) d} + D_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) d} = B(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda d}; \\ \frac{q_2(p, \lambda)}{\lambda} (D_1(p, \lambda) \cdot e^{q(p, \lambda) d} - D_2(p, \lambda) \cdot e^{-q(p, \lambda) d}) = -B(p, \lambda) \cdot e^{-\lambda d}. \end{cases} \quad (18)$$

В конечном итоге нас интересует электрическое поле в металле заготовки.

Исключая произвольные постоянные интегрирования  $C(p, \lambda)$  и  $B(p, \lambda)$  в системах уравнений (17) и (18), находим неизвестные произвольные константы интегрирования  $D_1(p, \lambda)$  и  $D_2(p, \lambda)$ .

После соответствующих подстановок в формулу (12) и выполнения обратного преобразования Фурье-Бесселя получаем, что

$$E_{\varphi}^{(2)}(p, r, z) = -2p \mu_0 j(p) \times \int_0^{\infty} \left\{ \frac{f(\lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{G(p, \lambda)} \cdot (sh(q(p, \lambda)(z-d)) - \frac{q(p, \lambda)}{\lambda} \cdot ch(q(p, \lambda)(z-d))) \right\} \cdot J_1(\lambda \cdot r) d\lambda, \quad (19)$$

где

$$G(p, \lambda) = \left(1 - \frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)^2 \cdot e^{-q(p, \lambda) \cdot d} - \left(1 + \frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)^2 \cdot e^{q(p, \lambda) \cdot d}.$$

Выражение (19) помножим на удельную электропроводность металла заготовки и проинтегрируем по её толщине.

Получим линейную плотность индуцированного тока.

$$j_\varphi(p, r) = \gamma \cdot \int_0^d E_\varphi(p, r, z) dz = 4\mu_0 \cdot \gamma \cdot p \cdot j(p) \int_0^\infty \frac{f(\lambda) \cdot e^{-\lambda h} \operatorname{sh}\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right)}{G(p, \lambda) \cdot q(p, \lambda)} \times \left[ \operatorname{sh}\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right) + \frac{q(p, \lambda)}{\lambda} \operatorname{ch}\left(q(p, \lambda) \frac{d}{2}\right) \right] \cdot J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (20)$$

Формула (20) после интегрирования и введения новых обозначений принимает вид, достаточно удобный для последующих математических операций:

$$I_\varphi = -\frac{1}{2} \cdot (\mu_0 \gamma) p \cdot j(p) \cdot \int_0^\infty \frac{f(\lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{\lambda} \cdot F(p, \lambda) \cdot d\lambda, \quad (21)$$

где  $F(p, \lambda) = \frac{A(p, \lambda)}{B(p, \lambda)}$ ,

$$A(p, \lambda) = \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right) \cdot \operatorname{sh}(q(p, \lambda)d) + \operatorname{ch}(q(p, \lambda)d) - 1, \\ B(p, \lambda) = q(p, \lambda) \times \left[ \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)^2\right) \cdot \operatorname{sh}(q(p, \lambda)d) + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right) \cdot \operatorname{ch}(q(p, \lambda)d) \right].$$

В выражении (21) следует выполнить обратное преобразование Лапласа. Данная операция может быть осуществлена с помощью аппарата теории функций комплексного переменного [6].

Для вычисления особых точек подынтегральной функции в формуле (21) произведение продольного волнового числа на толщину листовой заготовки представим как мнимую величину:

$$(q(p, \lambda)d) = i \cdot \beta_k. \quad (22)$$

Подставляя (22) в знаменатель  $F(p, \lambda)$  и приравнявая его к нулю ( $B(p, \lambda) = 0$ ), получаем уравнение для величин  $\beta_k$ :

$$\frac{1}{2} \cdot \left[ \left(\frac{\beta_k}{\lambda d}\right)^2 - 1 \right] \cdot \sin(\beta_k) = \left(\frac{\beta_k}{\lambda d}\right) \cdot \cos(\beta_k) \quad (23)$$

Как следует из (22) и представления (23), особыми точками функции комплексного переменного  $F(p, \lambda)$  являются простые отличные от нуля полюсы  $-p_k$ :

$$p_k = -\frac{1}{\tau} \cdot \left(\beta_k^2 + \lambda^2\right), \quad (24)$$

Далее, в соответствии с теоремой об оригинале дробно-рациональной функции и с теоремой обращения свёртки из выражения (21) находим соответствующую временную зависимость:

$$p \cdot j(p) \cdot F(p, \lambda) \leftrightarrow \sum_{k=0}^\infty \frac{A(p_k, \lambda)}{\left(\frac{dB(p_k, \lambda)}{dp}\right)} \cdot \frac{dj(t)}{dt} \cdot e^{p_k t}. \quad (25)$$

Подставляя выражение (25) в формулу (21), находим оригинал для тока, индуцированного в листовой заготовке.

$$I_\varphi(t) = -\left(\frac{\tau}{2d^2}\right) \cdot \int_0^\infty \frac{f(\lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{\lambda} \times \sum_{k=0}^\infty \frac{A(p_k, \lambda)}{\left(\frac{dB(p_k, \lambda)}{dp}\right)} \cdot \frac{dj(t)}{dt} \cdot e^{p_k t} \cdot d\lambda. \quad (26)$$

Продолжая вычисления, определяем

$$I_\varphi(t) = \frac{1}{d} \cdot \int_{k=0}^\infty \frac{f(\lambda) \cdot e^{-\lambda h}}{\lambda} \times \sum_{k=0}^\infty \Phi(\beta_k, \lambda) \cdot \frac{dj(t)}{dt} \cdot e^{-\frac{(\beta_k^2 + (\lambda d)^2)}{\tau} t} \cdot d\lambda, \quad (27)$$

где

$$\Phi(\beta_k, \lambda) = \frac{\left(\cos(\beta_k) - \frac{\beta_k}{(\lambda d)} \cdot \sin(\beta_k) - 1\right)}{\left(\cos(\beta_k) - \frac{\beta_k}{\lambda d} \cdot \sin(\beta_k) - \frac{1}{\left(\frac{\beta_k}{\lambda d}\right)^2 - 1}\right) \frac{\cos(\beta_k)}{2} - \frac{\beta_k}{(\lambda d)^2} \sin(\beta_k)}.$$

Формула (27) с подстановкой зависимостей (23), (24) представляет собой аналитическое решение поставленной задачи о возбуждении вихревых токов в листовой заготовке при произвольных частотах действующих магнитных полей.

Говоря о достоверности найденного результата, необходимо отметить, что формула (27), полученная для произвольных параметров электродинамических процессов в индукторной системе, связана и согласуется с ранее полученными результатами в предельных физических ситуациях.

Эту связь можно установить, если при вычислении оригинала, соответствующего выражению (21), функцию  $F(p, \lambda)$  представить в виде отношения

$$F(p, \lambda) = \frac{A(p, \lambda)}{p \cdot B_1(p, \lambda)}, \quad (28)$$

где  $B_1(p, \lambda) = q(p, \lambda) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left[1 + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right)^2\right] \times \operatorname{sh}(q(p, \lambda)d) + \left(\frac{q(p, \lambda)}{\lambda}\right) \operatorname{ch}(q(p, \lambda)d)\right)$ .

Представление (28) позволяет в полученном оригинале выделить слагаемое, соответствующее состав-

ляющей индуцированного тока -  $I_{\varphi 0}(t)$ , обусловленное достаточно низкими частотами возбуждающего сигнала ( $|p\mu_0\gamma| \ll \lambda^2$  и  $q(p,\lambda) \approx \lambda$ ) или, так называемую, низкочастотную составляющую индуцированного тока.

С учётом принятого для  $F(p,\lambda)$  представления (28) временная зависимость из выражения (21) в соответствии с теоремой Хевисайда и теоремой об изображении свёртки функций запишется как

$$p^2 \cdot j(p) \cdot F(p,\lambda) \leftrightarrow \frac{dj(t)}{dt} \cdot \frac{A(p=0,\lambda)}{B(p=0,\lambda)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(p_k,\lambda)}{p_k \cdot \frac{dB(p_k,\lambda)}{dp}} \cdot \left( \frac{d^2 j(t)}{dt^2} + \frac{dj(0)}{dt} \right) \cdot e^{p_k t}, \quad (29)$$

где  $p_k$  – простые, отличные от нуля, корни знаменателя дроби (28).

Подставляя выражение (29) в формулу (21), оригинал для тока, индуцированного в листовой заготовке, можно записать в виде суммы двух слагаемых:

$$I_{\varphi}(t) = I_{\varphi 0}(t) + I_{\varphi \infty}(t), \quad (30)$$

где  $I_{\varphi 0}(t)$  – низкочастотная компонента индуцированного тока,

$$I_{\varphi 0}(t) = -\left( \frac{\tau}{2d^2} \right) \cdot \frac{dj(t)}{dt} \cdot \int_0^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda} \cdot \frac{A(p=0,\lambda)}{B(p=0,\lambda)} \cdot d\lambda,$$

$I_{\varphi \infty}(t)$  – высокочастотная компонента индуцированного тока,

$$I_{\varphi \infty}(t) = -\left( \frac{\tau}{2d^2} \right) \cdot \int_0^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(p_k,\lambda)}{p_k \cdot \frac{dB(p_k,\lambda)}{dp}} \times \left( \frac{d^2 j(t)}{dt^2} + \frac{dj(0)}{dt} \right) \cdot e^{p_k t} \cdot d\lambda.$$

Простые полюса –  $p_k$  были найдены ранее. Они определяются выражением (24).

Вычислим слагаемые индуцированного тока в формуле (30).

Для низкочастотной составляющей получаем, что

$$I_{\varphi 0}(t) = -\frac{dj(t)}{dt} \cdot \left( \frac{\tau}{2 \cdot d^2} \cdot \int_0^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-\lambda h} \cdot \frac{(1 - e^{-\lambda h})}{\lambda^2} d\lambda \right). \quad (31)$$

Найденная низкочастотная составляющая индуцированного тока полностью согласуется с результатом, ранее полученным в работе [5], для идеализации "прозрачных" листовых заготовок.

Продолжая вычисления, находим, что:

$$\begin{aligned} \Phi(\beta_k, \lambda) &= \frac{A(p_k, \lambda)}{p_k \cdot \frac{dB(p_k, \lambda)}{dp}} = \\ &= \frac{-2d \left( \cos(\beta_k) - \frac{\beta_k}{\lambda} \cdot \sin(\beta_k) - 1 \right)}{(\beta_k^2 + (\lambda d)^2)} \times \\ &\times \frac{1}{\left( \frac{\cos(\beta_k) - \beta_k \sin(\beta_k)}{\lambda d} - \left( \frac{\beta_k}{\lambda d} \right)^2 - 1 \right)} \times \\ &\times \frac{1}{\frac{\cos(\beta_k)}{2} - \frac{\beta_k}{(\lambda d)^2} \sin(\beta_k)}, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $\beta_k$  – корни уравнения (23).

Теперь выражение для высокочастотной компоненты индуцированного тока  $I_{\varphi \infty}(t)$  принимает вид:

$$I_{\varphi \infty}(t) = -\left( \frac{\tau}{2d^2} \right) \cdot \int_0^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \Phi(\beta_k, \lambda) \times \left( \frac{d^2 j(t)}{dt^2} \cdot e^{\frac{(\beta_k^2 + (\lambda d)^2)}{\tau}} + \frac{dj(0)}{dt} \cdot e^{-\frac{(\beta_k^2 + (\lambda d)^2)}{\tau} t} \right) \cdot d\lambda. \quad (33)$$

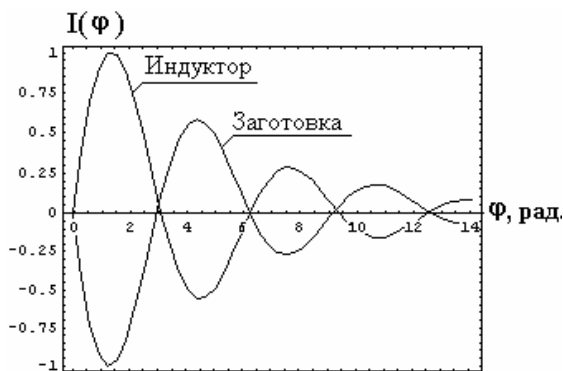
Формула (30) с подстановкой зависимостей (31) и (33), так же как и ранее полученное выражение (27), представляет собой аналитическое решение поставленной задачи о возбуждении вихревых токов в листовой заготовке при произвольных частотах действующих магнитных полей. Отличительной особенностью зависимости (30) является выделение низко и высокочастотных компонент индуцированного тока.

Проведём количественные оценки, иллюстрирующие развитие во времени электромагнитных процессов в обрабатываемых заготовках.

Так же как и ранее в работе [5], расчёты проведём для индукторной системы с  $h=0.0005$  м,  $R1=0.05$  м,  $R2=1.25 \cdot R1 \approx 0.625$  м, работающей в частотном диапазоне  $f \leq 100$  кГц.



а)



б)

Рис. 2. Временная зависимость тока, индуцированного в заготовке из листовой меди толщиной  $\sim 0.001$  м, а) рабочая частота действующего поля  $f=100$  кГц; б) рабочая частота действующего поля  $f=7.5$  кГц

Результаты проведенных расчётов индуцированных токов в относительных единицах (нормировка производилась на соответствующие максимальные величины) представлены на рис. 2.

Из результатов вычислений следует, что

- определение высокой или низкой частоты в рассматриваемом электромагнитном процессе тесно связано с величиной удельной электропроводности металла обрабатываемой заготовки (при одинаковой геометрической толщине);
- на высоких частотах действующих полей для заготовок из хороших проводников индуцированный сигнал с высокой степенью точности повторяет форму тока в индукторе, но имеет противоположное направление, или, что одно и то же - имеет сдвиг по фазе относительно тока в индукторе на  $\Delta\varphi \approx \pi$  (рис. 2а);
- на низких частотах ток, индуцированный в заготовке, относительно тока в индукторе имеет сдвиг по фазе на  $\Delta\varphi < 0.5\pi$  (рис. 2б);
- строгие расчёты, выполненные без упрощающих предположений о характере протекающих электромагнитных процессах, полностью подтверждают достоверность результатов, найденных для предельных физических ситуаций в работе [5];
- изменения направления индуцированного тока по сравнению с режимом резкого поверхностного эффекта не происходит.

### ВЫВОДЫ

1. Выполнен теоретический анализ процесса возбуждения вихревых токов магнитным полем одновиткового индуктора в плоской листовой заготовке из металла с конечным значением удельной электропроводности.

2. Показано, что величина фазового сдвига индуцированного тока относительно тока в индукторе заключена в интервале  $\Delta\varphi \in [0.5\pi, \pi]$ .

3. В режиме резкого поверхностного эффекта направление вихревых токов в заготовке противоположно направлению тока в индукторе, при существенном проникновении поля направление наведенно-

го относительно индуцирующего тока не изменяется, хотя разность фаз между ними снижается до  $0.5\pi$ .

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Батыгин Ю.В., Лавинский В.И., Хищенко Л.Т., Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. Том 1. Издание второе, переработанное и дополненное. // Под общей ред. д.т.н., проф. Батыгина Ю.В. Харьков: - изд. МОСТ-Торнадо. - 2003. - 284 с.
- [2] Бажинов А. В., Батыгин Ю.В., Чаплыгин Е. А. Использование энергии импульсных магнитных полей в автомобильной промышленности // Автомобильный транспорт / Сб. научн. трудов. - Харьков: Изд-во ХНАДУ. - 2005. - Вып.16. - с.349-352.
- [3] Подольцев А.Д., Кучерявая И. Н. Элементы теории численного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах // Ин-т электродинамики НАН Украины. - 1999г. - с.143.
- [4] Yu.V.Batygin, V.I.Lavinsky, L.T.Khimenko, Direction Change of the Force Action upon Conductor under Frequency Variation of the Acting magnetic Field. Proceedings of the 1-st International Conference on High Speed Metal Forming. March 31/April 1, 2004. Dortmund, Germany. P.157-160.
- [5] Батыгин Ю.В., Лавинский В.И Чаплыгин Е. А., Особенности токов индуцированных низкочастотным полем одновиткового соленоида в плоских листовых металлах // Электротехника и электромеханика / Журнал. - Харьков: Изд-во НТУ "ХПИ". - 2005. - №3. - с.69-73.
- [6] Шнейерсон Г.А., Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. Л: Энергоиздат. 1981.- 200с.
- [7] Дж.Мэтьюз, Р.Рокер, Математические методы физики. Пер. с англ. канд.физ.-мат наук В.П. Крайнова. Москва: Атомиздат. 1972. 399 с.

Поступила 03.02.2006