

$$f_{r\nu} = \frac{2}{\nu \cdot \pi} \cdot \sin \frac{\nu \cdot \pi}{z_2}; \quad \delta_{r\nu} = \nu \cdot Q + \frac{2 \cdot \nu \cdot \pi \cdot i}{z_2}.$$

де θ – кут між нульовими кутовими координатами статора і ротора (вісьями z_2 -го зубця ротора і z_1 -го паза статора).

Величина і просторове положення максимуму ν -ї гармоніки МРС i -го електричного контуру статора при одиничному струмі визначаються виразами:

$$f_{s\nu} = \frac{2}{\nu \cdot \pi} \cdot k_{об} \cdot w_1; \quad \delta_{s\nu} = \delta_{A\nu} + \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{3},$$

де $\delta_{A\nu}$ – координата максимуму МРС по ν -й гармоніці фази A ; i – номер фази, що приймає значення 3,1,2, відповідно для фаз А,В,С.

ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ РІВНОВАГИ В ФАЗНИХ КООРДИНАТАХ

При врахуванні тільки однієї просторової гармонічної складової МРС порядку ν складемо систему диференціальних рівнянь електричної рівноваги симетричного асинхронного двигуна з короткозамкнутим ротором, що враховує еквівалентні контури в сталі статора і ротора в фазних координатах

$$[U] = \text{diag}(r_s, r_{sz}, r_{sa}, r_r, r_{rz}, r_{ra}) [I] + \frac{d}{dt} [L] \times [I], \quad (1)$$

$$[U] = [u_s, 0, 0, 0, 0]_i;$$

$$[I] = [i_s, i_{sz}, i_{sa}, i_r, i_{rz}, i_{ra}]_i;$$

$$[L] = ((L_{k,n}, k = s, sz, sa, r, r, rz, ra), n = s, sz, sa, r, r, rz, ra);$$

$$\text{ТУТ } [u_s] = [u_A, u_B, u_C]_i;$$

$$[i_s] = [i_A, i_B, i_C]_i; \quad [i_{sz}] = [i_{sz1}, i_{sz1}, \dots, i_{sz(z_1-1)}]_i;$$

$$[i_{sa}] = [i_{sa1}, i_{sa1}, \dots, i_{sa(z_1-1)}]_i;$$

$$[i_r] = [i_{rz2}, i_{rz1}, \dots, i_{rz(z_2-1)}]_i; \quad [i_{rz}] = [i_{rz2}, i_{rz1}, \dots, i_{rz(z_2-1)}]_i;$$

$$[i_{ra}] = [i_{ra2}, i_{ra1}, \dots, i_{ra(z_2-1)}]_i; \quad [r_s] = \text{diag}(r_A, r_B, r_C);$$

$$[r_r] = \begin{pmatrix} 2 \cdot (r_c + r_{yk}) & -r_c & \dots & -r_c \\ -r_c & 2 \cdot (r_c + r_{yk}) & -r_c & \dots \\ & -r_c & 2 \cdot (r_c + r_{yk}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -r_c & & & 2 \cdot (r_c + r_{yk}) \end{pmatrix};$$

$$[r_{sz}] = r_{sz} [1]; \quad [r_{sa}] = r_{sa} [1]; \quad [r_{rz}] = r_{rz} [1]; \quad [r_{ra}] = r_{ra} [1];$$

$$[L_{ss}] = \text{diag}(l_{s\sigma}, l_{s\sigma}, l_{s\sigma}) + ((L_{ssv}^{k,n}, k = 3,1,2), n = 3,1,2);$$

$$L_{ssv}^{k,n} = M_{ssv} \cdot \cos(\delta_{skv} - \delta_{snv})$$

$$[L_{ss}] = \text{diag}(l_{s\sigma}, l_{s\sigma}, l_{s\sigma}) + M_{ss} / 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$[L_{rr}] = [L_{rrv}] + [L_{rrnr}];$$

$$[L_{rrv}] = ((L_{rrv}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_2, 1, \dots, z_2 - 1);$$

$$L_{rrv}^{k,n} = M_{rrv} \cdot \cos((k-n) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu / z_2);$$

$$[L_{rrnr}] = \begin{pmatrix} 2 \cdot (m_l + m_n) & -m_n & \dots & -m_n \\ -m_n & 2 \cdot (m_l + m_n) & \dots & \dots \\ & -m_n & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -m_n & & & 2 \cdot (m_l + m_n) \end{pmatrix};$$

$$[L_{szsz}] = \text{diag}(l_{sz1\sigma}, l_{sz1\sigma}, \dots, l_{sz(z_1-1)\sigma}) + ((L_{szszv}^{k,n}, k = z_1, 1, \dots, z_1 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{szszv}^{k,n} = M_{szszv} \cdot \cos((k-n) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu / z_1);$$

$$[L_{sasa}] = \text{diag}(l_{sa1\sigma}, l_{sa1\sigma}, \dots, l_{sa(z_1-1)\sigma}) + ((L_{sasav}^{k,n}, k = z_1, 1, \dots, z_1 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{sasav}^{k,n} = M_{sasav} \cdot \cos((k-n) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu / z_1);$$

$$[L_{rzzz}] = \text{diag}(l_{rz2\sigma}, l_{rz1\sigma}, \dots, l_{rz(z_2-1)\sigma}) + ((L_{rzzzv}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_2, 1, \dots, z_2 - 1);$$

$$L_{rzzzv}^{k,n} = M_{rzzzv} \cdot \cos((k-n) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu / z_2);$$

$$[L_{rara}] = \text{diag}(l_{ra2\sigma}, l_{ra1\sigma}, \dots, l_{ra(z_2-1)\sigma}) + ((L_{rarav}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_2, 1, \dots, z_2 - 1);$$

$$L_{rarav}^{k,n} = M_{rarav} \cdot \cos((k-n) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu / z_2);$$

$$[L_{ssz}] = ((L_{sszv}^{k,n}, k = 3,1,2), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{sszv}^{k,n} = M_{sszv} \cdot \cos(\delta_{szkv} - \delta_{sznv});$$

$$[L_{ssa}] = ((L_{ssav}^{k,n}, k = 3,1,2), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{ssav}^{k,n} = M_{ssav} \cdot \cos(\delta_{sakv} - \delta_{sanv});$$

$$[L_{rrz}] = ((L_{rrzv}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_2, 1, \dots, z_2 - 1);$$

$$L_{rrzv}^{k,n} = M_{rrzv} \cdot \cos(\delta_{rzkv} - \delta_{rznv});$$

$$[L_{rra}] = ((L_{rrav}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_2, 1, \dots, z_2 - 1);$$

$$L_{rrav}^{k,n} = M_{rrav} \cdot \cos(\delta_{rakv} - \delta_{ranv});$$

$$[L_{sas}] = [L_{szsa}]_i; \quad [L_{sas}] = [L_{ssa}]_i; \quad [L_{szs}] = [L_{ssz}]_i;$$

$$[L_{szsa}] = ((L_{szsav}^{k,n}, k = z_1, 1, \dots, z_1 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{szsav}^{k,n} = M_{szsav} \cdot \cos(\delta_{szkv} - \delta_{sanv});$$

$$[L_{rzra}] = ((L_{rzrav}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_2, 1, \dots, z_2 - 1);$$

$$L_{rzrav}^{k,n} = M_{rzrav} \cdot \cos(\delta_{rzkv} - \delta_{ranv});$$

$$[L_{rarz}] = [L_{rzra}]_i; \quad [L_{rar}] = [L_{rra}]_i; \quad [L_{rzz}] = [L_{rrz}]_i;$$

$$[L_{rsz}] = ((L_{rszv}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{rszv}^{k,n} = M_{rszv} \cdot \cos(\delta_{rkv} - \delta_{sznv});$$

$$[L_{rsa}] = ((L_{rsav}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{rsav}^{k,n} = M_{rsav} \cdot \cos(\delta_{rkv} - \delta_{sanv});$$

$$[L_{rzs}] = ((L_{rzs v}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{rzs v}^{k,n} = M_{rzs v} \cdot \cos(\delta_{rkv} - \delta_{snv});$$

$$[L_{ras}] = ((L_{rasv}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{rasv}^{k,n} = M_{rasv} \cdot \cos(\delta_{rav} - \delta_{snv});$$

$$[L_{rs}] = ((L_{rsv}^{k,n}, k = z_2, 1, \dots, z_2 - 1), n = z_1, 1, \dots, z_1 - 1);$$

$$L_{rsv}^{k,n} = M_{rsv} \cdot \cos(\delta_{rkv} - \delta_{snv});$$

$$[L_{szr}] = [L_{rsz}]_i; \quad [L_{sar}] = [L_{rsa}]_i; \quad [L_{srz}] = [L_{rzs}]_i;$$

$$[L_{sra}] = [L_{ras}]_i$$

де матриці миттєвих значень позначено: $[u_s]$ – напруга статора, що прикладена до його фаз; $[i_s]$ – струм фаз статора; $[i_{sz}]$, $[i_{sa}]$ – струмів еквівалентних контурів в

сталі зубців і ділянок ярм в статорі; $[i_{rz}], [i_{ra}]$ – струмів еквівалентних контурів в сталі зубців і ділянок ярм в роторі; $[i_r]$ – струмів в короткозамкнутих контурах ротора; $[i_s], [i_{sz}], [i_{sa}], [i_{rz}], [i_{ra}], [i_r]$ – матриці активних опорів фаз статора, еквівалентних контурів струмів в сталі зубців і ділянок ярма в статорі і ротора відповідно, короткозамкнутих контурів ротора; $[L]$ – матриці власних і взаємних індуктивностей (на групи контурів вказують індекси: s – статор; r – ротор; z, a – еквівалентні контури сталі зубців і ділянок ярма); $[L_{rr\ nll}], [L_{rv}]$ – матриці взаємних індуктивностей контурів ротора по шляхах потоків пазового і лобового розсіювання і основного потоку взаємодії статор-ротор по просторовій гармоніці v ; параметри r_c, r_{yk} – активні опори стержнів ротора і ділянки короткозамкнутого кільця між сусідніми стержнями; m_n – власна індуктивність роторного контура по потоку розсіювання, що визвана струмом в ділянці короткозамкнутого кільця; m_n – власна чи взаємна індуктивність роторних контурів по потоку розсіювання, що визвана струмом в стержні; M_{ijv} ($i, j = s, r, sz, sa, rz, ra$) – взаємна індуктивність двох електричних контурів при умові співпадання їх осей по гармоніці v ; l_σ – індуктивність розсіювання; $L^{k,n}$ – елемент матриці індуктивності розсіювання; δ – величина повітряного зазору; k_δ – коефіцієнт Картера; k_{uv} – модуль коефіцієнта насичення магнітного кола; R, l_δ – радіус розточки і довжина пакету статора; k_{cij} – коефіцієнт скосу контурів i і j .

СПРОЩЕННЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Складена система рівнянь електричної рівноваги складається з $3+2 \cdot z_2 + 2 \cdot z_1$ рівнянь і містить періодичні коефіцієнти, що залежать від кута повороту ротора. Для спрощення системи рівнянь застосовують заміну змінних. Так як розглядається симетрична електрична машина при симетричному живленні, то у відповідності з [1] в якості нових змінних доцільно вибрати симетричні складові просторових векторів в системі координат, що обертається синхронно з полем. Це скоротить кількість рівнянь до шести і звільнить їх від періодичних коефіцієнтів.

В результаті заміни змінних вихідна система рівнянь електричної рівноваги перетворюється в систему 6-ти рівнянь для комплексних змінних.

$$\begin{aligned} \bar{i}_{1s} &= 3^{-0,5} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot (i_A + i_B \cdot a_3 + i_C \cdot a_3^2); \\ \bar{i}_{vsz} &= \frac{e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{z_1^{0,5}} \cdot [i_{szz_1} + i_{sz_1} \cdot a_{z_1}^v + \dots + i_{sz(z_1-1)} \cdot a_{z_1}^{v \cdot (z_1-1)}] \\ \bar{i}_{vsa} &= \frac{e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}}{z_1^{0,5}} \cdot [i_{saz_1} + i_{sa_1} \cdot a_{z_1}^v + i_{sa_2} \cdot a_{z_1}^{2v} + \dots + i_{sa(z_1-1)} \cdot a_{z_1}^{v \cdot (z_1-1)}] \\ \bar{i}_{vrz} &= \frac{e^{-j \cdot (\omega_0 \cdot t - v \cdot \theta)}}{z_2^{0,5}} \cdot [i_{rzz_2} + i_{rz_2} \cdot a_{z_2}^v + \dots + i_{rz(z_2-1)} \cdot a_{z_2}^{v \cdot (z_2-1)}] \\ \bar{i}_{vra} &= \frac{e^{-j \cdot (\omega_0 \cdot t - v \cdot \theta)}}{z_2^{0,5}} \cdot [i_{raz_2} + i_{ra_2} \cdot a_{z_2}^v + i_{ra_2} \cdot a_{z_2}^{2v} + \dots + i_{ra(z_2-1)} \cdot a_{z_2}^{v \cdot (z_2-1)}] \\ \bar{i}_{vr} &= \frac{e^{-j \cdot (\omega_0 \cdot t - v \cdot \theta)}}{z_2^{0,5}} \cdot [i_{rz_2} + i_{k_1} \cdot a_{z_2}^v + \dots + i_{k(z_2-1)} \cdot a_{z_2}^{v \cdot (z_2-1)}] \quad (2) \end{aligned}$$

де \bar{i}_{1s} – перша симетрична складова просторових векторів миттєвих значень фазних струмів статора; \bar{i}_{vr} , \bar{i}_{vsz} , \bar{i}_{vsa} , \bar{i}_{vrz} , \bar{i}_{vra} – v -і симетричні складові просторових векторів контурних струмів: ротора, втрат в сталі зубців і ділянок ярм статора і ротора відповідно.

Кожний із представлених просторових комплексів співпадає в просторі з максимумом результуючої хвилі струму, а отже, і МРС кожної групи струмів. Модулі просторових комплексів, як видно з (2), в $(m_i)^{0,5}$, ($i=s, sz, sa, rz, ra, r$) раз менші сумарних векторів струмів m_i -фазних симетричних систем (m_i – число фаз системи контурів з індексом i). Підсумувавши комплекси (2) з відповідними коефіцієнтами пропорційності, отримуємо просторовий комплекс, еквівалентний результуючій хвилі МРС машини по v -й гармонічній складовій

$$\begin{aligned} \bar{F}_{mv} &= 3^{0,5} \cdot f_{sv} \cdot \bar{i}_{1s} + z_1^{0,5} \cdot (f_{szv} \cdot \bar{i}_{vsz} + f_{sav} \cdot \bar{i}_{vsa}) + \\ &+ (z_2^{0,5} \cdot f_{rvz} \cdot \bar{i}_{vrz} + f_{rav} \cdot \bar{i}_{vra}) + z_2^{0,5} \cdot f_{rv} \cdot \bar{i}_{vr}. \quad (3) \end{aligned}$$

Система рівнянь (1), перетворена до змінних (2), має вигляд

$$\begin{aligned} \bar{u}_s &= r_s \cdot \bar{i}_{vs} + \left(\frac{d}{dt} + j \cdot \omega_0 \right) \cdot \left[\left(l_{\sigma s} + \frac{3}{2} \cdot M_{ssv} \right) \cdot \bar{i}_{vs} + \right. \\ &+ \bar{L}_{sszv} \cdot \bar{i}_{vsz} + \bar{L}_{ssav} \cdot \bar{i}_{vsa} + \bar{L}_{srv} \cdot \bar{i}_{vr} + \\ &+ \bar{L}_{srzv} \cdot \bar{i}_{vrz} + \bar{L}_{srav} \cdot \bar{i}_{vra} \left. \right]; \\ 0 &= r_{sz} \cdot \bar{i}_{vsz} + \left(\frac{d}{dt} + j \cdot \omega_0 \right) \cdot \left[\left(l_{\sigma sz} + \frac{3}{2} \cdot M_{zsszv} \right) \cdot \bar{i}_{vsz} + \right. \\ &+ \bar{L}_{zsv} \cdot \bar{i}_{vs} + \bar{L}_{zssav} \cdot \bar{i}_{vsa} + \bar{L}_{zsrz} \cdot \bar{i}_{vr} + \\ &+ \bar{L}_{zsrzv} \cdot \bar{i}_{vrz} + \bar{L}_{zsrav} \cdot \bar{i}_{vra} \left. \right]; \\ 0 &= r_{sa} \cdot \bar{i}_{vsa} + \left(\frac{d}{dt} + j \cdot \omega_0 \right) \cdot \left[\left(l_{\sigma sa} + \frac{3}{2} \cdot M_{zasav} \right) \cdot \bar{i}_{vsa} + \right. \\ &+ \bar{L}_{sasv} \cdot \bar{i}_{vs} + \bar{L}_{saszv} \cdot \bar{i}_{vsz} + \bar{L}_{sarv} \cdot \bar{i}_{vr} + \\ &+ \bar{L}_{sarzv} \cdot \bar{i}_{vrz} + \bar{L}_{sarav} \cdot \bar{i}_{vra} \left. \right]; \\ 0 &= r_{rz} \cdot \bar{i}_{vrz} + \left(\frac{d}{dt} + j \cdot (\omega_0 - \omega_r) \right) \cdot \left[\left(l_{\sigma rz} + \frac{z_2}{2} \cdot M_{rzzzv} \right) \cdot \bar{i}_{vrz} + \right. \\ &+ \bar{L}_{rv} \cdot \bar{i}_{vs} + \bar{L}_{rvsz} \cdot \bar{i}_{vsz} + \bar{L}_{rvsa} \cdot \bar{i}_{vsa} + \bar{L}_{rvrz} \cdot \bar{i}_{vr} + \bar{L}_{rvrz} \cdot \bar{i}_{vra} \left. \right]; \\ 0 &= r_{ra} \cdot \bar{i}_{vra} + \left(\frac{d}{dt} + j \cdot (\omega_0 - \omega_r) \right) \cdot \left[\left(l_{\sigma ra} + \frac{z_2}{2} \cdot M_{rarav} \right) \cdot \bar{i}_{vra} + \right. \\ &+ \bar{L}_{rav} \cdot \bar{i}_{vs} + \bar{L}_{raszv} \cdot \bar{i}_{vsz} + \bar{L}_{rasv} \cdot \bar{i}_{vsa} + \bar{L}_{rarv} \cdot \bar{i}_{vr} + \bar{L}_{rarzv} \cdot \bar{i}_{vrz} \left. \right]; \\ 0 &= r_r \cdot \bar{i}_{vr} + \left(\frac{d}{dt} + j \cdot (\omega_0 - \omega_r) \right) \cdot \left[\left(l_{\sigma r} + \frac{z_2}{2} \cdot M_{rrv} \right) \cdot \bar{i}_{vr} + \right. \\ &+ \bar{L}_{rv} \cdot \bar{i}_{vs} + \bar{L}_{rvsz} \cdot \bar{i}_{vsz} + \bar{L}_{rvsa} \cdot \bar{i}_{vsa} + \\ &+ \bar{L}_{rvz} \cdot \bar{i}_{vrz} + \bar{L}_{rvav} \cdot \bar{i}_{vra} \left. \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} r_r &= 2 \cdot [r_{yk} + r_c \cdot (1 - \cos 2 \cdot \pi \cdot v / z_2)]; \\ l_{\sigma r} &= 2 \cdot [m_n + m_n \cdot (1 - \cos 2 \cdot \pi \cdot v / z_2)]; \\ (\bar{L}_{kuv} &= M_{kuv} \cdot 0,5 \cdot (m_k \cdot m_n)^{0,5} \cdot e^{-j \cdot \delta \cdot k_0} \cdot e^{j \cdot \delta \cdot n_0}, \\ k &= s, sz, sa, rz, ra, r, n = s, sz, sa, rz, ra, r); \end{aligned}$$

$$\delta_{s_0} = \delta_{A_0}; \quad \delta_{sz_0} = \delta_{rz_0} = -\pi \cdot \nu / z_1; \quad \delta_{sa_0} = \delta_{ra_0} = \pi / 2;$$

$$\delta_{r_0} = 0; \quad \omega_r = d\theta / dt,$$

де ω_r – частота обертання ротора; r_l – опір фази статора симетричного двигуна.

Дана система шести диференціальних рівнянь електричної рівноваги спільно з рівнянням механічної рівноваги описує електромагнітні і механічні перехідні процеси в симетричній асинхронній машині з врахуванням еквівалентних контурів втрат в сталі статора і ротора від вихрових струмів.

СИСТЕМА АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ЕЛЕКТРИЧНОЇ РІВНОВАГИ

Електричні змінні (2) представлено в системі координат, що обертаються синхронно з полем. Вони пропорційні огинаючим кривих зміни миттєвих значень в часі. В усталеному режимі вони стають постійними величинами. Миттєві ж значення струмів електричних контурів машини в цьому випадку визначаються слідуочим чином:

$$i_{sk} = I_{ms} \cdot \cos(\xi_0 \cdot t + \xi_s - 2 \cdot k \cdot \pi / 3) =$$

$$= 2^{-0,5} \cdot \left(\dot{I}_s \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi / 3} + I_s^* \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi / 3} \right),$$

$$k=3, 1, 2;$$

$$i_{szk} = I_{msz} \cdot \cos(\xi_0 \cdot t + \xi_{sz} - 2 \cdot k \cdot \pi / z_1) = 2^{-0,5} \times$$

$$\times \left(\dot{I}_{sz} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi / z_1} + I_{sz}^* \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi / z_1} \right),$$

$$k=z_1, 1, \dots, 1, z_1-1;$$

$$i_{sak} = I_{msa} \cdot \cos(\xi_0 \cdot t + \xi_{sa} - 2 \cdot k \cdot \pi / z_1) = 2^{-0,5} \times$$

$$\times \left(\dot{I}_{sa} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi / z_1} + I_{sa}^* \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi / z_1} \right),$$

$$k=z_1, 1, \dots, 1, z_1-1;$$

$$i_{rzk} = I_{mrz} \cdot \cos(\xi_0 \cdot t + \xi_{rz} - 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2) = 2^{-0,5} \times$$

$$\times \left(\dot{I}_{rz} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2} + I_{rz}^* \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2} \right),$$

$$k=z_2, 1, \dots, 1, z_2-1;$$

$$i_{rak} = I_{mra} \cdot \cos(\xi_0 t + \xi_{ra} - 2k\pi / z_2) = 2^{-0,5} \times$$

$$\times \left(\dot{I}_{ra} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2} + I_{ra}^* \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2} \right),$$

$$k=z_2, 1, \dots, 1, z_2-1;$$

$$i_{rk} = I_{mr} \cdot \cos((\omega_0 - \nu \cdot \omega_r) \cdot t + \xi_r - 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2) =$$

$$= 2^{-0,5} \cdot \left(\dot{I}_r \cdot e^{j \cdot (\omega_0 - \nu \cdot \omega_r) \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2} + \right.$$

$$\left. + I_r^* \cdot e^{-j \cdot (\omega_0 - \nu \cdot \omega_r) \cdot t} \cdot e^{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi \cdot \nu / z_2} \right),$$

де I_m, ξ, \dot{I}, I^* – амплітуди, початкові фази, часові комплекси, спряжені часові комплекси струмів відповідно.

Підставивши дані залежності в (2), отримаємо вирази зв'язку в усталеному режимі між часовими комплексами і симетричними складовими просторових векторів струмів і аналогічним чином напруг

$$\bar{i}_{\nu r} = (z_2/2)^{0,5} \cdot \dot{I}_r; \quad \bar{i}_{\nu sz} = (z_1/2)^{0,5} \cdot \dot{I}_{sz};$$

$$\bar{i}_{\nu sa} = (z_1/2)^{0,5} \cdot \dot{I}_{sa};$$

$$\bar{i}_{\nu rz} = (z_2/2)^{0,5} \cdot \dot{I}_{rz}; \quad \bar{i}_{\nu ra} = (z_2/2)^{0,5} \cdot \dot{I}_{ra};$$

$$\bar{i}_{1s} = (1,5)^{0,5} \cdot \dot{I}_s; \quad \bar{u}_{1s} = (1,5)^{0,5} \cdot \dot{U}_s; \quad (5)$$

де \dot{U}_s – діюче значення змінного комплексу напруги статора. Всі часові комплекси відповідають фазам з номерами 3, z_2, z_2, z_2, z_1, z_1 – статора, ротора, контурів

зубців і ярм ротора та статора відповідно. Підставивши в (3), визначимо амплітуду результуючої хвилі МРС мишини

$$F_{mv} = 2^{-0,5} \cdot \left| 3 \cdot f_{sv} \cdot \dot{I}_s + z_1 \cdot (f_{szv} \cdot \dot{I}_{sz} + f_{sav} \cdot \dot{I}_{sa}) + \right.$$

$$\left. + z_2 \cdot (f_{rvz} \cdot \dot{I}_{rz} + f_{rav} \cdot \dot{I}_{ra}) + z_2 \cdot f_{rv} \cdot \dot{I}_r \right|. \quad (6)$$

Наявність зв'язку між просторовими і часовими комплексами означає об'єднання просторової і часової комплексних площин. На об'єднаній просторово-часовій комплексній площині симетричні складові просторових векторів (2) в усталеному режимі роботи у відповідному масштабі сумішуються з часовими комплексами струмів.

Перетворимо рівняння перехідного режиму (4) в систему рівнянь усталеного режиму, замінивши в них симетричні складові просторових комплексів часовими у відповідності з виразами (5), враховуючи, що останні не являються функціями часу

$$\dot{U}_s = r_s \cdot \dot{I}_s + j \cdot \omega_0 \cdot \left[\left(l_{\sigma s} + \frac{3}{2} \cdot M_{ssv} \right) \cdot \dot{I}_s + (z_1/3)^{0,5} \cdot \left(\bar{L}_{sszv} \cdot \dot{I}_{sz} + \right. \right.$$

$$\left. + \bar{L}_{ssav} \cdot \dot{I}_{sa} \right) + (z_2/3)^{0,5} \cdot \left(\bar{L}_{srzv} \cdot \dot{I}_{rz} + \bar{L}_{srav} \cdot \dot{I}_{ra} \right) + \bar{L}_{srv} \cdot \dot{I}_r \left. \right\}$$

$$0 = r_{sz} \cdot \dot{I}_{sz} + j \cdot \omega_0 \cdot \left[\left(l_{\sigma sz} + \frac{z_1}{2} \cdot M_{szsv} \right) \cdot \dot{I}_{sz} + (3/z_1)^{0,5} \cdot \bar{L}_{szsv} \cdot \dot{I}_s + \right.$$

$$\left. + \bar{L}_{szsav} \cdot \dot{I}_{sa} + (z_2/z_1)^{0,5} \cdot \left(\bar{L}_{szrv} \cdot \dot{I}_{rz} + \bar{L}_{szrav} \cdot \dot{I}_{ra} \right) + \bar{L}_{szrv} \cdot \dot{I}_r \left. \right\}$$

$$0 = r_{sa} \cdot \dot{I}_{sa} + j \cdot \omega_0 \cdot \left[\left(l_{\sigma sa} + \frac{z_1}{2} \cdot M_{sasv} \right) \cdot \dot{I}_{sa} + (3/z_1)^{0,5} \cdot \bar{L}_{sasv} \cdot \dot{I}_s + \right.$$

$$\left. + \bar{L}_{sasv} \cdot \dot{I}_{sz} + (z_2/z_1)^{0,5} \cdot \left(\bar{L}_{sarv} \cdot \dot{I}_{rz} + \bar{L}_{sarv} \cdot \dot{I}_{ra} \right) + \bar{L}_{sarv} \cdot \dot{I}_r \left. \right\}$$

$$0 = r_{rz} \cdot \dot{I}_{rz} + j \cdot (\omega_0 - \nu \cdot \omega_r) \cdot \left[\left(l_{\sigma rz} + \frac{z_2}{2} \cdot M_{rzzv} \right) \cdot \dot{I}_{rz} + \right.$$

$$\left. + (3/z_2)^{0,5} \cdot \bar{L}_{rzzv} \cdot \dot{I}_s + (z_1/z_2)^{0,5} \cdot \left(\bar{L}_{rzzv} \cdot \dot{I}_{sz} + \bar{L}_{rzzav} \cdot \dot{I}_{sa} \right) + \right.$$

$$\left. + \bar{L}_{rzzv} \cdot \dot{I}_r + \bar{L}_{rzzv} \cdot \dot{I}_r \right]$$

$$0 = r_{ra} \cdot \dot{I}_{ra} + j \cdot (\omega_0 - \nu \cdot \omega_r) \cdot \left[\left(l_{\sigma ra} + \frac{z_2}{2} \cdot M_{rarv} \right) \cdot \dot{I}_{ra} + \right.$$

$$\left. + (3/z_2)^{0,5} \cdot \bar{L}_{rasv} \cdot \dot{I}_s + (z_1/z_2)^{0,5} \cdot \left(\bar{L}_{rasv} \cdot \dot{I}_{sz} + \bar{L}_{rasv} \cdot \dot{I}_{sa} \right) + \right.$$

$$\left. + \bar{L}_{rarv} \cdot \dot{I}_{rz} + \bar{L}_{rarv} \cdot \dot{I}_r \right]$$

$$0 = r_r \cdot \dot{I}_r + j \cdot (\omega_0 - \nu \cdot \omega_r) \cdot \left[\left(l_{\sigma r} + \frac{z_2}{2} \cdot M_{rrv} \right) \cdot \dot{I}_r + \right.$$

$$\left. (z_1/z_2)^{0,5} \cdot \bar{L}_{rvsv} \cdot \dot{I}_s + (z_1/z_2)^{0,5} \cdot \left(\bar{L}_{rvsv} \cdot \dot{I}_{sz} + \bar{L}_{rvsv} \cdot \dot{I}_{sa} \right) + \right.$$

$$\left. + \bar{L}_{rvz} \cdot \dot{I}_{rz} + \bar{L}_{rvav} \cdot \dot{I}_{ra} \right]$$

Таким чином, отримана система шести алгебраїчних рівнянь відносно комплексів струмів для розрахунку робочих та пускових характеристик симетричної машини з врахуванням втрат в сталі статора і ротора. Розв'язання її не викликає ускладнень при наявності інформації про величину коефіцієнтів.

ОТРИМАННЯ ВИРАЗІВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ МОМЕНТІВ

Рівняння електромагнітного моменту визначимо як часткову похідну від запасу магнітної коенергії по переміщенню. Даний вираз істотно спрощується при припущенні про рівність магнітних енергії і коенергії. В цьому випадку інтеграл замінюється половиною добутку підінтегральною функцією на величину, що

стоїть під знаком диференціала. Приводом для даного припущення являється те, що, як показано в [1], при рівнях насичення магнітного кола, що відповідає експлуатаційним навантаженням, похибка не перевищує декількох відсотків. При розрахунку режиму з підвищеним рівнем насичення інтеграл у виразі електромагнітного моменту можна визначити в процесі затування струмів в обмотках машини [1].

Електромагнітний момент визначимо виразом

$$0,5[i]_l \cdot \frac{\partial(L)}{\partial\theta} \cdot [i],$$

де всі матриці відповідають матрицям системи (1). Враховуючи залежність від кута θ , запишемо

$$\begin{aligned} M_e = & 0,5 \cdot [i_r]_l \cdot \left[\frac{\partial(L_{rs})}{\partial\theta} \cdot [i_s] + \frac{\partial(L_{rsz})}{\partial\theta} \cdot [i_{sz}] + \right. \\ & + \frac{\partial(L_{rsa})}{\partial\theta} \cdot [i_{sa}] + [i_s]_l \cdot \left[\frac{\partial(L_{srz})}{\partial\theta} \cdot [i_{rz}] + \frac{\partial(L_{sra})}{\partial\theta} \cdot [i_{ra}] + \right. \\ & + [i_{rz}]_l \cdot \left[\frac{\partial(L_{rzs})}{\partial\theta} \cdot [i_{sz}] + \frac{\partial(L_{rzsza})}{\partial\theta} \cdot [i_{sa}] + \right. \\ & + [i_{ra}]_l \cdot \left[\frac{\partial(L_{rasa})}{\partial\theta} \cdot [i_{sa}] + \frac{\partial(L_{rasz})}{\partial\theta} \cdot [i_{sz}] + \right. \\ & + 0,5 \cdot [i_r] \cdot \left[\frac{\partial(L_{sr})}{\partial\theta} \cdot [i_s] + \frac{\partial(L_{srz})}{\partial\theta} \cdot [i_{sz}] + \frac{\partial(L_{sra})}{\partial\theta} \cdot [i_{sa}] + \right. \\ & + [i_s] \cdot \left[\frac{\partial(L_{rzs})}{\partial\theta} \cdot [i_{rz}] + \frac{\partial(L_{ras})}{\partial\theta} \cdot [i_{ra}] + \right. \\ & + [i_{rz}] \cdot \left[\frac{\partial(L_{szz})}{\partial\theta} \cdot [i_{sz}] + \frac{\partial(L_{sarz})}{\partial\theta} \cdot [i_{sa}] + \right. \\ & + [i_{ra}] \cdot \left. \left. \frac{\partial(L_{sara})}{\partial\theta} \cdot [i_{sa}] + \frac{\partial(L_{szra})}{\partial\theta} \cdot [i_{sz}] \right] \right]. \end{aligned}$$

Для спрощення виразу електромагнітного моменту необхідно провести заміну змінних аналогічно з перетвореннями для системи рівнянь електричної рівноваги [2], приймаючи до уваги, що

$$[i_k] = [C_k] \cdot [\bar{i}_k]; \quad [\bar{i}_k^*] = [C_k^*]; \quad [C_k^*] = [C_k]^{-1};$$

$$[C_k]^{-1} \cdot [L_{kn}] \cdot [C_n] = [\bar{L}_{kn}]; \quad [\bar{L}_{nk}] = [\bar{L}_{kn}^*];$$

$$j \cdot A^* - j \cdot A = 2 \cdot \text{Im}(A);$$

$$[C_r]^{-1} \cdot \frac{\partial([C_r])}{\partial\theta} \cdot [C_r] = -j \cdot v [1]; \quad \frac{\partial([C_r]^{-1})}{\partial\theta} \cdot [C_r] = j \cdot v [1]$$

де A – комплексне число; Im – уявна частина; індекси k, n приймають значення s, sz, sa, rz, ra, r . Перетворений вираз електромагнітного моменту, що дозволяє досліджувати динамічні режими, мають наступний вигляд.

$$\begin{aligned} M_e = & 2 \cdot v \cdot \text{Im}(\bar{i}_{vr}^* \cdot \bar{L}_{rvs} \cdot \bar{i}_{vs} + \bar{i}_{vr}^* \cdot \bar{L}_{rvsz} \cdot \bar{i}_{vsz} + \bar{i}_{vr}^* \cdot \bar{L}_{rvsa} \cdot \bar{i}_{vsa} + \\ & + \bar{i}_{vs}^* \cdot \bar{L}_{svr} \cdot \bar{i}_{vr} + \bar{i}_{vs}^* \cdot \bar{L}_{svsz} \cdot \bar{i}_{vrsz} + \bar{i}_{vs}^* \cdot \bar{L}_{svsa} \cdot \bar{i}_{vrsa} + \\ & + \bar{i}_{vrsz}^* \cdot \bar{L}_{rsvs} \cdot \bar{i}_{vs} + \bar{i}_{vrsz}^* \cdot \bar{L}_{rsvsz} \cdot \bar{i}_{vsz} + \\ & + \bar{i}_{vrsz}^* \cdot \bar{L}_{rsvsa} \cdot \bar{i}_{vrsa} + \bar{i}_{vrsa}^* \cdot \bar{L}_{ravs} \cdot \bar{i}_{vs} + \bar{i}_{vrsa}^* \cdot \bar{L}_{ravs} \cdot \bar{i}_{vsz}). \end{aligned} \quad (8)$$

Замінивши симетричні складові просторових векторів часовими комплексами отримуємо можливість розрахувати електромагнітний момент в усталеному режимі роботи з врахуванням струмів еквівалентних

контурів втрат в сталі статора і ротора від вихрових струмів

$$\begin{aligned} M_e = & v \cdot (3 \cdot z_2)^{0,5} \cdot \text{Im}(I_r^* \cdot \bar{L}_{rvs} \cdot i_s) + v \cdot (z_1 \cdot z_2)^{0,5} \cdot \left[\text{Im}(I_r^* \cdot \bar{L}_{rvsz} \cdot i_{sz}) + \right. \\ & + \text{Im}(I_r^* \cdot \bar{L}_{rvsa} \cdot i_{sa}) + v \cdot (3 \cdot z_2)^{0,5} \cdot \left[\text{Im}(I_s^* \cdot \bar{L}_{svr} \cdot i_{rz}) + \right. \\ & + \text{Im}(I_s^* \cdot \bar{L}_{svsa} \cdot i_{ra}) + v \cdot (z_1 \cdot z_2)^{0,5} \cdot \left[\text{Im}(I_{sz}^* \cdot \bar{L}_{svsz} \cdot i_{rz}) + \right. \\ & + \text{Im}(I_{sa}^* \cdot \bar{L}_{svsa} \cdot i_{ra}) + \text{Im}(I_{sa}^* \cdot \bar{L}_{svsz} \cdot i_{rz}) + \text{Im}(I_{sz}^* \cdot \bar{L}_{svsa} \cdot i_{ra}) \left. \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Перша складова визначає момент взаємодії струмів ротора і струмів обмотки статора; друга і третя – від взаємодії роторних струмів з еквівалентними струмами втрат в сталі зубців і ярм статора відповідно; четверта і п'ята – від взаємодії статорних струмів з еквівалентними струмами втрат в сталі зубців і ярм ротора відповідно; шоста, сьома, восьма і дев'ята – від взаємодії еквівалентних струмів втрат в сталі зубців і ярм статора і ротора між собою.

ВИСНОВОК

Отримана система диференціальних рівнянь електричної рівноваги з урахуванням еквівалентних контурів втрат в сталі статора і ротора для комплексних змінних в системі координат, що обертаються синхронно з полем. Отримано вирази електромагнітних моментів для динамічних та статичних режимів.

Представлена математична модель дає змогу досліджувати динамічні і статичні характеристики АД з врахуванням нелінійних електромагнітних параметрів на етапі його проектування для інтенсивних режимів роботи.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Войтех А.А., Попович А.Н. Моделирование переходных процессов в полюсопереключаемых асинхронных двигателях. – Киев: Наук.думка, 1989. – 152 с.
- [2] Нейман Л.П., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т.2. – Л.: Энергия, 1967. – 407 с.
- [3] Попович А.Н. Математическая модель для расчета рабочих характеристик асинхронного двигателя с учетом потерь в стали // Техн.електродинамика. – 1999. – №4. – С. 46-52.

Надійшла 30.08.2005