

## ОСОБЛИВОСТІ $\Psi$ - ТА $A$ - МОДЕЛЕЙ АСИНХРОННОГО МОТОРА У ФАЗНИХ КООРДИНАТАХ

Чабан А., к.т.н.  
 Національний університет "Львівська політехніка"

*Запропоновано порівняльний аналіз  $\Psi$ -моделі та  $A$ -моделі асинхронного мотора у фазних координатах. А також показано новий підхід до формування  $A$ -моделі машин у фазних координатах. Диференціальні рівняння  $A$ -моделі представлені в нормальній формі Коші. Результати комп'ютерної симуляції використовуються для аналізу струмів та швидкості обертання асинхронної машини, які досліджувались на прикладі двох типів математичних моделей.*

*Предложен сравнительный анализ  $\Psi$ -модели и  $A$ -модели асинхронного двигателя у фазовых координатах. А также предложен иной подход к формированию  $A$ -модели машины у фазовых координатах. Дифференциальные уравнения  $A$ -модели представлены в нормальной форме Коши. Результаты расчета на ЭВМ использовались для анализа токов и скоростей вращения асинхронной машины, исследования которых проводилось двумя типами математических моделей.*

### ВСТУП

На сьогоднішній день асинхронний мотор є найосновніший споживач електромагнітної енергії, що виробляється в цілому світі. Тому, зрозуміло, що цей електротехнічний пристрій привертає до себе увагу з точки зору математичного моделювання. Застосування сучасної обчислювальної техніки дозволяє реалізувати найрізноманітніші та найскладніші моделі. У цій роботі пропонується особливості  $\Psi$ -та  $A$ -моделей асинхронних машин у їх алгоритмічній реалізації. Моделі будуються на основі фундаментальних законів електродинаміки[1].

Важливою проблемою електроенергетики є стабілізація напруги вузла навантаження енергосистеми (компенсація реактивної потужності, зрозуміло з абстрактної точки зору). Як відомо асинхронний двигун є один з основних елементів вузла. Тобто від вузла навантаження живиться подекуди кілька десятків машин. Зрозуміло, що в системі вузла навантаження виникають досить складні процеси. Немаловажну частку їх становлять механічні крутильні коливання, що виникають в машинах та валах електроприводу. Їх можливо описати лише поєднанням рівнянь електромагнітного стану та рівнянь механічного стану машини, записаних на основі рівнянь Лагранджа другого роду. Причому індуктор мотора розглядається як нежорстке тіло. У такому випадку кут повороту магнітної осі фази  $A$  ротора відносно магнітної осі фази  $A$  статора повинен входити в рівняння електромагнітного стану машини явно. А це можливо лише при проведенні розрахунків режимів електроприводу у фазних координатах. У цій роботі пропонується спрощений варіант моделі, а саме: ротор розглядається як абсолютно жорстке тіло та нехтується дисипацією теплової енергії індуктора.

### $\Psi$ - МОДЕЛЬ АСИНХРОННОГО МОТОРА

Розглянемо  $\Psi$ - модель індукційної машини. Запишемо рівняння рівноваги напруг і е.р.с. статора й ротора[1]:

$$\frac{d\Psi_S}{dt} = u_S - R_S \cdot i_S; \quad \frac{d\Psi_R}{dt} = -R_R \cdot i_R, \quad (1)$$

де  $\Psi_S, \Psi_R$  – вектор-стовпці повних потокозчеплень статора й ротора відповідно;  $R_S, R_R$  – матриці опорів обмоток статора й ротора відповідно;  $i_S, i_R$  – вектор-стовпці струмів фаз статора й ротора відповідно;  $u_S$  – вектор-стовпець фазних напруг статора:

$$\Psi_S = \alpha_S^{-1} \cdot i_S + \psi_S; \quad \Psi_R = \alpha_R^{-1} \cdot i_R + \psi_R, \quad (2)$$

де  $\psi_S, \psi_R$  – вектор-стовпці робочих потокозчеплень статора й ротора відповідно;  $\alpha_S = L_S^{-1}, \alpha_R = L_R^{-1}$  – матриці релактивностей дисипації обмоток статора й ротора відповідно.

Запишемо вирази модуля просторового вектора робочого потокозчеплення та намагнічувального струму мотора[1]:

$$\psi_m = 2 \cdot \sqrt{(\psi_A^2 + \psi_A \cdot \psi_B + \psi_B^2)/3}, \quad i = \tau(\psi_m) \quad (3)$$

$$\tau = 1/L_m, \quad \rho = \partial\psi_m / \partial i_m = \tau^\rho, \quad (4)$$

де  $L_m = L_m(i_m)$  – індуктивність намагнічування машини;  $\psi_m$  – основне (робоче) потокозчеплення машини;  $i_m$  – струм намагнічення машини;  $\tau_m, \rho$  – статична та диференціальна реактивність намагнічування машини.

$$\Psi_S = \psi = \tau \cdot (i_S + \Pi \cdot i_R); \quad \Psi_R = \tau \cdot (i_S + \Pi \cdot i_R);$$

$$\psi_R = \Pi^{-1} \cdot \psi \quad (5)$$

$$i_S = \alpha_S \cdot (\Psi_S - \psi); \quad i_R = \alpha_R \cdot (\Psi_R - \Pi^{-1} \cdot \psi) \quad (6)$$

$$\Pi = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \begin{matrix} \sin(y + 2 \cdot \pi/3) & -\sin y \\ \sin y & -\sin(y - 2 \cdot \pi/3) \end{matrix} \quad (7)$$

$$\Pi^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \begin{matrix} -\sin(y - 2 \cdot \pi/3) & \sin y \\ -\sin y & \sin(y + 2 \cdot \pi/3) \end{matrix} \quad (8)$$

При живленні машини несиметричною системою напруг матриця опорів обмоток статора виглядає так[2]:

$$R_s = \frac{1}{3} \cdot \begin{matrix} 2 \cdot R_{SA} + R_{SC} & R_{SC} - R_{SB} \\ R_{SC} - R_{SA} & 2 \cdot R_{SB} + R_{SC} \end{matrix} \quad (9)$$

Запишемо систему рівнянь на основі першого закону Кірхгофа для електричних та магнітних кіл і рівняння несиметричних напруг живлення машини з ізо-

льованою нейтраллю статора:

$$\Psi_{SA} + \Psi_{SB} + \Psi_{SC} = 0; \Psi_{RA} + \Psi_{RB} + \Psi_{RC} = 0, \quad (10)$$

$$\psi_A + \psi_B + \psi_C = 0; u_{SA} + u_{SB} + u_{SC} = V_0, \quad (11)$$

$$i_{SA} + i_{SB} + i_{SC} = 0; u_{RA} + u_{RB} + u_{RC} = 0, \quad (12)$$

де  $A, B, C$  – фази живлення мотора;  $V_0$  – напруга зміщення нейтралей статора та джерела живлення.

Аналізуючи (10)–(12), рівняння записуємо лише для величин фаз  $A$  та  $B$ .

Розв'язуючи сумісно (1)–(12) та враховуючи [1],[2], отримуємо шукані рівняння:

$$\frac{d\Psi_S}{dt} = u_S - R_S \cdot \alpha_S \cdot (\Psi_S - \psi), \quad (13)$$

$$\frac{d\Psi_R}{dt} = -R_R \cdot \alpha_R \cdot (\Psi_R - \Pi^{-1} \cdot \psi), \quad (14)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} \left( (i_S + \Pi \cdot i_R) / \tau \right). \quad (15)$$

Розпишемо складену похідну (15) для робочих поточкозчеплень:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\left( k_1 \cdot (2\psi_A + \psi_B) \cdot \frac{d\psi_A}{dt} + k_2 \cdot (2\psi_B + \psi_A) \cdot \frac{d\psi_B}{dt} \right) \cdot A + B}{m}, \quad (16)$$

$$m = 1 + \frac{\alpha_S + \alpha_R}{\tau}, \quad (17)$$

$$k_1 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\rho - \tau}{i_m^2} \cdot (2\psi_A + \psi_B), \quad (18)$$

$$k_2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\rho - \tau}{i_m^2} \cdot (2\psi_B + \psi_A), \quad (19)$$

$$A = \alpha_S \cdot \Psi_S + \alpha_R \cdot \Pi \cdot \Psi_R - (\alpha_S + \alpha_R) \cdot \psi, \quad (20)$$

$$B = \frac{\alpha_S \cdot u_S - R_S \cdot \alpha_S^2 \cdot \Psi_S}{\tau} +$$

$$\alpha_S \left( \frac{d\Pi}{dt} + \alpha_R \cdot R_R \cdot \Pi \right) \cdot \Psi_R + \frac{\left( R_S \cdot \alpha_S^2 + R_R \cdot \alpha_R^2 \right) \psi}{\tau} \quad (21)$$

Розв'язуючи сумісно (13)–(21) представляємо систему рівнянь (16) в нормальній формі Коші.

Доповнимо систему (1)–(21) рівняннями руху ротора:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p_0}{J} \cdot (M_E - M(\omega)); \frac{d\gamma}{dt} = \omega(t), \quad (22)$$

$$M_E = \sqrt{3} \cdot p_0 \cdot (i_{RA}^{\Pi} \cdot i_{SB} - i_{RB}^{\Pi} \cdot i_{SA}) / \tau, \quad (23)$$

$$\text{де } i_{RA}^{\Pi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (i_{RA} \cdot \sin(\gamma - 2\pi/3) - i_{RB} \cdot \sin \gamma), \quad (24)$$

$$i_{RB}^{\Pi} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (i_{RA} \cdot \sin \gamma - i_{RB} \cdot \sin(\gamma + 2\pi/3)), \quad (25)$$

$$M(\omega) = 2,257 \cdot \omega + 0,744 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^3 + 0,211 \cdot 10^{-10} \cdot \omega^5, \quad (26)$$

де  $\omega$  – кутова швидкість обертання індуктора відносно нерухомого якоря;  $\gamma$  – кут повороту магнітної осі фази  $A$  індуктора відносно магнітної осі фази  $A$  якоря;  $p_0, J$  – число пар магнітних полюсів машини та сумарний момент інерції ротора мотора й приводу.

Струми (причому в реальній(фазній) системі ко-

ординат) знаходимо з системи рівнянь (6). Система (3)–(26),(36),(37) – репрезентує  $\Psi$  – модель машини у фазних координатах.

#### A– МОДЕЛЬ АСИНХРОННОГО МОТОРА

Розглянемо  $A$ – модель асинхронного мотора з короткозамкненим ротором. Аналізуючи (1)–(21), можна зробити висновок, що повні та основні потокозчеплення ротора й статора можна виразити через струми ротора й статора відповідно. Такий підхід досить складний і приводить до громіздких обчислень. У даній роботі пропонується дещо інший підхід.

Розглянемо відому  $A$ – модель у косокутних координатах[1],[2], зауваживши, що струми і потокозчеплення ротора є перетвореними величинами тобто у віртуальній системі координат:

$$\Psi_R^{\Pi} = \Pi \cdot \Psi_R, \psi_R^{\Pi} = \Pi \cdot \psi_R = \psi, i_R^{\Pi} = \Pi \cdot i_R, \quad (27)$$

$$\frac{di_S}{dt} = A_S \cdot (u_S - R_S \cdot i_S) + A_{SR} \cdot (-\Omega \cdot \Psi^{\Pi} - R_S \cdot i_S^{\Pi}), \quad (28)$$

$$\frac{di_R^{\Pi}}{dt} = A_{RS} \cdot (u_S - R_S \cdot i_S) + A_R \cdot (-\Omega \cdot \Psi^{\Pi} - R_R \cdot i_R^{\Pi}), \quad (29)$$

$$\Omega = \Pi \cdot \frac{d\Pi^{-1}}{dt} = -\Pi^{-1} \cdot \frac{d\Pi}{dt} = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline -2 & -1 \\ \hline \end{array} \quad (30)$$

Розв'яжемо сумісно системи алгебро-диференціальних рівнянь (27)– (30), отримаємо:

$$\frac{di_S}{dt} = A_S \cdot (u_S - R_S \cdot i_S) + A_{SR} \cdot \Pi \cdot (-\Omega \cdot \Psi - R_R \cdot i_R), \quad (31)$$

$$\frac{di_R}{dt} = \Pi^{-1} \cdot A_{RS} \cdot (u_S - R_S \cdot i_S) +$$

$$+ \Pi^{-1} \cdot A_R \cdot \Pi \cdot (-\Omega \cdot \Psi - R_R \cdot i_R) + \Omega \cdot i_R, \quad (32)$$

$$A_S = \alpha_S \cdot (1 - \alpha_S \cdot G), A_{SR} = A_{RS} = -\alpha_S \cdot \alpha_S \cdot G,$$

$$A_R = \alpha_R \cdot (1 - \alpha_R \cdot G), \quad (33)$$

$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline T + b_A \cdot i_A & b_B \cdot i_A \\ \hline b_A \cdot i_B & T + b_B \cdot i_B \\ \hline \end{array} \quad (34)$$

$$R = 1/(\alpha_S + \alpha_R + \rho), T = 1/(\alpha_S + \alpha_R + \tau), \quad (35)$$

$$b = \frac{2}{3} \cdot \frac{R - T}{i_m^2}, b_A = b \cdot (2i_A + i_B), b_B = b \cdot (2i_B + i_A). \quad (36)$$

Система (22)–(26), (29)–(38) репрезентує  $A$ – модель асинхронного мотора у фазних координатах. Порівнюючи два типи моделей легко бачити, що кількість рівнянь  $A$ – моделі є на два рівняння менше, причому система представлена в нормальній формі Коші. Тепер проведемо аналіз цих моделей на прикладі розрахунку струмів статора та кутової швидкості обертання ротора реального мотора з вентиляторним моментом на валу індуктора. Розрахунок проводився на ФОРТРАН– програмі методом Рунге–Кутта 4–го порядку.

#### РЕЗУЛЬТАТИ КОМП'ЮТЕРНОЇ СИМУЛЯЦІЇ

Результати комп'ютерної симуляції виконані для вхідних даних, що приблизно відповідають реальним експлуатаційним умовам асинхронного мотора А 12-52-8А. Паспортні дані мотора:  $P_H = 320$  кВт,  $U_H = 6$  кВ,  $I_H = 39$  А,  $\omega_H = 740$  об/хв.,  $R_S = 1,270$  Ом,  $R_R = 1,31$  Ом,  $L_S = 0,0257$  Гн,  $L_R = 0,028$  Гн,  $p_0 = 4$ ,  $J = 64,5$  кг·м<sup>2</sup>. Крива

намагнічування машини:

$$\Psi_m = \begin{cases} 8182 \cdot i_m, & \text{if } i_m \leq 11; \\ 9 + 0,508 \cdot (i_m - 11) + 0,0064 \cdot (i_m - 11)^2 + \\ + 0,000147 \cdot (i_m - 11)^3, & \text{if } 11 < i_m < 40; \\ 0,2375 + 23,19 \cdot i_m, & \text{if } 40 \geq i_m \end{cases}, \quad (37)$$

$$u_{SA} = 4900 \cdot \sin(\omega t), \quad u_{SB} = 4900 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad (38)$$

Розглянемо для порівняльного аналізу розгін вищевказаного двигуна з вентиляторним моментом на валу ротора (26). Цей тип приводу застосовується на заводі "Азовсталь" в Маріуполі.

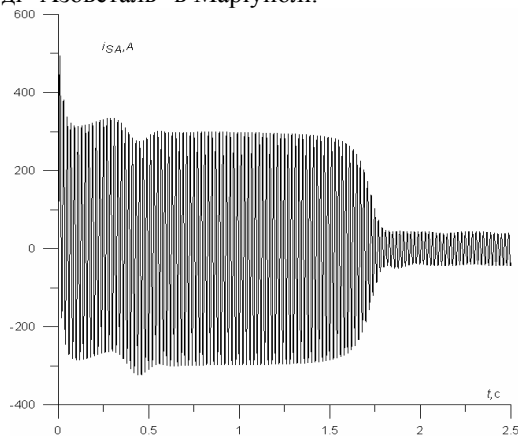


Рис. 1. Струм фази А статора при пуску мотора ( $\Psi$ - модель)

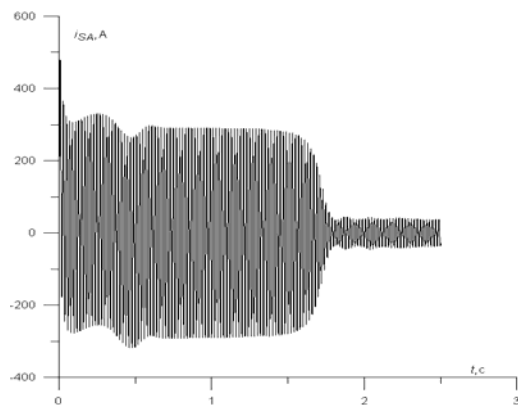


Рис.2. Струм фази А статора при пуску мотора ( $A$ -модель)

Як бачимо з приведених графіків, струми в статорі машини для обох типів моделей відтворюють майже однакову картину. Але якщо придивитись на два графіки в збільшеному вигляді, то можна побачити кращу стійкість процесу інтегрування рівнянь на рис.2, що пояснюється меншою кількістю самих рівнянь стану, а відтак, і точністю інтегрування рівнянь електромагнітного та механічного станів індукційної машини.

Як показано на рис.3 та рис.4, на другому рисунку видна плавніша та стійкіша картина розгону асинхронного мотора. На рис.3 видно, що в момент пуску машини крива швидкості розгону електроприводу заходить частково в від'ємну частину осі ординат, що неможливо з фізичних міркувань. Ця неточність пояснюється недостатньою збіжністю процесу тобто точністю розв'язання рівнянь. Натомість на рис.4 видна реальна фізична картина в момент пуску мотора.

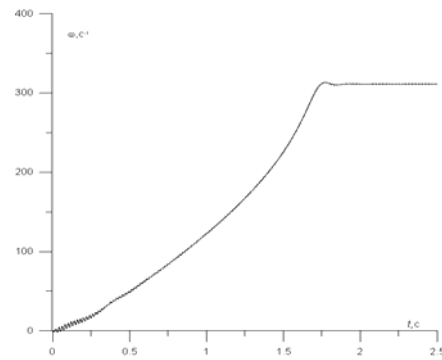


Рис3. Швидкість обертання мотора при пуску ( $\Psi$ -модель)

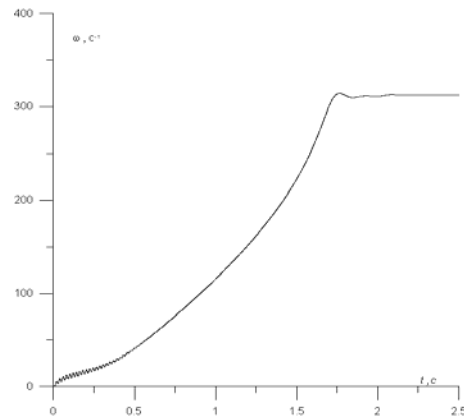


Рис 4. Швидкість обертання мотора при запуску ( $A$ -модель)

## ВИСНОВКИ

Аналізуючи рівняння запропонованих моделей та результати комп'ютерної симуляції двох типів моделей, можна зробити наступні висновки:  $A$ -модель містить меншу кількість рівнянь;  $A$ -модель представлена лише диференціальними рівняннями записаними в нормальній формі Коші; криві струмів та швидкостей машини в  $A$ -моделі містять меншу кількість флуктуацій, що пов'язано з відніманням двох близьких величин у  $\Psi$ -моделі (6). Точність інтегрування рівнянь в  $A$ -моделі є вищою, і, як наслідок, дана модель якісніше відтворює фізичну картину в досліджуваній моделі.

Аналізуючи сказане вище, слідує очевидний факт того, що для аналізу складних режимів вузла навантаження доцільно використовувати  $A$ -модель асинхронної машини; особливо коли розглядаються глибокопазні мотори [2]. А при врахуванні крутильних коливань механічних систем електроприводів, диференціальні рівняння механічного стану яких є досить штивними,  $A$ -модель асинхронного мотора у фазних координатах посідає домінуючу роль[1].

## ЛІТЕРАТУРА

- [1] Чабан В. Математичне моделювання електромеханічних процесів.– Львів–1997–344с.
- [2] Чабан А. Симуляція комутаційних перенапруг глибокопазного асинхронного мотора, що живиться через кабель.– Електротехніка і електромеханіка–2004'3 с.61-64.

Надійшла 19.05.2005