

О.Г. РЕВУНОВА, канд. техн. наук, Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій і систем НАН та МОН України, просп. Глушкова, 40, Київ 03187, Україна.
helab@i.com.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИСКРЕТНИХ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ВИПАДКОВИХ ПРОЕКЦІЙ

Для розв'язання дискретних некоректних задач на основі аналітичного усереднення випадкового проектування розроблено метод визначення оптимальної розмірності випадкової матриці, який забезпечує помилку розв'язку таких задач, близьку до мінімальної.

Ключові слова: дискретна некоректна задача, регуляризація, випадкове проектування.

Вступ

Дискретні некоректні задачі (ДНЗ) [1–3] часто виникають при відновленні сигналів, отриманих в результаті непрямих вимірювань [3–5]. Сталий розв'язок ДНЗ може бути отриманий, наприклад, методами усіченого сингулярного розкладу [6–9] і випадкових проекцій [10–15].

Актуальним є дослідження та порівняльний аналіз помилки розв'язання для цих двох методів. У даній статті наведено огляд робіт, присвячених аналітичному усередненню помилки за випадковими матрицями для методу розв'язання ДНЗ на основі випадкових проекцій [16, 17]. Усереднення помилки за випадковими матрицями дозволяє намітити підхід до дослідження зв'язку методів усіченого сингулярного розкладу та випадкових проекцій, а також підвищення точності розв'язання ДНЗ методом випадкових проекцій.

Для методу розв'язання ДНЗ, запропонованого у [18], розроблено метод визначення оптимальної розмірності випадкової матриці, яка забезпечує помилку розв'язку ДНЗ, близьку до мінімальної.

Розв'язання ДНЗ на основі випадкових проекцій

Задача оцінювання вектора сигналу $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ для моделі

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

де відомі матриця $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{N \times N}$ та вектор вимірювань $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^N$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{b}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}$ в разі, коли послідовність сингулярних чисел матриці \mathbf{A} плавно прямує до нуля (але не досягає його) — належить до класу дискретних некоректних задач [1, 2]. Матриця \mathbf{A} є матрицею повного рангу.

Для отримання розв'язку на основі цього підходу обидві частини вихідного рівняння (1) множимо на матрицю $\mathbf{R}_k \in \mathcal{R}^{k \times N}$, елементи якої — реалізації випадкової величини з гаусовим розподілом, нульовим середнім і одиничною дисперсією. Отримуємо рівняння:

$$\mathbf{R}_k \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{R}_k \mathbf{b} \quad (2)$$

і оцінку вектора входу

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b}, \quad (3)$$

де $(\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+$ — псевдообернена матриця.

Помилка відновлення вектора входу \mathbf{x} є

$$e_R = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2. \quad (4)$$

Для пошуку k , що забезпечує значення помилки розв'язку, близьке до мінімального, розроблено підхід, розглянутий в [9, 12]. Отримано нерівності, які характеризують значення k , при якому помилка мінімальна.

В роботі [12] для методу випадкових проєкцій отримано вираз середньоквадратичної помилки відновлення \mathbf{x} :

$$e_R(k) = \left\| ((\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{x} \right\|^2 + \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^{+T} (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k) \quad (5)$$

та її складових:

$$e_{Rd}(k) = \left\| ((\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{x} \right\|^2, \\ e_{Rs}(k) = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^{+T} (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k), \quad (6)$$

де e_{Rd} — детермінована складова помилки відновлення \mathbf{x} та e_{Rs} — стохастична.

При дослідженні точності розв'язання ДНЗ методом випадкових проєкцій вивчають вплив на точність розв'язання двох незалежних випадкових величин: адитивного шуму у векторі виходу (розподіл якого вважають гаусовим, а дисперсію в загальному випадку — невідомою) та випадкової величини, яка формує випадкову матрицю (розподіл гаусів, дисперсія одинична). Зміна кількості рядків k випадкової матриці призводить до зміни точності розв'язку ДНЗ. За відсутності шуму в векторі виходу зростання кількості рядків випадкової матриці веде до зменшення помилки розв'язку. Зашумленість вектора виходу спричинює появу складової помилки, значення якої зростає зі збільшенням кількості рядків випадкової матриці. Тому залежність помилки розв'язку ДНЗ від кількості рядків випадкової матриці (при деяких рівнях шуму) має мінімум при $k < N$.

Для того, щоб зробити залежність помилки від кількості рядків випадкової матриці більш гладкою та полегшити таким чином пошук мінімуму, в роботах [9–12] автором проведено усереднення за шумом у векторі виходу.

Дослідження [9, 12] показали, що усереднення за випадковими матрицями веде до згладжування залежності $e_R(k)$ та зменшення кількості локальних мінімумів. Тому аналітичне усереднення за випадковими матрицями може привести до простіших виразів для $e_{Rd}(k)$, полегшити подальше аналітичне дослідження і підвищення точності методу розв'язання ДНЗ на основі методу випадкових проєкцій.

Усереднення за випадковими матрицями матричних структур спеціального виду

В роботах [19, 20] були отримані суттєві результати, пов'язані з усередненням (знаходженням м.с.) за випадковими матрицями \mathbf{R}_k виразів виду:

$$E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{B} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \}, \\ E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{Z} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \}, \quad (7)$$

де $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ — будь-яка симетрична позитивно напіввизначена матриця, $\text{rank}(\mathbf{B}) < k$, $\mathbf{Z} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ — діагональна матриця власних значень матриці \mathbf{B} .

Розглянемо результат, пов'язаний з усередненням $\mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{B} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k$. Нехай \mathbf{R}_k — матриця

$(k \times N)$ з елементами $r_{ij}^{i.i.d.} \sim N(0, \sigma^2)$,

$\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ — будь-яка симетрична позитивно напіввизначена (PSD) матриця, власний розклад якої $\mathbf{B} = \mathbf{U} \mathbf{Z} \mathbf{U}^T$, де \mathbf{Z} — діагональна матриця власних значень матриці \mathbf{B} , значення діагональних елементів якої впорядковані за спаданням, \mathbf{U} — ортогональна матриця ($\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$).

Тоді

$$E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{B} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \} = \\ = E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{Z} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \} \mathbf{U}^T. \quad (8)$$

Для структури виду $\mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{Z} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k$, в [19] (розд. V) показано, що

$$E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{Z} \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \} = \\ = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu, \dots, \mu) \equiv \mathbf{D}_k(\mathbf{Z}_m), \quad (9)$$

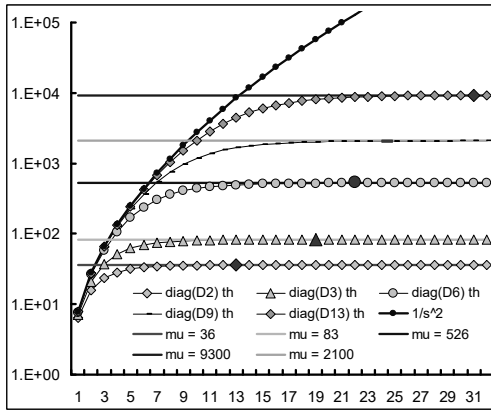


Рис. 1

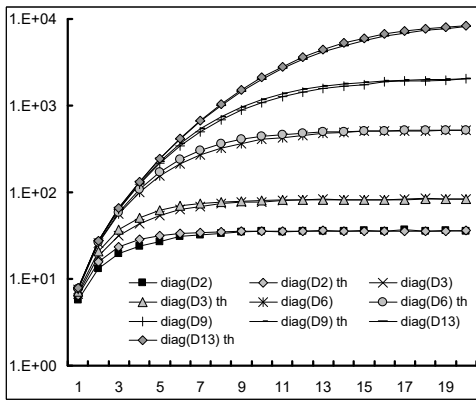


Рис. 2. Елементи $\text{diag}(\mathbf{D}_k)$, отримані експериментально та теоретично при $k = \{2, 3, 6, 9, 13\}$ для задачі Carasso

тобто $\mathbf{D}_k(\mathbf{Z}_m)$ ($N \times N$) є діагональною, де

$$\lambda_i = \frac{\mu}{1 + \mu s_i^2}, \mu = \text{const}, n - m \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \mu s_i^2}.$$

Проведемо дослідження виконання виразу (9) для двох задач Carasso [21] та Phillips [22].

Задача Carasso — реконструкція часового профілю джерела тепла на основі вимірювання температури з фіксованої відстані. Обернене рівняння теплового потоку тут — інтегральне рівняння Вольтерри першого роду з інтервалом інтегрування $[0, 1]$. Ядром є $K(s, t) = k(s - t)$, $k(t) = (t^{-3/2} / 2\pi^{1/2}) \exp(-1/4t)$. Інтегральне рівняння дискретизується методом квадратур з використанням простої колокації і правила середньої точки з N точками. Конструюється точне розв'язання \mathbf{x} , і \mathbf{b}_0 потім

обчислюється як $\mathbf{b}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}$, тобто в цій задачі $\mathbf{A}\mathbf{x}$ точно дорівнює \mathbf{b}_0 .

Задача Phillips — розв'язання рівняння Фредгольма першого роду $\int_a^b K(s, t) f(t) dt = g(s)$. Розв'язок f , ядро K , права частина g мають вигляд, відповідно: $f(t) = 1 + \cos(\pi t / 3)$ при $|t| < 3$, $f(t) = 0$ при $|t| \geq 0$; $K(s, t) = f(s - t)$; $g(s) = (6 - |s|)(1 + 0,5 \cos(\pi s / 3)) + (9 / 2\pi) \sin(\pi |s| / 3)$.

Інтервал інтегрування $[-6, 6]$. Дискретизація здійснюється методом Гальоркіна. Розмір матриці \mathbf{A} має бути кратний чотирьом. У цій задачі $\mathbf{A}\mathbf{x}$ не точно дорівнює \mathbf{b}_0 .

Дослідження виконання виразу (9) показало, що послідовність $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ не тільки обмежується зверху послідовністю $\frac{1}{s_1^2}, \dots, \frac{1}{s_m^2}$, а

й декілька початкових значень діагоналі матриці \mathbf{D}_k з великою точністю наближаються до

$\frac{1}{s_i^2}$. Наприклад, для задачі Carasso [21] значення елементів діагоналі матриці \mathbf{D}_k при $k = \{2, 3, 6, 9, 13\}$ подано на рис. 1, де також подані значення $\frac{1}{s_i^2}$ та μ .

Якщо вдасться аналітично показати, що для деякого $p < m$ $d_i = \frac{1}{s_i^2}$, то це дозволить аналітично дослідити зв'язок усіченого SVD і методу випадкових проєкцій, попереднє дослідження якого подано у додатку.

Усереднення за випадковими матрицями спричинює діагоналізацію матриці, що входить в обидві складові помилки (детерміновану та стохастичну). Значення діагональних елементів змінюються монотонно в залежності від k . Що, в свою чергу, призводить до згладжування залежностей $e_x(k)$, $e_y(k)$ і зменшення кількості локальних мінімумів. Результати експериментального дослідження

показали зв'язок елементів діагоналізованої матриці з сингулярними числами вихідної. Це створює основу для дослідження зв'язку усеченого *SVD* і методу випадкових проекцій.

Для задач *Phillips* [22] і *Carasso* [21] проведено наступні експерименти. Обчислювалося математичне сподівання $E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{S}^2 \mathbf{R}_k^T)^+ \mathbf{R}_k \}$ шляхом усереднення за 10^4 випадковими матрицями: згенеровано 10^4 матриць \mathbf{R}_{ki} для кожного k , обчислено 10^4 матриць $\mathbf{M}_{ki} = \mathbf{R}_{ki}^T (\mathbf{R}_{ki} \mathbf{S}^2 \mathbf{R}_{ki}^T)^+ \mathbf{R}_{ki}$, матриці \mathbf{D}_k (9) отримані як $\mathbf{D}_k = \sum_{i=1}^{10^4} \mathbf{M}_{ki} / 10^4$. Значення елементів

діагонали матриці, отриманої внаслідок усереднення, показані на рис. 2 і 3. Теоретичні значення елементів діагонали матриці \mathbf{D}_k , розраховані по (9), наведені на рис. 2 і 3 з позначкою «*th*».

З рисунків видно, що теоретичні значення елементів діагонали матриці \mathbf{D}_k (отримані по (9)) близькі до значень елементів діагонали, отриманих експериментально.

Розглянемо зведення складових помилки відновлення істинного сигналу (6) до вигляду, що містить матричні структури (7) і усереднення помилки за випадковими матрицями.

Усереднення помилки відновлення істинного сигналу за випадковими матрицями

Перетворимо $(\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+$ так, щоб вираз містив матричну структуру виду (7). Оскільки $\text{rank}(\mathbf{R}_k \mathbf{A}) = k$, $(\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ = (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^T (\mathbf{R}_k \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{R}_k^T)^{-1}$. Запишемо вирази для складових помилки:

$$e_{R_d}(k) = \left\| ((\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{x} \right\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (10)$$

$$e_{R_s}(k) = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{A}) = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k). \quad (11)$$

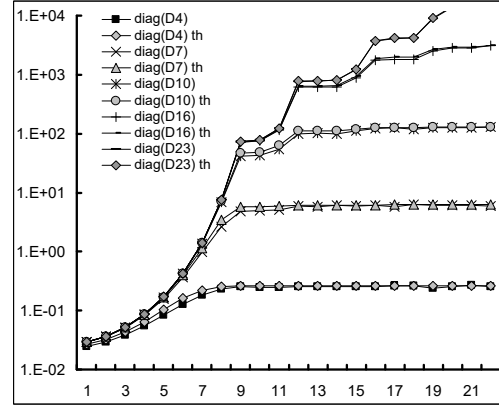


Рис. 3. Елементи $\text{diag}(\mathbf{D}_k)$, отримані експериментально та теоретично при $k = \{4, 7, 10, 16, 23\}$ для задачі *Phillips*

В [17] проведено усереднення помилки відновлення істинного сигналу за реалізаціями випадкових матриць:

$$E_R \{ \mathbf{e} \} = E_R \{ \mathbf{e}_{R_d} \} + E_R \{ \mathbf{e}_{R_s} \} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \} \mathbf{A} \mathbf{x} + \sigma^2 \text{trace} E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \}. \quad (12)$$

$$E_R \{ \mathbf{e} \} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{U} \mathbf{S}^2 \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{x} + \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T).$$

Для розв'язання ДНЗ методом випадкового проектування експериментально отримано величину помилки (12) та її складових ($E_R \{ \mathbf{e}_{R_d} \}$, $E_R \{ \mathbf{e}_{R_s} \}$) при усередненні за 10^4 матрицями (рис. 4 і 5). Теоретичні значення помилки та її складових (детермінованої та стохастичної), обчислені з використанням теоретичних значень $\text{diag}(\mathbf{D}_k)$ (9), наведені з позначкою — «*th*».

Порівняння залежностей помилки та її складових, отриманих аналітично і експериментально після усереднення за випадковими матрицями, показало хороший збіг теоретичних залежностей з експериментальними.

Розклад помилки на складові виду (12) не дозволяє виявити всю структуру помилки: зміщення та дисперсія помилки, що з'являються через усереднення за реалізаціями випадкової матриці, не виражені явно і тому не можуть бути проаналізовані.

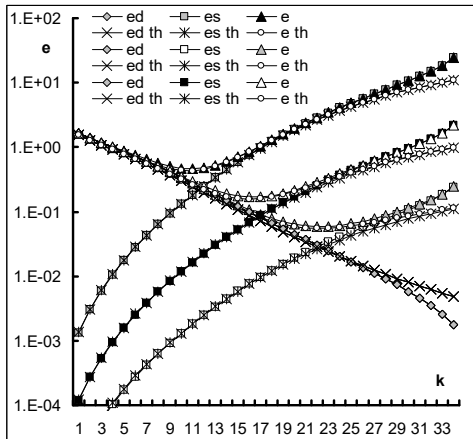


Рис. 4. Задача Phillips

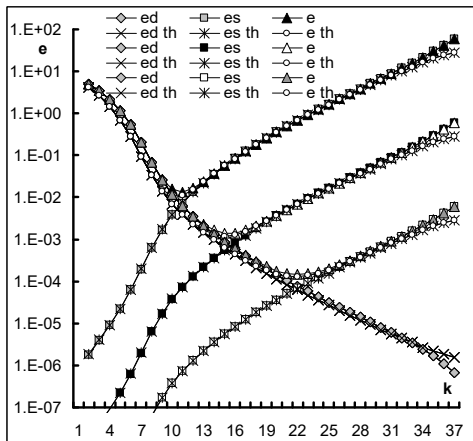


Рис. 5. Задача Carasso

У сфері машинного навчання традиційно досліджують зміщення та дисперсію помилки, які виникають через адитивний шум у векторі виходу [23, 24]. Для методу випадкового проектування зміщення та дисперсія помилки, спричинені шумом у векторі виходу, досліджено у [11, 12, 15].

Складові зсуву і дисперсії при усередненні помилки (5) за реалізаціями випадкової матриці \mathbf{R}_k отримано у [18].

Дисперсія помилки відновлення вектора входу ϵ

$$e_R^V = E_R \left\| \bar{\mathbf{x}} - (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b} \right\|^2 = \mathbf{b}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b} - \left\| \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b} \right\|^2, \quad (13)$$

де $\bar{\mathbf{x}} = E_R \{ (\mathbf{R}_k \mathbf{A})^+ \mathbf{R}_k \mathbf{b} \} = \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}$.

Зсув помилки відновлення вектора входу

$$e_R^B = \left\| \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \right\|^2 = \left\| \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b} \right\|^2. \quad (14)$$

Середня за випадковими матрицями помилка відновлення вектора входу \mathbf{x} є

$$E_R \{ e_R \} = e_R^B + e_R^V = \left\| \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b} \right\|^2 + \mathbf{b}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b} - \left\| \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b} \right\|^2. \quad (15)$$

У [18] показано, що усереднення (15) за шумом у векторі виходу приводить до виразу

$$E_e \{ E_R \{ e_R \} \} = E_e \{ e_R^V \} + E_e \{ e_R^B \} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}_0^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0 + \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{U} \mathbf{S}^2 \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{x} + \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T), \quad (16)$$

який збігається з (12).

В роботі [18] запропоновано здійснювати відновлення вектора входу в такий спосіб:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}, \quad (17)$$

де \mathbf{U} отримана з *SVD*-розкладу $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T$, а \mathbf{D}_k з $E_R \{ \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_k \mathbf{S}^2 \mathbf{R}_k^T)^{-1} \mathbf{R}_k \} = \mathbf{D}_k$.

Помилка відновлення вектора входу для оцінки $\tilde{\mathbf{x}}$, менша за помилку для оцінки \mathbf{x}^* на величину дисперсії e_R^V (що з'являється в наслідок множення на випадкову матрицю та подальшого усереднення). Метод розв'язання ДНЗ за (17) далі називатимемо детермінованим методом на основі аналітичного усереднення випадкового проектування (*DRP*).

Враховуючи, що оцінка вектора виходу $\tilde{\mathbf{b}}$ отримана, виходячи з оцінки вектора входу (17), є $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}$, запишемо помилку відновлення вектора виходу для методу *DRP*

$$e_{b, DR} = \left\| \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{b}_0 \right\|^2 = \left\| \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b} - \mathbf{b}_0 \right\|^2 = \left\| \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T (\mathbf{b}_0 + \boldsymbol{\epsilon}) - \mathbf{b}_0 \right\|^2 = \left\| \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_0 \right\|^2 + \left\| \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\epsilon} \right\|^2 - 2 \left\langle (\mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_0), \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\epsilon} \right\rangle. \quad (18)$$

Проведемо усереднення помилки (18) за реалізаціями шуму:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{b_{DR}} = E_{\varepsilon} \{e_{b_{DR}}\} &= \left\| \mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_0 \right\|^2 + \\ &+ E_{\varepsilon} \left\{ \left\| \mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2 \right\} - \\ &- 2E_{\varepsilon} \left\{ \left\langle (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_0), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon} \left\{ \left\| \mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2 \right\} &= \\ = \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T)^T \mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T) \end{aligned}$$

та

$$E_{\varepsilon} \left\{ \left\langle (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_0), \mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle \right\} = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_{b_{DR}} &= \left\| (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \mathbf{b}_0 \right\|^2 + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T)^T \mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T). \end{aligned} \quad (20)$$

Для визначення мінімуму помилки застосовувати безпосередньо вираз (20) неможливо через наявність в ньому невідомого в реальних умовах \mathbf{b}_0 , тому, використовуючи отриманий в результаті вимірювань вектор \mathbf{b} та вектор шуму $\boldsymbol{\varepsilon}$, запишемо невідомий вектор як $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b} - \boldsymbol{\varepsilon}$ та проведемо усереднення за реалізаціями шуму:

$$\begin{aligned} CR_{DR} &= E_{\varepsilon} \left\{ \left\| (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I})(\mathbf{b} - \boldsymbol{\varepsilon}) \right\|^2 \right\} + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T)^T \mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T) = \\ &= E_{\varepsilon} \left\{ \left\| (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \mathbf{b} \right\|^2 \right\} + \\ &+ E_{\varepsilon} \left\{ \left\| (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2 \right\} - \\ &- 2E_{\varepsilon} \left\{ \left\langle (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \mathbf{b}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle \right\} + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T)^T \mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T). \end{aligned} \quad (21)$$

Третій доданок перетворимо наступним чином:

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon} \left\{ \left\langle (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \mathbf{b}, (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle \right\} &= \\ = E_{\varepsilon} \left\{ \left\langle (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (\mathbf{b}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}), (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle \right\} = \end{aligned}$$

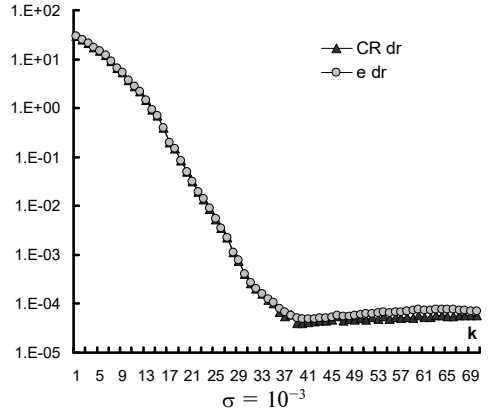
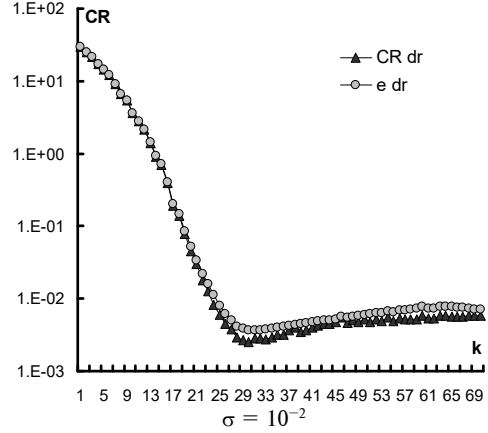


Рис. 6. Залежність CR_{DR} та помилки відновлення вектора виходу методу DRP від k при рівнях шуму $\sigma = \{10^{-2}, 10^{-3}\}$

$$\begin{aligned} &= E_{\varepsilon} \left\{ \left\langle (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \mathbf{b}_0, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle \right\} + \\ &+ E_{\varepsilon} \left\{ \left\langle (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Враховуючи, що,

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon} \left\{ \left\langle (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon}, (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle \right\} &= \\ = \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I})) \end{aligned}$$

та підставивши

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon} \left\{ \left\langle (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \mathbf{b}_0, \right. \right. \\ \left. \left. (\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{U}\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle \right\} &= 0 \end{aligned}$$

у вираз (21), отримаємо:

$$CR_{DR} = E_{\varepsilon} \left\{ \left\| (AA^T U D_k U^T - I) \mathbf{b} \right\|^2 \right\} - \sigma^2 \text{trace}((AA^T U D_k U^T - I)^T \times (AA^T U D_k U^T - I)) + \sigma^2 \text{trace}((AA^T U D_k U^T)^T AA^T U D_k U^T). \quad (23)$$

CR_{DR} є функція, що апроксимує помилку відновлення вектора виходу методу DRP .

Усереднення за реалізаціями шуму $E_{\varepsilon} \left\{ \left\| (AA^T U D_k U^T - I) \mathbf{b} \right\|^2 \right\}$ у практичних застосуваннях може бути обчислена шляхом багаторазового вимірювання вектора виходу $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_L\}$ та подальшого обчислення $\sum_{i=1}^L \left\| (AA^T U D_k U^T - I) \mathbf{b}_i \right\|^2 / L$.

Експериментальні дослідження проведені нижче, для однієї реалізації вектора шуму: $L=1$ з метою поставити в однакові умови критерій CR_{DR} та критерії Cp , AIC , MDL , для

яких усереднення вектора виходу не проводилося.

Побудуємо залежність CR_{DR} та помилки відновлення вектора виходу $\bar{\varepsilon}_{b, DR}$ від k при рівнях шуму $\sigma = \{10^{-2}, 10^{-3}\}$ для задачі *Phillips*.

Як видно з рис. 6, критерій вибору моделі CR_{DR} добре апроксимує помилку відновлення вектора виходу методу DRP .

Проведено дослідження точності відновлення вектора виходу (табл. 1) і входу (табл. 2) методом DRP в задачах *Phillips*, *Carasso* [25].

У табл. 1 наведено результати відновлення вектора виходу методом DRP для матриці розміру 40×40 . Для визначення оптимальної кількості компонент моделі використано критерії вибору моделі: Маллоуза (Cp), Акаїке (AIC), мінімальної довжини опису (MDL) та CR_{DR} .

У табл. 2 подано результати розв'язання ДНЗ методом DRP для матриці \mathbf{A} розмірності 40×40 . Для визначення оптимальної кількості компонент моделі використано критерії вибору моделі: Cp , AIC , MDL та CR_{DR} .

Таблиця 1. Середнє значення помилки відновлення виходу та його середньоквадратичне відхилення, середнє значення k та його середньоквадратичне відхилення

Задача		$M(\cdot)$	e	CR_{DR}	Cp	AIC	MDL
назва	σ						
Phillips	10^{-3}	$M(e)$	1,33e-05	1,59e-05	3,76e-05	1,63e-05	3,69e-05
		ско	4,96e-06	9,81e-07	6,80e-06	1,35e-06	7,43e-06
		$M(k)$	15,48	14,66	11,16	13,26	11,20
		ско	2,51	1,85	0,37	0,69	0,43
	10^{-4}	$M(e)$	1,77e-07	2,03e-07	4,34e-07	2,16e-07	2,74e-06
		ско	6,23e-08	9,69e-09	1,48e-07	3,11e-08	9,97e-07
		$M(k)$	20,36	19,84	15,80	18,10	13,41
		ско	2,17	1,67	0,40	0,60	0,90
	10^{-5}	$M(e)$	2,47e-09	2,67e-09	4,32e-09	3,59e-09	2,07e-07
		ско	7,01e-10	7,77e-11	8,31e-24	5,17e-10	0,0
		$M(k)$	26,88	26,47	22,00	22,84	16,00
		ско	2,05	1,57	0,0	0,69	0,0
Carosso	10^{-3}	$M(e)$	1,54e-05	1,74e-05	8,96e-05	2,02e-05	4,22e-05
		ско	5,74e-06	8,61e-07	1,71e-05	2,49e-06	1,38e-05
		$M(k)$	18,33	18,16	10,11	15,3	12,29
		ско	1,99	1,65	0,45	1,21	0,97
	10^{-4}	$M(e)$	2,60e-07	2,69e-07	1,44e-06	4,06e-07	1,57e-06
		ско	7,44e-08	5,92e-09	1,97e-07	3,25e-08	3,19e-07
		$M(k)$	27,99	27,68	18,27	21,97	17,98
		ско	1,98	1,38	0,53	0,17	0,20
	10^{-5}	$M(e)$	3,53e-09	3,78e-09	1,38e-08	2,15e-07	1,39e-06
		ско	8,35e-10	2,84e-11	3,18e-09	2,66e-22	2,13e-22
		$M(k)$	36,77	35,89	29,42	22,00	18,00
		ско	1,96	0,71	1,03	0,0	0,0

Обчислено значення помилки відновлення входу $e(k) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^*\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|^2$, $k = \{1, \dots, N\}$ для 100 реалізацій шуму у векторі виходу \mathbf{b} . Потім обчислено середнє $M_e\{e(k)\}$ за реалізаціями шуму. Мінімальне значення $M_e\{e(k)\}$, відповідне йому $M_e\{k\}$ та середньоквадратичні відхилення (СКВ) розміщено у таблиці.

Значення $M_e\{e(k)\}$ формували масив з N елементів. Потім обчислено значення критеріїв вибору моделі $CR(k)$ для $k = \{1, \dots, N\}$ і для кожного критерію фіксувалося $k_{\min CR}$, при якому значення критерію мінімальне. Для кожного критерію з масиву $M_e\{e(k)\}$ вибрано значення $M_e\{e(k_{\min CR})\}$. Середні значення $M_e\{e(k_{\min CR})\}$ та СКВ для 100 реалізацій шуму у векторі виходу розміщено у табл. 2.

Розглянемо, наприклад, результати експериментального дослідження точності розв'язку задачі *Phillips* (табл. 2). Для рівня шуму 10^{-5} значення помилки розв'язку ДНЗ при використанні критеріїв CR_{DR} та AIC $0,21 \times 10^{-3}$ при теоретично мінімальному $0,20 \times 10^{-3}$, в той час як при використанні Cr значення помилки $0,73 \times 10^{-3}$ (що далеко від мінімального значення).

Для рівня шуму 10^{-4} значення помилки розв'язку ДНЗ при використанні критеріїв CR_{DR} $0,37 \times 10^{-3}$ та AIC $0,43 \times 10^{-3}$ при теоретично мінімальному $0,30 \times 10^{-3}$. При використанні Cr значення помилки велике: $0,38 \times 10^{-2}$.

Для рівня шуму 10^{-3} найменше значення помилки розв'язку ДНЗ забезпечує критерій MDL : $0,12 \times 10^{-2}$, при теоретично мінімальному $0,11 \times 10^{-2}$. Високу точність розв'язку дає і CR_{DR} : $0,16 \times 10^{-2}$. Точність розв'язку ДНЗ при використанні критерію Cr низька: $0,39 \times 10^{-2}$.

Таблиця 2. Середнє значення помилки відновлення входу та його середньоквадратичне відхилення, середнє значення k та його середньоквадратичне відхилення

Задача		$M(\cdot)$	e	CR_{DR}	Cr	AIC	MDL
назва	σ						
Phillips	10^{-3}	$M(e)$	0,0011	0,0016	0,0039	0,0025	0,0012
		ско	0,00034	0,00098	2,62e-18	0,0010	0,00017
		$M(k)$	11,15	11,56	9,0	13,26	11,20
		ско	0,36	1,17	0,0	0,69	0,43
	10^{-4}	$M(e)$	0,00030	0,00037	0,0038	0,00043	0,00046
		ско	3,78e-05	5,93e-05	6,10e-18	4,50e-05	7,01e-05
		$M(k)$	15,68	16,62	10,0	18,10	13,41
		ско	0,80	1,47	0,0	0,59	0,90
	10^{-5}	$M(e)$	0,00020	0,00021	0,00073	0,00021	0,00024
		ско	4,080e-06	1,05e-05	5,45e-19	4,21e-06	2,18e-19
		$M(k)$	21,3	23,37	13,02	22,84	16,0
		ско	0,81	1,22	1,2e-15	0,69	0,0
Carroso	10^{-3}	$M(e)$	0,107	0,123	0,838	0,123	0,137
		ско	0,027	0,015	1,00e-15	0,019	0,018
		$M(k)$	14,27	14,18	6,02	15,30	12,29
		ско	0,74	1,60	0,0	1,21	0,97
	10^{-4}	$M(e)$	0,0125	0,0145	0,521	0,0135	0,024
		ско	0,0031	0,0025	1,23e-15	0,00015	0,0023
		$M(k)$	23,11	22,41	7,9	21,97	17,98
		ско	1,02	2,19	3,10e-17	0,17	0,20
	10^{-5}	$M(e)$	0,00078	0,00097	0,12	0,0085	0,022
		ско	0,00023	3,70e-05	0,008	1,74e-17	1,74e-17
		$M(k)$	33,14	33,80	11,93	22,00	18,00
		ско	1,27	0,57	0,26	0,0	0,0

Хороші результати для AIC пов'язані з тим, що кут нахилу зростаючої ділянки залежності $AIC(k)$ більше, ніж у $CR_{DR}(k)$ та $Cp(k)$, внаслідок чого наявність шуму чинить менший вплив на положення мінімуму для $AIC(k)$ відповідно і середньоквадратичне відхилення положення мінімуму для AIC менше, ніж для CR_{DR} .

Хороша точність розв'язку ДНЗ з використанням CR_{DR} обумовлена тим, що даний критерій апроксимує помилку відновлення виходу (18). Критерії, які не апроксимують безпосередньо залежність $e_{b,DR}(k)$, можуть давати дуже низьку точність, як, наприклад, Cp , положення мінімуму для якого далеке від положення мінімуму залежності $e_{b,DR}(k)$.

Названі критерії можуть поводитися «непередбачувано», як у випадку, коли критерій MDL за високим рівнем шуму (10^{-3}) забезпечує найкращу точність, але за менших рівнів шуму ($10^{-4}, 10^{-5}$) точність розв'язку задачі *Phillips* з використанням цього критерію нижча, ніж для CR_{DR} та AIC ; проте результати для CR_{DR} стабільно хороші у всьому діапазоні шумів.

Аналіз результатів розв'язання дискретних некоректних задач методом DRP (див. табл. 2) показав, що використання критеріїв CR_{DR} та Акаїке забезпечує значення помилки, близьке до мінімального.

Висновки

Для детермінованого методу на основі аналітичного усереднення випадкових проєкцій розроблено метод визначення кількості рядків випадкової матриці, яка забезпечує мінімальну помилку розв'язку ДНЗ.

Проведене дослідження точності розв'язку ДНЗ детермінованим методом на основі аналітичного усереднення випадкових проєкцій з пошуком оптимального розв'язку за критеріями вибору моделі Маллоуза, Акаїке, мінімальної довжини опису та CR_{DR} показало, що використання критеріїв CR_{DR} та Акаїке забезпечує значення помилки, близьке до мінімального.

Напрямок подальших досліджень є застосування детермінованого методу розв'язання ДНЗ на основі аналітичного усереднення випадкових проєкцій у прикладних задачах.

ДОДАТОК

Зв'язок помилки методів усіченого SVD і випадкових проєкцій

Використовуючи (12), запишемо вираз для детермінованої складової помилки методу випадкових проєкцій:

$$\begin{aligned} e_{R,d} &= \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}_i s_i^2 d_i \mathbf{u}_i^T) \mathbf{x} = \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \left(\mathbf{x}^T \sum_{i=1}^p \left(\mathbf{u}_i s_i^2 \frac{1}{s_i^2} \mathbf{u}_i^T \right) \mathbf{x} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{x}^T \sum_{i=p+1}^n (\mathbf{u}_i s_i^2 d_i \mathbf{u}_i^T) \mathbf{x} \right). \end{aligned} \quad (Д.1)$$

Перетворимо вираз для детермінованої складової помилки методу випадкових проєкцій так, щоб виділити детерміновану складову e_d^{SVD} помилки сингулярного розкладу:

$$\begin{aligned} e_{R,d} &= \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \sum_{i=1}^p (\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T) \mathbf{x} - \\ &\quad - \mathbf{x}^T \sum_{i=p+1}^n (\mathbf{u}_i s_i^2 d_i \mathbf{u}_i^T) \mathbf{x} = \\ &= e_{p,d}^{SVD} - \mathbf{x}^T \sum_{i=p+1}^n (\mathbf{u}_i s_i^2 d_i \mathbf{u}_i^T) \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (Д.2)$$

Тобто помилка менша, ніж $e_{p,d}^{SVD}$, але оскільки $p < k_{opt}$, то $e_{p,d}^{SVD} > e_{k,d}^{SVD}$.

У виразі для стохастичної складової помилки методу випадкових проєкцій

$$\begin{aligned} e_{R,s} &= \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{U} \mathbf{D}_k \mathbf{U}^T) = \\ &= \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{D}_k \mathbf{U}^T \mathbf{U}) = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{D}_k) \end{aligned} \quad (Д.3)$$

виділимо стохастичну складову e_s^{SVD} помилки сингулярного розкладу:

$$\begin{aligned} e_{R,s} &= \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{D}_k) = \sigma^2 \sum_{i=1}^p \frac{1}{s_i^2} + \\ &+ \sigma^2 \sum_{i=p+1}^n d_i = e_{p,s}^{SVD} + \sigma^2 \sum_{i=p+1}^n d_i. \end{aligned} \quad (Д.4)$$

Результуючий вираз для помилки відновлення істинного сигналу методом випадкових проекцій має вигляд:

$$E_R \{e\} = e_p^{SVD} - \mathbf{x}^T \sum_{i=p+1}^n (\mathbf{u}_i \sigma_i^2 \mathbf{d}_i \mathbf{u}_i^T) \mathbf{x} + \sigma^2 \sum_{i=p+1}^n d_i, \quad (\text{Д.5})$$

де e_p^{SVD} помилка відновлення істинного сигналу з використанням p компонент сингулярного розкладу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Hansen P. Rank-deficient and discrete ill-posed problems. Numerical aspects of linear inversion. — Philadelphia: SIAM, 1998. — 247 p.
2. Tikhonov A., Arsenin V. Solution of ill-posed problems. — Washington: V.H. Winston, 1977. — 231 p.
3. Starkov V. Constructive methods of computational physics in interpretation problems. — Kiev: Nauk. Dumka, 2002. — 263 p.
4. Забулонов Ю.Л., Коростиль Ю.М., Ревунова Е.Г. Оптимизация решения обратной задачи по восстановлению функции плотности распределения поверхностных загрязнений: Сб. научн. трудов ИПМЭ НАН Украины // Моделирование и информационные технологии. — 2006. — № 39. — С. 77–83.
5. Rachkovskij D.A., Revunova E.G. Intelligent gamma-ray data processing for environmental monitoring / Intelligent data analysis in global monitoring for environment and security. — Kiev–Sofia, ITHEA, 2009. — P. 124–145.
6. Hansen P.C. The truncated SVD as a method for regularization // BIT 1987. — 27 — P. 534–553.
7. Ревунова Е.Г., Тищук А.В. Критерий выбора модели для решения дискретных некорректных задач на основе сингулярного разложения // УСиМ. — 2014. — № 6. — С. 3–11.
8. Revunova E.G., Tyshchuk A.V. A model selection criterion for solution of discrete ill-posed problems based on the singular value decomposition / The 7th Int. Workshop on Inductive Modelling (IWIM'2015), Kyiv–Zhukyn, 2015. — P. 43–47.
9. Revunova E.G. Model selection criteria for a linear model to solve discrete ill-posed problems on the basis of singular decomposition and random projection // Cybernetics and Systems Analysis. — 2016. — 52, N 4. — P. 647–664.
10. Revunova E.G., Rachkovskij D.A. Using randomized algorithms for solving discrete ill-posed problems // Int. J. Information Theories and Appl. — 2009. — 2, N 16. — P. 176–192.
11. Revunova E.G. Study of error components for solution of the inverse problem using random projections // Mathematical Machines and Systems. — 2010. — N 4. — P. 33–42.
12. Rachkovskij D.A., Revunova E.G. Randomized method for solving discrete ill-posed problems // Cybernetics and Systems Analysis. — 2012. — 48, N 4. — P. 621–635.
13. Revunova E.G., Rachkovskij D.A. Stable transformation of a linear system output to the output of system with a given basis by random projections / The 5th Int. Workshop on Inductive Modelling (IWIM'2012), Kyiv, 2012. — P. 37–41.
14. Revunova E.G. Randomization approach to the reconstruction of signals resulted from indirect measurements // Proc. 4th Int. Conf. on Inductive Modelling (ICIM'2013), K., 2013. — P. 203–208.
15. Revunova E.G. Analytical study of the error components for the solution of discrete ill-posed problems using random projections // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — 51, N 6. — P. 978–991.
16. Revunova E.G. Averaging over matrices in solving discrete ill-posed problems on the basis of random projection // Proc. CSIT'17. — 2017. — 1. — P. 473–478.
17. Revunova E.G. Solution of the Discrete ill-posed problem on the basis of singular value decomposition and random projection // Advances in Intelligent Systems and Computing II. — Cham: Springer, 2017. — P. 434–449.
18. Отчет по 2 етапу НІР 0116U002481. Методи устійного решения задачи преобразования выхода измерительной системы для повышения точности измерений, 2018. — 26 с.
19. Marzetta T., Tucci G., Simon S. A random matrix-theoretic approach to handling singular covariance estimates // IEEE Trans. Information Theory. — 2011. — 57, N 9. — P. 6256–6271.
20. Tucci G.H., Vega M.V. A note on averages over Gaussian random matrix ensembles // J. of Probability and Statistics. — 2013. — 2013. Article ID 941058. — P. 1–6.
21. Carasso A.S. Determining surface temperatures from interior observations // SIAM J. Appl. Math. — 1982. — N 42. — P. 558–574.
22. Phillips D.L. A technique for the numerical solution of integral equation of the first kind // J. ACM. — 1962. — N 9. — P. 84–97.
23. Geman S., Bienenstock E., Doursat R. Neural networks and the bias/variance dilemma // Neural Computation. — 1992. — 4, N 1. — P. 1–58.
24. Haykin S.S. Neural networks: a comprehensive foundation. — Prentice Hall, 1999. — 842 p.
25. Hansen P.C. Regularization Tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems // Numer. Algorithms. — 1994. — 6, N 1. — P. 1–35.

Поступила 31.01.2018

REFERENCES

1. Hansen P. Rank-deficient and discrete ill-posed problems. Numerical aspects of linear inversion. Philadelphia: SIAM, 1998, 247 p.
2. Tikhonov A., Arsenin V. Solution of ill-posed problems. Washington: V.H. Winston, 1977, 231 p.
3. Starkov V. Constructive methods of computational physics in interpretation problems. Kiev: Nauk. Dumka, 2002, 263 p.
4. Zabulov Yu.L., Korostyl Yu.M., Revunova E.G. Optimization of the solution of the inverse problem for the restoration of the density distribution function of surface contaminants: Sb. nauchn. trudov IPME NAN Ukrainy. Modeling and information technology, 2006, N 39, P. 77–83. (In Russian).
5. Rachkovskij D.A., Revunova E.G. Intelligent gamma-ray data processing for environmental monitoring. Intelligent data analysis in global monitoring for environment and security, Kiev–Sofia, ITHEA, 2009, P. 124–145.
6. Hansen P.C. The truncated SVD as a method for regularization. BIT 1987, 27, P. 534–553.
7. Revunova E.G., Tyshchuk A.V. Model Selection Criterion for the Solution of Discrete Ill-Posed Problems Based on Singular Value Decomposition. Upr. sist. маъл., 2014, N 6, P. 3–11. (In Russian).
8. Revunova E.G., Tyshchuk A.V. A model selection criterion for solution of discrete ill-posed problems based on the singular value decomposition / The 7th Int. Workshop on Inductive Modelling (IWIM'2015), Kyiv–Zhukyn, 2015, P. 43–47.
9. Revunova E.G. Model selection criteria for a linear model to solve discrete ill-posed problems on the basis of singular decomposition and random projection. Cybernetics and Systems Analysis, 2016, 52, N 4, P. 647–664.
10. Revunova E.G., Rachkovskij D.A. Using randomized algorithms for solving discrete ill-posed problems. Int. J. Information Theories and Applications, 2009, 2, N 16, P. 176–192.
11. Revunova E.G. Study of error components for solution of the inverse problem using random projections. Mathematical Machines and Systems, 2010, N 4, P. 33–42.
12. Rachkovskij D.A., Revunova E.G. Randomized method for solving discrete ill-posed problems. Cybernetics and Systems Analysis, 2012, 48, N 4, P. 621–635.
13. Revunova E.G., Rachkovskij D.A. Stable transformation of a linear system output to the output of system with a given basis by random projections / The 5th Int. Workshop on Inductive Modelling (IWIM'2012), Kyiv, 2012, P. 37–41.
14. Revunova E.G. Randomization approach to the reconstruction of signals resulted from indirect measurements. Proc. 4th Int. Conf. on Inductive Modelling (ICIM'2013), K., 2013, P. 203–208.
15. Revunova E.G. Analytical study of the error components for the solution of discrete ill-posed problems using random projections. Cybernetics and Systems Analysis, 2015, 51, N 6, P. 978–991.
16. Revunova E.G. Averaging over matrices in solving discrete ill-posed problems on the basis of random projection. Proc. CSIT'17, 2017, 1, P. 473–478.
17. Revunova E.G. Solution of the Discrete ill-posed problem on the basis of singular value decomposition and random projection. Advances in Intelligent Systems and Computing II. Cham: Springer, 2017, P. 434–449.
18. Methods of Sustainable Solving the Problem of Transforming the Output of a Measurement System to Improve Measurement Precision: Report on NIR (2nd stage) / International Research and Training Center for Information Technologies and Systems of the NAS and MES of Ukraine. No. 0116U002481, K.: 2017, 26 p. (In Russian).
19. Marzetta T., Tucci G., Simon S. A random matrix-theoretic approach to handling singular covariance estimates. IEEE Trans. Information Theory, 2011, 57, N 9, P. 6256–6271.
19. Tucci G.H., Vega M.V. A note on averages over Gaussian random matrix ensembles. J. of Probability and Statistics, 2013, 2013. Article ID 941058, P. 1–6.
21. Carasso A.S. Determining surface temperatures from interior observations. SIAM J. Appl. Math., 1982, N 42, P. 558–574.
22. Phillips D.L. A technique for the numerical solution of integral equation of the first kind. J. ACM, 1962, N 9, P. 84–97.
23. Geman S., Bienenstock E., Doursat R. Neural networks and the bias/variance dilemma. Neural Computation, 1992, 4, N 1, P. 1–58.
24. Haykin S.S. Neural networks: a comprehensive foundation. — Prentice Hall, 1999. — 842 p.
25. Hansen P.C. Regularization Tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. Numer. Algorithms, 1994, 6, N 1, P. 1–35.

Received 31.01.2018

E.G. Revunova, PhD in Technical Sciences,
Deputy Director on Research, International Research and Training Center for Information Technologies
and Systems of the NAS and MES of Ukraine, Glushkov ave., 40, Kyiv, 03187, Ukraine
helab@i.com.ua

STUDYING THE ACCURACY FOR THE SOLUTION OF DISCRETE ILL-POSED PROBLEMS USING THE METHOD OF RANDOM PROJECTION

Introduction. Discrete ill-posed problems (DIP) often arise when restoring signals obtained as a result of indirect measurements. A stable solution of DIP can be received, for example, by the method of truncated singular value decomposition

and of random projection (RP). The accuracy of solving DIP by the RP method is determined by the influence of two independent random variables: additive noise in the output vector and a random variable that forms a random matrix. The change in the rows number of a random matrix leads to a change in the accuracy of the DIP solution. Noisiness of the output vector leads to the appearance of a component of the error, the value which increases with the rows number of the random matrix and is scaled by the noise level. Therefore, the dependence of the DIP solution error on the rows number of the random matrix at the certain noise levels has a minimum at $k < N$ (row number of the random matrix less then row number of the DIP matrix). Averaging over random matrices leads to a smoothing of the solution error dependence on k and to a decrease in the number of the local minima. The study of bias and variance of the error, arising from averaging over the realizations of the random matrix, made it possible to obtain a much more accurate estimate of the input vector.

Purpose. The aim is to develop a method for determining the optimal size of a random matrix for the method of DIP solving based on the refined evaluation of the input vector.

Results and conclusions. The method of DIP solving based on the analytical averaging of random projection is proposed. For this method, we have developed the criterion CR_{DR} for determining the number of rows of a random matrix which provides the DIP solution error close to the minimum. We conducted an experimental investigation of the DIP solution accuracy by a deterministic method based on the analytical averaging of random projection with the search for the optimal solution by the model selection criteria of Mallows, Akaike, Minimum description length, and CR_{DR} . The experiments have shown that CR_{DR} and Akaike criteria provide the error value close to the minimum.

Perspective. The direction of further work is the use of a deterministic method for DIP solution based on analytical averaging of random projection in applied problems.

Keywords: *discrete ill-posed problem, regularization, random projection.*