УДК 519.85

О.А. ЕМЕЦ, А.О. ЕМЕЦ

НЕЧЕТКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ: СИЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И СИЛЬНАЯ ДОПУСТИМОСТЬ

Аннотация. Рассмотрены вопросы сильной допустимости и сильной разрешимости нечеткой линейной системы уравнений в пяти смыслах (четком, квазичетком, получетком, квазинечетком и нечетком).

Ключевые слова: нечеткие множества, интервальная матрица, нечеткая матрица, интервальные системы уравнений, нечеткие системы уравнений, сильная разрешимость системы линейных уравнений, сильная допустимость системы линейных уравнений.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальной и непростой задачей является обработка неопределенностей, имеющих место при моделировании реальных явлений, процессов, сложных систем. Аппарат нечетких множеств (чисел) [1–15] используется при решении систем уравнений с нечеткими данными [16]. Результат решения такой системы часто необходим в виде обычных чисел. В работе [17] сделан первый шаг в исследовании данных систем с помощью интервальных, а именно введены понятия нечеткой линейной системы уравнений как совокупности пяти специальных интервальных систем уравнений, слабой и сильной разрешимости (допустимости) нечеткой линейной системы уравнений в пяти смыслах (нечетком, квазинечетком, полунечетком, квазичетком и четком), а также доказаны критерии слабой разрешимости и слабой допустимости нечеткой системы уравнений во всех пяти смыслах. В работе [18] эти исследования продолжены для нечетких линейных неравенств, где изучена сильная разрешимость и допустимость.

Цель настоящей работы — исследования сильной разрешимости и сильной допустимости нечетких линейных систем уравнений в приведенных пяти смыслах.

НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1. Нечетким числом A будем называть множество пар $A=\{a \mid \mu(a);\ a\in[a_L, a_R]\subset R^1,\ \mu(a)\in[0,1]\}$.

Определение 2. Множество чисел $a\in R^1$ во множестве пар нечеткого числа A, образующих это нечеткое число, будем называть носителем нечеткого числа A, а $\mu(a)$ — значением функции принадлежности нечеткого числа A.

Определение 3. Нечеткое число $A=\{a_1 \mid \mu(a_1),\dots, a_n \mid \mu(a_n)\}$ будем называть дискретным (или нечетким числом с дискретным носителем), если $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ — дискретное множество, $\mu(a_i)\in[0,1]$; $\mu(a_i)>0\ \ \forall i=2,3,\dots,n-1$, $\mu(a_1)=\mu(a_n)=0$. Обозначим $a_1=a_L$, $a_n=a_R$ при $a_1<\dots<a_n$.

Определение 4. Нечеткое число $A=\{a \mid \mu(a)\ \forall a\in[a_L, a_R]\subset R^1\}$ будем называть континуальным (или нечетким числом с континуальным носителем), если значение $\mu(a)$ задано для всех $a\in[a_L, a_R]$: $\mu(a_L)=0$; $1\ge\mu(a)>0\ \forall a\in(a_L, a_R)$; $\mu(a_R)=0$.

Определение 5. Точки a носителя нечеткого числа A, в которых $\mu(a)=1$, назовем пиковыми точками для нечеткого числа A.

Определение 6. Дискретное нечеткое число $A = \{a_1 | \mu_1, \ldots, a_n | \mu_n\}$, где $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, будем называть однопиковым, если существует единственный набор подряд идущих чисел $\alpha_L = a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_{i+p} = \alpha_R$, для которых $\mu_{i+1} = \ldots = \mu_{i+p} = 1$. Точки $a_{i+1}, \ldots, a_{i+p}$ будем называть пиком дискретного нечеткого числа A. Если $p = 1$, то такой пик числа A будем называть острым, в противном случае — неострым.

Определение 7. Континуальное нечеткое число $A = \{a | \mu(a); a \in [a_L, a_R]\}$ будем называть однопиковым, если существует такой единственный отрезок $[\alpha_L, \alpha_R] \subset (a_L, a_R)$, что для всех чисел a из этого отрезка функция принадлежности $\mu(a) = 1$. Отрезок $[\alpha_L, \alpha_R]$ будем называть пиком континуального нечеткого числа A. Если $\alpha_L = \alpha_R$, то такой пик числа A будем называть острым, в противном случае — неострым.

Определение 8. Нечеткое число A назовем нормальным, если для любых заданных в A элементах носителя a_i^L, a_j^L от a_L до α_L, $\mu(a_i^L) \le \mu(a_j^L)$ $\forall a_i^L < a_j^L$, т.е. функция принадлежности неубывающая на $[a_L, \alpha_L]$, и для любых заданных элементов носителя a_i^R, a_j^R от α_R до a_R, $\mu(a_i^R) \ge \mu(a_j^R)$ $\forall a_i^R > a_j^R$, т.е. функция принадлежности невозрастающая на $[\alpha_R, a_R]$.

Определение 9. Нормальное однопиковое число назовем стандартным (континуальным или дискретным).

Определение 10. Стандартизированным нечетким числом назовем дискретное нечеткое число вида $A = \{a_{L_0} | 0; a_{L_1} | 0.25; a_{L_2} | 0.5; a_{L_3} | 0.75; a_{L_4} | 1; a_{R_4} | 1; a_{R_3} | 0.75; a_{R_2} | 0.5; a_{R_1} | 0.25; a_{R_0} | 0\}$, где $a_{L_0} < a_{L_1} < a_{L_2} < a_{L_3} \le a_{L_4} < a_{R_4} < < a_{R_3} < a_{R_2} < a_{R_1} < a_{R_0}$. Это число можно задавать упорядоченной десяткой $A = (a_{L_0}, a_{L_1}, a_{L_2}, a_{L_3}, a_{L_4}, a_{R_4}, a_{R_3}, a_{R_2}, a_{R_1}, a_{R_0}) = (\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \overline{a}_4, \overline{a}_3, \overline{a}_2, \overline{a}_1, \overline{a}_0)$. Если пик острый, то очевидно $\underline{a}_4 = \overline{a}_4$.

Чтобы получить стандартизованное нечеткое число из стандартного континуального, необходимо осуществить дискретизацию носителя в соответствии со значениями $0.25i$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ функции принадлежности. При этом концы интервалов $[\underline{a}_i, \overline{a}_i]$, $i = 1, 2, 3, 4$, выбираем из условий $\forall a \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$ $\mu(a) \in [0.25i; 1]$, а для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ $\mu(\underline{a}_i - \varepsilon) < 0.25i$, $\mu(\overline{a}_i + \varepsilon) < 0.25i$ (рис. 1), $\underline{a}_0 = a_L$; $\overline{a}_0 = a_R$. Для того чтобы получить стандартизованное нечеткое число из стандартного дискретного нечеткого числа, можно воспользоваться методикой, изложенной в [19].

Отметим, что выбор пяти интервалов: $[\underline{a}_i, \overline{a}_i]$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, в стандартизированном нечетком числе для описания лингвистических переменных определяется по тому же принципу, что и выбор пяти основных значений шкалы Саати [20]. Однако для других целей количество интервалов можно увеличить за счет введения интервалов, соответствующих произвольному условию $\alpha \in [0, 1]$ значения функции принадлежности нечеткого числа.

В настоящей работе используются только стандартизированные нечеткие числа, поэтому далее слово «стандартизированное» будем опускать.

Согласно терминологии из [21] введем необходимые для дальнейшего изложения понятия и обозначения теории интервальных матриц.

Рассмотрим две $m \times n$ матрицы: $\underline{A}$ и $\overline{A}$, с действительными элементами, т.е. $\underline{A}, \overline{A} \in R^{m \times n}$, если $n = 1$, то матрица — это вектор-столбец. Пусть $\underline{A} \le \overline{A}$, причем знаки $\le$ и $<$ для матриц означают поэлементное выполнение неравенства $\le$ или $<$.

Определение 11. Пусть множество матриц $A \in R^{m \times n}$ удовлетворяет условию $\underline{A} \le A \le \overline{A}$. Такое множество назовем интервальной матрицей I_A, т.е. $I_A = \{A \,|\, \underline{A} \le A \le \overline{A}\}$.

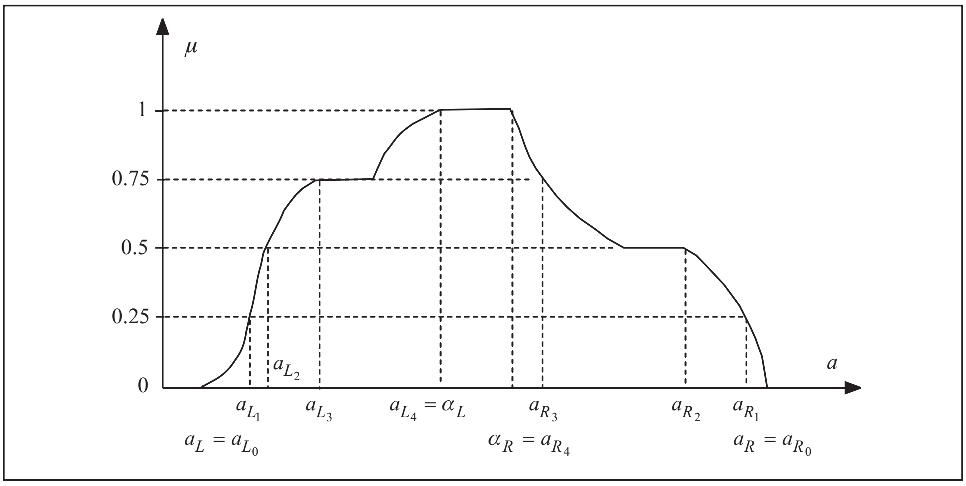

Рис. 1. Получение стандартизированного нечеткого числа из стандартного континуального нечеткого числа

Матрицы $\underline{A}$ и $\overline{A}$ назовем соответственно нижней и верхней границами интервальной матрицы I_A, которую будем обозначать $I_A = [\underline{A}, \overline{A}]$.

Определение 12. Назовем средней матрицей A_c интервальной матрицы I_A матрицу, определяемую соотношением

$$A_c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A}). \tag{1}$$

Назовем матрицей радиусов Δ интервальной матрицы I_A матрицу, определяемую формулой

$$\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A}). \tag{2}$$

Очевидно, что элементы матрицы радиусов неотрицательны: $\Delta_{ij} \geq 0 \ \forall i = \overline{1, m}$, $\forall j = \overline{1, n}$. В соответствии с определением 12 из формул (1) и (2) получаем $\underline{A} = A_c - \Delta$; $\overline{A} = A_c + \Delta$. Таким образом, интервальную матрицу можно представить $I_A = [\underline{A}, \overline{A}] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$ или $I_A = \{A \,|\, |A - A_c| \leq \Delta\}$, где модуль (абсолютная величина) матрицы $B = (b_{ij}) \in R^{m \times n}$ определяется как матрица $|B| = (|b_{ij}|) \in R^{m \times n}$.

Определение 13. Интервальным вектором I_b (столбцом) назовем интервальную матрицу с одним столбцом, т.е. $I_b \in R^{m \times 1} = R^m$.

Будем интервальный вектор также обозначать $I_b = \{b \,|\, \underline{b} \leq b \leq \overline{b}\}$, где $\underline{b}, \overline{b} \in R^m$ — соответственно его нижняя и верхняя границы.

Средним вектором b_c интервального вектора назовем $b_c = \frac{1}{2}(\underline{b} + \overline{b})$, а вектором радиусов для I_b назовем вектор $\delta = \frac{1}{2}(\overline{b} - \underline{b})$. Таким образом, интервальный вектор представим в виде $I_b = [\underline{b}, \overline{b}] = [b_c - \delta; b_c + \delta]$.

Основываясь на понятии интервальной матрицы, введем понятие нечеткой матрицы.

Определение 14. Нечеткой матрицей A^f назовем пятислойную таблицу (матрицу, массив), состоящую на каждом слое t из интервальных матриц I_A^t, $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, где t — номер слоя. Матрица I_A^t при $t = \text{const}$ является интервальной матрицей вида $I_A^t = [\underline{A}^t, \overline{A}^t]$. Здесь $\underline{A}^t = (\underline{a}_{ijt}) \in R^{m \times n}$, $\overline{A}^t = (\overline{a}_{ijt}) \in R^{m \times n}$, $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Будем обозначать $a_{ijt} \in [\underline{a}_{ijt}, \overline{a}_{ijt}]$ элемент матрицы A^f, где $\underline{a}_{ijt}, \overline{a}_{ijt}$ — параметры нечеткого стандартизированного числа $a_{ij} = (\underline{a}_{ij0}, \underline{a}_{ij1}, \underline{a}_{ij2}, \underline{a}_{ij3}, \underline{a}_{ij4}, \overline{a}_{ij4}, \overline{a}_{ij3}, \overline{a}_{ij2}, \overline{a}_{ij1}, \overline{a}_{ij0})$, i и j — соответственно номера строки и столбца, t — номер слоя матрицы A^f. Матрицу I_A^t назовем слоем t матрицы A^f, а матрицу A^f — пятислойной.

В случае, когда $n = 1$, матрицу A^f назовем нечетким вектором (столбцом) с m нечеткими координатами и обозначим b^f. Вектор $I_b^t \in R^m$ назовем слоем t вектора b^f, $t = 0, 1, 2, 3, 4$, а вектор b^f — пятислойным.

Пример 1. Пусть a — стандартизированное нечеткое число: $a = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$, т.е. $a = (0 | 0; 1 | 0.25; 2 | 0.5; 3 | 0.75; 4 | 1; 5 | 1; 6 | 0.75; 7 | 0.5; 8 | 0.25; 9 | 0)$. Рассмотрим одноэлементный нечеткий вектор (число) $A^f = (I_b^t)$, $t = 0, 1, 2, 3, 4$, при $m = 1$ и $n = 1$, где $I_b^0 = [0; 9]$, $I_b^1 = [1; 8]$, $I_b^2 = [2; 7]$, $I_b^3 = [3; 6]$, $I_b^4 = [4; 5]$. В этом случае A^f — пятислойная матрица с одним столбцом и одной строкой, т.е. нечеткое число $a = A^f$.

Приведем определение интервальных линейных систем уравнений из [21].

Определение 15. Интервальной линейной системой уравнений

$$I_A x = I_b \tag{3}$$

называется семейство всех систем линейных уравнений

$$Ax = b, \tag{4}$$

где

$$A \in I_A; \ b \in I_b. \tag{5}$$

Использовав определение 15, введем понятие нечеткой линейной системы уравнений согласно [17].

Определение 16. Нечеткой линейной системой уравнений

$$A^f x = b^f \tag{6}$$

назовем совокупность пяти интервальных линейных систем уравнений

$$\left[\begin{array}{l} I_A^4 x = I_b^4, \\ I_A^3 x = I_b^3, \\ I_A^2 x = I_b^2, \\ I_A^1 x = I_b^1, \\ I_A^0 x = I_b^0, \end{array}\right. \tag{7}$$

где A^f и I_A^t, b^f и I_b^t $(t = 0, 1, \ldots, 4)$ соотносятся между собой согласно определению 14.

Определение 17. Система линейных уравнений (4) называется разрешимой, если она имеет некоторое решение, и допустимой, если она имеет неотрицательное решение.

Определение 18 [21]. Интервальная линейная система уравнений (3) называется сильно разрешимой (допустимой), если каждая система (4) с данными (5) разрешима (допустима).

Поставим в соответствие линейной интервальной системе уравнений $I_A^t x = I_b^t$, $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, семейство с номером t систем линейных уравнений вида (4) с данными вида (5):

$$A^t x = b^t, \tag{8}$$

$$A^t \in I_A^t; \; b^t \in I_b^t. \tag{9}$$

Согласно [17] дадим определения сильной разрешимости (допустимости) системы (6).

Определение 19. Нечеткая линейная система уравнений (6) называется сильно разрешимой (допустимой) в четком смысле, если при $t = 4$ каждая из систем (8) с данными (9)

$$A^4 x = b^4 \tag{10}$$

разрешима (допустима). Этот тип сильной разрешимости (допустимости) назовем четвертым типом.

Определение 20. Нечеткая линейная система уравнений (6) называется сильно разрешимой (допустимой) в квазичетком смысле, если при $t = 3$ каждая из систем (8)

$$A^3 x = b^3 \tag{11}$$

с данными (9) разрешима (допустима). Этот тип сильной разрешимости (допустимости) назовем третьим типом.

Определение 21. Нечеткая линейная система уравнений (6) называется сильно разрешимой (допустимой) в получетком (или полунечетком) смысле, если при $t = 2$ каждая из систем (8)

$$A^2 x = b^2 \tag{12}$$

с данными из (9) разрешима (допустима). Этот тип сильной разрешимости (допустимости) назовем вторым типом.

Определение 22. Нечеткая линейная система уравнений (6) называется сильно разрешимой (допустимой) в квазинечетком смысле, если при $t = 1$ каждая система из систем (8)

$$A^1 x = b^1 \tag{13}$$

с данными из (9) разрешима (допустима). Этот тип сильной разрешимости (допустимости) назовем первым типом.

Определение 23. Нечеткая линейная система уравнений (6) называется сильно разрешимой (допустимой) в нечетком смысле, если при $t = 0$ каждая из систем (8)

$$A^0 x = b^0 \tag{14}$$

с данными из (9) разрешима (допустима). Этот тип сильной разрешимости (допустимости) назовем нулевым типом.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ОБЩЕМ ВИДЕ

В работе [17] получены критерии слабой разрешимости и слабой допустимости во всех пяти смыслах для нечеткой линейной системы уравнений (6). В работе [18] этот подход развит для анализа линейных нечетких систем неравенств, которые определяются аналогично определению 16, т.е. нечеткой линейной системой неравенств $A^f x \le b^f$ называется совокупность пяти интервальных линейных систем неравенств $I_A^t x \le I_b^t$, где $t = 0, 1, \ldots, 4$, и A^f, I_A^t, b^f, I_b^t соотносятся между собой согласно определению 14. В [18] получены критерии сильной разрешимости и сильной допустимости нечетких линейных систем неравенств во всех пяти смыслах.

В настоящей работе ставится задача получения критериев сильной разрешимости и допустимости для нечетких линейных систем уравнений. Результаты проблемы исследования систем нечетких уравнений и неравенств вида $A_1^f x \le b_1^f$, $A_2^f x = b_2^f$ важны и необходимы для решения задач оптимизации, где эти нечеткие системы являются условием, определяющим допустимую область.

КРИТЕРИИ СИЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ И СИЛЬНОЙ ДОПУСТИМОСТИ НЕЧЕТКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Обозначим единичный вектор $e = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}} \in R^m$, где Т — символ транспонирования. Если размерность вектора e не указана, то она легко определяется из контекста. Пусть $I_A^t = [A_c^t - \Delta^t; A_c^t + \Delta^t]$ — заданная интервальная $m \times n$-матрица, определяемая (7), а вектор $y \in Y_m \subset R^m$, где $Y_m = \{y \in R^m \,\big|\, |y| = e\}$. Обозначим D_z для вектора $z \in R^m$ квадратную матрицу из $R^{m \times m}$, в которой его элементы расположены на главной диагонали, а остальные элементы — нули, т.е.

$$D_z = \operatorname{diag}(z_1, \ldots, z_m) = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & z_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & z_m \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$A_{yz}^t = A_c^t - D_y \Delta^t D_z, \qquad (16)$$

где D_y, D_z — матрицы вида (15), а $y \in Y_m$, $z \in Y_n$. Если y или z — единичный вектор e, то D_y, D_z — соответственно единичные матрицы. Поэтому $A_{ye}^t = A_c^t - D_y \Delta^t$; $A_{ez}^t = A_c^t - \Delta^t D_z$.

Аналогично для интервального m-мерного вектора $I_b^t = [b_c^t - \delta^t; b_c^t + \delta^t]$, определяемого в (7), введем в рассмотрение вектор $b_y^t = b_c^t + D_y \delta^t$. Отметим, что согласно введенным определениям $A_{yz}^t \in I_A^t$ и $b_y^t \in I_b^t$ (16), а также для элементов матрицы A_{yz}^t и вектора b_y^t имеем $(A_{yz}^t)_{ij} = \begin{cases} \overline{a}_{ij}^t, & y_i z_j = -1, \\ \underline{a}_{ij}^t, & y_i z_j = 1; \end{cases}$
$(b_y^t)_i = \begin{cases} \overline{b}_i, & y_i = 1, \\ \underline{b}_i, & y_i = -1. \end{cases}$

Выпуклую оболочку множества $M \subset R^m$ обозначим $\operatorname{conv} M$. Это, как известно, пересечение всех выпуклых подмножеств R^m, содержащих M.

Пусть $\overline{x}, \overline{x}^t, \overline{\overline{x}}, \overline{\overline{x}}^t \in R^n$.

Теорема 1. Нечеткая линейная система уравнений $A^f x = b^f$ вида (6) является сильно разрешимой типа t, $t = 0, 1, 2, 3, 4$, тогда и только тогда, когда для каждого вектора $y \in Y_m$ линейная система уравнений

$$A_{ye}^t \bar{x}^t - A_{-ye}^t \bar{\bar{x}}^t = b_y^t, \tag{17}$$

$$\bar{x}^t \geq 0,\ \bar{\bar{x}}^t \geq 0 \tag{18}$$

имеет решение $\bar{x}_y^t$, $\bar{\bar{x}}_y^t$ ($\bar{x}_y^t \in R^n$, $\bar{\bar{x}}_y^t \in R^n$). Если это справедливо, т.е. нечеткая линейная система уравнений $A^f x = b^f$ является сильно разрешимой типа t, то для любых $A^t \in I_A^t$, $b^t \in I_b^t$ система $A^t x = b^t$ имеет решение во множестве $\operatorname{conv}\ \{\bar{x}_y^t - \bar{\bar{x}}_y^t \mid\ y \in Y_m\}$.

Доказательство. Согласно определениям 19–23 (см. (10)–(14)) нечеткая система (6) называется сильно разрешимой типа $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, если каждая из систем (8) с данными (9) разрешима. Согласно определению 18 это означает сильную разрешимость интервальной системы $I_A^t = I_b^t$. Для сильной разрешимости интервальных систем известен критерий Рона [22] (см. также теорему 2.14 из [21]). Непосредственное применение критерия Рона и дает справедливость теоремы.

Отметим, что если использовать обозначения и определения, в терминах которых сформулирована теорема 1 и соотношение (17), то можно для системы (17) дать еще и следующую интерпретацию. При $y_i = 1$ i-е строки матриц A_{ye}, A_{-ye} равны i-м строкам $\underline{A}_i$, $\bar{A}_i$ матриц $\underline{A}$, $\bar{A}$ соответственно, а $(b_y)_i = \bar{b}_i$, т.е. при $y_i = 1$ i-е уравнение в системе (17) следующее:

$$(\underline{A}\bar{x} - \bar{A}\bar{\bar{x}})_i = \bar{b}_i. \tag{19}$$

Аналогично при $y_i = -1$ i-е уравнение в системе (17) имеет вид

$$(\bar{A}\bar{x} - \underline{A}\bar{\bar{x}})_i = \underline{b}_i. \tag{20}$$

Таким образом, семейство систем (17) для всех $y \in Y_m$ представляет семейство всех 2^m систем, i-е уравнения которых имеют вид (19) или (20) в зависимости от i-й координаты вектора y ($y_i = \pm 1$). Это обосновывает справедливость (см. также [21, с. 86]) следующего утверждения.

Теорема 2. Проверка сильной разрешимости типа $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ нечеткой линейной системы уравнений вида (6) является NP-трудной.

Как известно (см. [21, с. 87]), вектор $x \in R^n$ называется сильным решением интервальной линейной системы уравнений $I_A^t x = b^t$ вида (3), если он удовлетворяет системе $Ax = b$ вида (4) для любых $A \in I_A$, $b \in I_b$.

Определение 24. Вектор $x^t \in R^n$ назовем сильным решением типа t ($t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$) нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$ вида (6), если он является сильным решением интервальной линейной системы уравнений $I_A^t x = b^t$ вида (3).

Имеет место следующая характеризация сильных решений типа t нечеткой линейной системы уравнений.

Теорема 3. Вектор $x^t \in R^n$ является сильным решением типа t нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$ вида (6) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе

$$A_c^t x^t = b_c^t, \tag{21}$$

$$\Delta^t\, |x^t| = 0, \tag{22}$$

$$\delta^t = 0, \tag{23}$$

где $A_c^t = \frac{1}{2}(\underline{A}^t + \bar{A}^t)$, $b_c^t = \frac{1}{2}(\bar{b}^t + \underline{b}^t)$, $\Delta^t = \frac{1}{2}(\bar{A}^t - \underline{A}^t)$, $\delta^t = \frac{1}{2}(\bar{b}^t - \underline{b}^t)$.

Доказательство. Согласно определению 24 вектор x^t называется сильным решением типа t нечеткой линейной системы уравнений (6), если он является сильным решением интервальной линейной системы уравнений $I_A^t x = b^t$ вида (3). Для сильных решений интервальных линейных систем критерий известен (см. теорему 2.16 в [21]). Простое применение этого критерия к системе $I_A^t x = b^t$ и дает справедливость теоремы.

Из (22) следует, что переменная $x_j^t = 0$ для всех j, для который j-й столбец Δ_j^t матрицы Δ^t ненулевой ($\Delta_j^t \neq 0$). Обозначим $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $J = \{j \mid \Delta_j^t \neq 0\}$; $\bar{J} = J_n \setminus J$ — дополнение J в универсальном множестве J_n. Тогда условия (21), (22) можно записать в виде

$$\sum_{j \in \bar{J}} (A_c^t)_j x_j^t = b_c^t, \tag{24}$$

$$x_j^t = 0, \ \ j \in J, \tag{25}$$

где $(A_c^t)_j$ — j-й столбец матрицы A_c. Решив систему (23)–(25), получим сильное решение x^t типа t нечеткой системы (6), если оно существует, что бывает достаточно редко.

Согласно определениям 18–23 описание сильной допустимости типа t при $t = 0, 1, 2, 3, 4$ можно получить из сильной разрешимости.

Теорема 4. Нечеткая линейная система уравнений $A^f x = b^f$ вида (6) является сильно допустимой типа t при $t = 0, 1, 2, 3, 4$ тогда и только тогда, когда $\forall y \in Y_m$ система

$$A_{ye}^t x^t = b_y^t \tag{26}$$

имеет неотрицательное решение x_y^t. Кроме того, если такие решения существуют, то для любых $A^t \in I_A^t$ и для любых $b^t \in I_b^t$ система $A^t x = b^t$ имеет решения во множестве

$$\operatorname{conv} \{x_y^t \mid \ y \in Y_m\}. \tag{27}$$

Доказательство. Если система $A^f x = b^f$ сильно допустима типа t ($t = 0, 1, 2, 3, 4$), то каждая система (26) имеет неотрицательное решение x_y^t, поскольку $\forall y \in Y_m$ $A_{ye}^t \in I_A^t$, $b_y^t \in I_b^t$. Покажем обратное. Пусть $\forall y \in Y_m$ система (26) имеет неотрицательное решение x_y^t. Обозначим $\bar{x}_y^t = x_y^t$; $\bar{\bar{x}}_y^t = 0$ $\forall y \in Y_m$. Подставив $\bar{x}_y^t$, $\bar{\bar{x}}_y^t$ в (17), (18), можно легко убедиться в выполнимости этой системы. Но согласно теореме 1 это означает, что каждая система $A^f x = b^f$ для любых $A^t \in I_A^t$; $b^t \in I_b^t$ имеет решение во множестве $\operatorname{conv} \{\bar{x}_y^t - \bar{\bar{x}}_y^t \mid y \in Y_m\}$, которое при $\bar{x}_y^t = x_y^t$, $\bar{\bar{x}}_y^t = 0$ совпадает с множеством (27). Следовательно, нечеткая система $A^f x = b^f$ сильно допустима типа t при $t = 0, 1, 2, 3, 4$, что и требовалось доказать.

Отметим, что на основании теоремы 2.18 из [21] можно утверждать, что проверка сильной допустимости нечеткой линейной системы уравнений является NP-трудной.

В силу теоремы 1 из [17], определений 19–27 сильной допустимости и разрешимости системы линейных нечетких уравнений справедливы следующие утверждения.

Теорема 5. Если вектор x^t — сильное решение типа t при $t = 0, 1, 2, 3$ нечеткой линейной системы уравнений $A^f x = b^f$, то он является сильным решением типа $t+1$ этой системы.

Заметим, что эта теорема и ее доказательство аналогичны теореме 3 из [17].

Теорема 6. Если нечеткая линейная система уравнений $A^f x = b^f$ является:

— сильно разрешимой в нечетком смысле, то она сильно разрешима в квазинечетком смысле;

— сильно разрешимой в квазинечетком смысле, то она сильно разрешима в полунечетком смысле;

— сильно разрешимой в полунечетком смысле, то она сильно разрешима в квазичетком смысле;

— сильно разрешимой в квазичетком смысле, то она сильно разрешима в четком смысле.

Доказательство следует из определений сильной разрешимости, теоремы 1 из [17] и теоремы 5.

Отметим также, что если не имеется сильного решения x^t типа t системы $A^f x = b^f$, то не существует сильного решения x^{t-1} типа $t-1$ этой системы при $t = 1, 2, 3, 4$.

Пример 2. Пусть система $A^f x = b^f$ является одним уравнением $a^f x = b^f$, где a^f и b^f — множества интервалов, соответствующие нечеткие числа a и b показаны на рис. 2 и рис. 3, т.е. $a = \{0|0; 1|0.25; 2|0.5; |3|0.75;\ 4|1; 5|1; 6|0.75;\ 7|0.5;\ \ 8|0.25; 9|0\}$, $b = \{1|0; 2|0.25; 3|0.5; 4|0.75; 5|1; 6|0.75; 7|0.5; 8|0.25; 9|0\}$. Тогда $A^f = ([0, 9] = I_A^0, [1, 8] = I_A^1, [2, 7] = I_A^2, [3, 6] = I_A^3, [4, 5] = I_A^4)$, где слои матрицы A^f — это интервалы $I_A^0 = [0, 9], \ldots, I_A^4 = [4, 5]$; а $b^f = ([1, 9] = I_b^0, [2, 8] = I_b^1, [3, 7] = I_b^2, [4, 6] = I_b^3, [5, 5] = I_b^4)$, где слои вектора b^f — это интервалы $I_b^0 = [1, 9], \ldots, I_b^4 = [5, 5]$.

Запишем совокупность интервальных систем:

— в нечетком случае $t = 0$, $[0, 9]x = [1, 9]$;

— в квазинечетком случае $t = 1$, $[1, 8]x = [2, 8]$;

— в полунечетком случае $t = 2$, $[2, 7]x = [3, 7]$;

— в квазичетком случае $t = 3$, $[3, 6]x = [4, 6]$;

— в четком случае $t = 4$, $[4, 5]x = [5, 5]$.

Решение приведено в табл. 1, из которой видно, что уравнение $a^f x = b^f$ слабо разрешимо и слабо допустимо [17] в любом из пяти типов, но имеет сильную допустимость и сильную разрешимость четырех типов (четкую, квазичеткую, получеткую, квазинечеткую) и не имеет сильной допустимости и разрешимости в нечетком смысле.

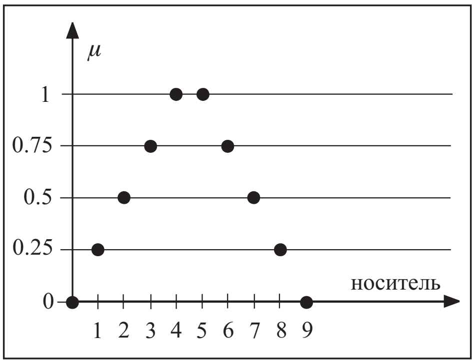

Рис. 2. Нечеткое число *a*

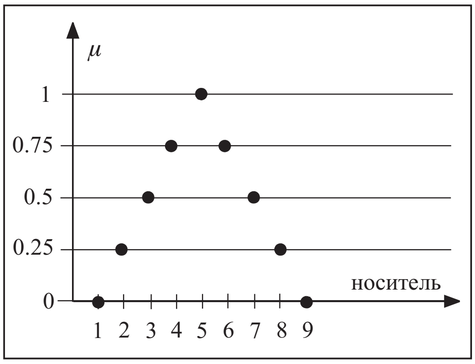

Рис. 3. Нечеткое число *b*

Т а б л и ц а 1. Иллюстрация слабой и сильной разрешимости и допустимости (в смысле t)

t	Слабая разрешимость			Слабая допустимость		Сильная разрешимость			Сильная допустимость	
	пример	решение	результат	решение	результат	пример	решение	результат	решение	результат
0	$9x=9$	$x=1$	+	$x=1$	+	$0\cdot x=1$	$x\in\varnothing$	–	$\varnothing$	–
1	$8x=8$	$x=1$	+	$x=1$	+	$\alpha\cdot x=\beta$	$x=\beta/\alpha$	+	$\beta/\alpha>0$	+
2	$7x=7$	$x=1$	+	$x=1$	+	$\alpha\cdot x=\beta$	$x=\beta/\alpha$	+	$\beta/\alpha>0$	+
3	$6x=6$	$x=1$	+	$x=1$	+	$\alpha\cdot x=\beta$	$x=\beta/\alpha$	+	$\beta/\alpha>0$	+
4	$5x=5$	$x=1$	+	$x=1$	+	$\alpha\cdot x=5$	$x=5/\alpha$	+	$5/\alpha>0$	+

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены критерии сильной допустимости и сильной разрешимости нечеткой линейной системы уравнений в пяти смыслах (четком, квазичетком, получетком, квазинечетком и четком). В дальнейшем целесообразно исследовать возможность использования полученных результатов при решении задач оптимизации с нечеткими данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 165 с.
2. Заде Л.А. Размытые множества и их применение в распознавании образов и кластер-анализе // Классификация и кластер. — М.: Мир, 1980. — С. 208–247.
3. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.
4. Кофман А., Хил Алуха Х. Введение теории нечетких множеств в управлении предприятиями. — Минск: Выш. шк., 1992. — 224 с.
5. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Применение понятий размытой математики для формализации и решения комбинаторных оптимизационных задач // Кибернетика и системный анализ. — 1995. — № 2. — С. 158–162.
6. Сергиенко И.В., Парасюк И.Н., Каспшицкая М.Ф. Об одной нечеткой задаче многопараметрического выбора оптимальных решений // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 2. — С. 3–15.
7. Парасюк И.Н., Ершов С.В. О трансформациях нечетких графов, задаваемых FD-грамматиками // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 2. — С. 129–146.
8. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. — М.: Наука, 1986. — 312 с.
9. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах: монографія. — Полтава: ПУЕТ, 2011. — 239 с. — http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.
10. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Операції та відношення над нечіткими числами // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2008. — № 5. — С. 39–46.
11. Ємець О.О., Ємець Ол-ра О. Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2008. — № 6. — С. 25–33.
12. Донец Г.А., Емец А.О. Постановка и решение задачи о рюкзаке с нечеткими данными // Проблемы управления и информатики — 2009. — № 5. — С. 65–76.
13. Емец О.А., Парфенова Т.А. Операции над нечеткими числами с носителем мощности континуум для моделирования в комбинаторной оптимизации // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 2. — С. 86–101.
14. Емец О.А., Емец А.О., Парфенова Т.А. Метод ветвей и границ для задач оптимизации на нечетких множествах // Проблемы управления и информатики. — 2013. — № 2. — С. 55–60.

15. З а й ч е н к о Ю . П . Исследование операций. Нечеткая оптимизация: Учеб. пособие. — К.: Вища шк., 1991. — 191 с.
16. Р а с к и н Л . Г . , С е р а я О . В . Нечеткая математика. Основы теории. Приложения. — Харьков: Парус, 2008. — 352 с.
17. С е р г и е н к о И . В . , Е м е ц О . А . , Е м е ц А . О . Системы линейных уравнений с данными в виде нечетких множеств: слабая разрешимость и слабая допустимость // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — **50**, № 2. — С. 33–43.
18. Е м е ц О . А . , Е м е ц А . О . Сильная разрешимость и сильная допустимость нечетких линейных систем неравенств // Проблемы управления и информатики. — 2014. — № 6. — С. 72–82.
19. I e m e t s O . O . , Y e m e t s ’ O . O . About the problem of growing of a discrete fuzzy number carrier during algebraic operations // Proc. of XX International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties” (PDMU–2012). September 17–21, 2012. — Kyiv, 2012. — P. 47.
20. С а а т и Т . Принятие решений. Метод анализа иерархий / Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1993. — 320 с.
21. Ф и д л е р М . , Н е д о м а Й . , Р а м и к Я . , Р о н И . , Ц и м м е р м а н н К . Задачи линейной оптимизации с неточными данными. — М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2008 — 288 с.
22. R o h n J . Solvability of systems of linear interval equations // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2003. — **25.** — P. 237–245.

Надійшла до редакції 23.11.2015

О.О. Ємець, Ол-ра О. Ємець

НЕЧІТКІ ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ: СИЛЬНА РОЗВ’ЯЗНІСТЬ І СИЛЬНА ДОПУСТИМІСТЬ

Анотація. Розглянуто питання сильної допустимості і сильної розв’язності нечіткої лінійної системи рівнянь у п’яти сенсах (чіткому, квазічіткому, напівчіткому, квазінечіткому і нечіткому).

Ключові слова: нечіткі множини, інтервальна матриця, нечітка матриця, інтервальні системи рівнянь, нечіткі системи рівнянь, сильна розв’язність системи лінійних рівнянь, сильна допустимість системи лінійних рівнянь.

O.O. Iemets, O.O. Yemets’

FUZZY LINEAR SYSTEMS OF EQUATIONS: STRONG SOLVABILITY AND STRONG FEASIBILITY

Abstract. The authors consider strong solvability and strong feasibility of uncertain linear systems of eguations in five grades (exact, quasi-exact, semi-exact, quasi-fuzzy and fuzzy).

Keywords: fuzzy sets, interval matrix, fuzzy matrix interval systems of equations, uncertain systems of equations, strong solvability of systems of linear equations, strong feasibility of systems of linear equations.

Емец Олег Алексеевич,
доктор физ-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой Полтавского университета экономики и торговли, e-mail: yemetsli@mail.ru.

Емец Александра Олеговна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Полтавского университета экономики и торговли, e-mail: yemets2008@ukr.net.